Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(10), 1148-1158
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.910141

Algorithm for Proving the Radius Coordinates of the Inscribed Sphere and 4-Surfaces and 6-Edge Line Escribed Spheres of the Orthocentric Tetrahedron

—Application of Pythagorean Theorem of Four-Dimensional Volume (Formula 5)

Guowei Cai

Shanghai Huimei Property Co., Ltd., Shanghai
Email: yiersan@139.com

Received: Nov. 22nd, 2019; accepted: Dec. 5th, 2019; published: Dec. 12th, 2019

Abstract

The orthocentric tetrahedron composed of orthogonal 4 spheres, in the Euclidean 3D coordinate system, uses only the radius of four spheres to calculate the isomorphic formula of the radius of the inscribed sphere and radius of the ten escribed spheres composed of the 4-surfaces and 6-edge line and the spheres center coordinates. The formula for the distance between the inscribed sphere center and the circumscribed sphere center is also got.

Keywords

Volume Pythagorean Theorem, Orthocentric Tetrahedron, Inscribed Sphere, Circumscribed Sphere, Escribed Sphere, Escribed Sphere of 2-Plane, Algorithm

证明垂心四面体的内切球、4面和6棱旁切球半径坐标的算法

——四维体积勾股定理的应用(公式五)

蔡国伟

上海汇美房产有限公司，上海
Email: yiersan@139.com

收稿日期：2019年11月22日；录用日期：2019年12月5日；发布日期：2019年12月12日

文章引用: 蔡国伟. 证明垂心四面体的内切球、4面和6棱旁切球半径坐标的算法[J]. 理论数学, 2019, 9(10): 1148-1158.
DOI: 10.12677/pm.2019.910141

摘　要

正交4球心组成的垂心四面体，在欧氏3D坐标系中，仅用四球半径，计算内切球、4面6棱10个旁切球半径和球心坐标的同构公式，同时得出内切球球心与外接球球心的间距公式。

关键词

体积勾股定理，垂心四面体，内切球，外接球，面旁切球，棱旁切球，算法

1. 引言

4 球正交，球心间的垂心四面体[1]的内切球[2]、4 面旁切球[2]、6 棱旁切球半径以及坐标关系如何？是否有同构的公式可循？内切球与外接球[3]球心间距关系如何？

2. 证明正交 4 球球心间的垂心四面体内切球、旁切球、仅变换旁切面为负号的同构半径公式、及其球心坐标公式

2.1. 约定符号

2.1.1. 设正交 4 球球心 A，B，C，D 及坐标

设：正交 4 球半径分别为 a,b,c,d；依次对应球心坐标为：

$$A(a,0,0);\ B(0,b,0);\ C(0,0,c);\ D(bct,act,abt)$$

这里：系数 $t=\dfrac{-d^2}{v+abc}$；体积元 $v=\sqrt{a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2}=6V_{ABCD}$

$$(0<A\in a,B\in b,C\in c,D\in d<\infty)$$

2.1.2. 正交 4 球球心构成的垂心四面体的 4 面的面积元

设：4 球心 A，B，C，D 的对平面为 1，2，3，4：设 4 个面积元为：

$$s_1=\sqrt{b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2}=2S_{BCD};\ s_2=\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+c^2d^2}=2S_{ACD};$$
$$s_3=\sqrt{a^2b^2+a^2d^2+b^2d^2}=2S_{ABD};\ s_4=\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}=2S_{ABC}$$

2.1.3. 设内切球、4 面旁切球、6 棱旁切球半径及其球心坐标符号

设：内切球半径为 r_I，其球心坐标 $I(I_x,I_y,I_z)$

4 个面旁切球半径及其球心坐标为：

A 球心对平面的旁切球半径：r_{E1}，球心坐标 $E_1(E_{1x},E_{1y},E_{1z})$。

B 球心对平面的旁切球半径：r_{E2}，球心坐标 $E_2(E_{2x},E_{2y},E_{2z})$。

C 球心对平面的旁切球半径：r_{E3}，球心坐标 $E_3(E_{3x},E_{3y},E_{3z})$。

D 球心对平面的旁切球半径：r_{E4}，球心坐标 $E_4(E_{4x},E_{4y},E_{4z})$。

6 个棱旁切球半径及其球心坐标为：

AB 棱旁切 C，D 对平面的旁切球半径：r_{E34}，球心坐标 $E_{34}\left(E_{34x},E_{34y},E_{34z}\right)$。

AC 棱旁切 B，D 对平面的旁切球半径：r_{E24}，球心坐标 $E_{24}\left(E_{24x},E_{24y},E_{24z}\right)$。

BC 棱旁切 A，D 对平面的旁切球半径：r_{E14}，球心坐标 $E_{14}\left(E_{14x},E_{14y},E_{14z}\right)$。

AD 棱旁切 B，C 对平面的旁切球半径：r_{E23}，球心坐标 $E_{23}\left(E_{23x},E_{23y},E_{23z}\right)$。

BD 棱旁切 A，C 对平面的旁切球半径：r_{E13}，球心坐标 $E_{13}\left(E_{13x},E_{13y},E_{13z}\right)$。

CD 棱旁切 A，B 对平面的旁切球半径：r_{E12}，球心坐标 $E_{12}\left(E_{12x},E_{12y},E_{12z}\right)$。

2.2. 内切球和 10 个旁切球半径及其球心坐标的同构公式，以及内切球与外接球球心间距公式

4 球正交构成的垂心四面体的 1 个内切球，4 个面旁切球和 6 条棱旁切球。共 11 个内旁切球的半径及其球心坐标仅区别于相关面的正负号的同构公式。

2.2.1. 内切球和 10 个旁切球半径公式

正交 4 球形成垂心四面体的内切球，4 个面旁切球、6 个棱旁切球的同构半径公式。

定义：内切球和 10 个旁切球半径：等于 3 倍的垂心四面体体积与其表面积的商减去 2 倍的旁切面面积元：同构公式(1)为：

$$r_{Vn}=3\frac{\frac{1}{6}v}{\frac{1}{2}\left(s_1+s_2+s_3+s_4-2\sum s_n\right)}=\frac{v}{s_1+s_2+s_3+s_4-2\sum s_n} \tag{1}$$

这里 r 代表半径，下标 V 为或，I 为内切，E 为旁切；1，2，3，4 为 4 球心 A，B，C，D 的对平面。$2\sum s_n$ 为 2 倍的旁切面的面积元之和。

2.2.2.以内切球球心坐标为基准的 10 个旁切球球心坐标：

旁切球球心坐标定义：以内切球球心坐标为基准，4 面旁切球坐标、6 棱旁切球(也可称：与该棱共线 2 面的旁切球)的坐标，等于内切球球心坐标为基准，对应旁切面面积元前变更为负号。

以内旁切球球心坐标为基准：

$$I=\begin{cases} x_I=\dfrac{bc\left(abc-v\right)+as_1s_4}{s_4\left(s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \\ y_I=\dfrac{ac\left(abc-v\right)+bs_2s_4}{s_4\left(s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \\ z_I=\dfrac{ab\left(abc-v\right)+cs_3s_4}{s_4\left(s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \end{cases} \tag{2}$$

2.2.3. 内切球球心与外接球球心间距公式：

定义：外接球心 O 与内切球心 I 距离的平方等于外接球半径平方与 3 倍的内切球半径平方之和减去内切球半径与垂心至 4 球心距离和的积。公式为：

$$OI^2=R_O^2+3r_I^2-r_I\left(AH+BH+CH+DH\right) \tag{3}$$

例：各内旁切球的半径及其球心坐标为：

- 内切球半径，因无旁切面，

公式(1)其半径为：

$$r_I = \frac{v}{s_1+s_2+s_3+s_4-0} = \frac{v}{s_1+s_2+s_3+s_4} \tag{4}$$

其球心坐标为基准坐标：即为：公式(2)

$$I = \begin{cases} x_I = \dfrac{bc(abc-v)+as_1s_4}{s_4(s_1+s_2+s_3+s_4)} \\ y_I = \dfrac{ac(abc-v)+bs_2s_4}{s_4(s_1+s_2+s_3+s_4)} \\ z_I = \dfrac{ab(abc-v)+cs_3s_4}{s_4(s_1+s_2+s_3+s_4)} \end{cases} \tag{5}$$

- A 球心对平面 BCD 面为 1 面的旁切球半径为：(将旁切面 s_1 代入公式(1)的 $2\sum s_n$)

$$r_{E1} = \frac{v}{s_1+s_2+s_3+s_4-2s_1} = \frac{v}{-s_1+s_2+s_3+s_4} \tag{6}$$

其球心坐标在内切球基准坐标公式(2)中将 s_1 前变更为负号：

$$E_1 = \begin{cases} x_{E1} = \dfrac{bc(abc-v)-as_1s_4}{s_4(-s_1+s_2+s_3+s_4)} \\ y_{E1} = \dfrac{ac(abc-v)+bs_2s_4}{s_4(-s_1+s_2+s_3+s_4)} \\ z_{E1} = \dfrac{ab(abc-v)+cs_3s_4}{s_4(-s_1+s_2+s_3+s_4)} \end{cases} \tag{7}$$

- AB 棱旁切球(即旁切 s_3 和 s_4 2 个面)半径为：(将旁切面 s_3+s_4 代入公式(1) $2\sum s_n$)

$$r_{E34} = \frac{v}{s_1+s_2+s_3+s_4-2(s_3+s_4)} = \frac{v}{s_1+s_2-s_3-s_4} \tag{8}$$

(当 $r_{E34}>0$ 时成立)。

其球心坐标在内切球基准坐标公式(2)中将 s_3 和 s_4 前变更为负号：

$$E_{34} = \begin{cases} x_{E34} = \dfrac{bc(abc-v)-as_1s_4}{-s_4(s_1+s_2+s_3-s_4)} \\ y_{E34} = \dfrac{ac(abc-v)-bs_2s_4}{-s_4(s_1+s_2+s_3-s_4)} \\ z_{E34} = \dfrac{ab(abc-v)+c(-s_3)(-s_4)}{-s_4(s_1+s_2+s_3-s_4)} = \dfrac{ab(abc-v)+cs_3s_4}{-s_4(s_1+s_2+s_3-s_4)} \end{cases} \tag{9}$$

其余单面旁切球、2 面(棱)旁切球半径，及其球心坐标详见表 1。

2.3. 验证公式(1)、公式(2)、公式(3)

分别验证内切球，4 个面旁切球和 6 条棱(与棱共线的 2 面旁切)旁切球 3 类半径及其球心坐标。

2.3.1. 验证内切球半径及其球心坐标，计算内切球与外接球球心间距公式

即：验证公式(3)、公式(4)、公式(5)。

Table 1. List of radius and center coordinates of inscribed sphere and escribed sphere of orthocentric tetrahedron
表 1. 垂心四面体的内切球和旁切球半径及球心坐标一览表

序	名称	旁切	球心	分坐标 x	分坐标 y	分坐标 z	半径
1	内		I	$\frac{bc(abc-v)+as_1s_4}{s_4(s_1+s_2+s_3+s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)+bs_2s_4}{s_4(s_1+s_2+s_3+s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)+cs_3s_4}{s_4(s_1+s_2+s_3+s_4)}$	$r_I=\frac{v}{s_1+s_2+s_3+s_4}$
2	外 1	BCD	E_1	$\frac{bc(abc-v)-as_1s_4}{s_4(-s_1+s_2+s_3+s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)+bs_2s_4}{s_4(-s_1+s_2+s_3+s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)+cs_3s_4}{s_4(-s_1+s_2+s_3+s_4)}$	$r_{E1}=\frac{v}{-s_1+s_2+s_3+s_4}$
3	外 2	ACD	E_2	$\frac{bc(abc-v)+as_1s_4}{s_4(s_1-s_2+s_3+s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)-bs_2s_4}{s_4(s_1-s_2+s_3+s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)+cs_3s_4}{s_4(s_1-s_2+s_3+s_4)}$	$r_{E2}=\frac{v}{s_1-s_2+s_3+s_4}$
4	外 3	ABD	E_3	$\frac{bc(abc-v)+as_1s_4}{s_4(s_1+s_2-s_3+s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)+bs_2s_4}{s_4(s_1+s_2-s_3+s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)-cs_3s_4}{s_4(s_1+s_2-s_3+s_4)}$	$r_{E3}=\frac{v}{s_1+s_2-s_3+s_4}$
5	外 4	ABC	E_4	$\frac{bc(abc-v)-as_1s_4}{-s_4(s_1+s_2+s_3-s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)-bs_2s_4}{-s_4(s_1+s_2+s_3-s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)-cs_3s_4}{-s_4(s_1+s_2+s_3-s_4)}$	$r_{E4}=\frac{v}{s_1+s_2+s_3-s_4}$
6	外 12	CD	E_{12}	$\frac{bc(abc-v)-as_1s_4}{s_4(-s_1-s_2+s_3+s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)-bs_2s_4}{s_4(-s_1-s_2+s_3+s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)+cs_3s_4}{s_4(-s_1-s_2+s_3+s_4)}$	$r_{E12}=\frac{v}{-s_1-s_2+s_3+s_4}$
7	外 13	BD	E_{13}	$\frac{bc(abc-v)-as_1s_4}{s_4(-s_1+s_2-s_3+s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)+bs_2s_4}{s_4(-s_1+s_2-s_3+s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)-cs_3s_4}{s_4(-s_1+s_2-s_3+s_4)}$	$r_{E13}=\frac{v}{-s_1+s_2-s_3+s_4}$
8	外 14	BC	E_{14}	$\frac{bc(abc-v)+as_1s_4}{-s_4(-s_1+s_2+s_3-s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)-bs_2s_4}{-s_4(-s_1+s_2+s_3-s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)-cs_3s_4}{-s_4(-s_1+s_2+s_3-s_4)}$	$r_{E14}=\frac{v}{-s_1+s_2+s_3-s_4}$
9	外 23	AD	E_{23}	$\frac{bc(abc-v)+as_1s_4}{s_4(s_1-s_2-s_3+s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)-bs_2s_4}{s_4(s_1-s_2-s_3+s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)-cs_3s_4}{s_4(s_1-s_2-s_3+s_4)}$	$r_{E23}=\frac{v}{s_1-s_2-s_3+s_4}$
10	外 24	AC	E_{24}	$\frac{bc(abc-v)-as_1s_4}{-s_4(s_1-s_2+s_3-s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)+bs_2s_4}{-s_4(s_1-s_2+s_3-s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)-cs_3s_4}{-s_4(s_1-s_2+s_3-s_4)}$	$r_{E24}=\frac{v}{s_1-s_2+s_3-s_4}$
11	外 34	AB	E_{34}	$\frac{bc(abc-v)-as_1s_4}{-s_4(s_1+s_2-s_3-s_4)}$	$\frac{ac(abc-v)-bs_2s_4}{-s_4(s_1+s_2-s_3-s_4)}$	$\frac{ab(abc-v)+cs_3s_4}{-s_4(s_1+s_2-s_3-s_4)}$	$r_{E34}=\frac{v}{s_1+s_2-s_3-s_4}$

- 根据正交 4 球球心，可以列出 4 组 3 球心组成的 4 个平面方程为：

BCD 球心为 s_1 的平面方程：

$$0=\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-c \\ bct-0 & act-0 & abt-c \\ 0-0 & b-0 & 0-c \end{vmatrix}=-b^2c^2t+\left(bc-ab^2t-ac^2t\right)x+bc^2ty+b^2ctz \tag{10}$$

ACD 球心为 s_2 的平面方程：

$$0=\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ bct-a & act-0 & abt-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=-a^2c^2t+ac^2tx+\left(ac-a^2bt-bc^2t\right)y+a^2ctz \tag{11}$$

ABD 球心为 s_3 的平面方程：

$$0=\begin{vmatrix} x-bct & y-act & z-abt \\ 0-bct & b-act & 0-abt \\ a-bct & 0-act & 0-abt \end{vmatrix}=-a^2b^2t+ab^2tx+a^2bty+\left(ab-a^2ct-b^2ct\right)z \tag{12}$$

ABC 球心为 s_4 的平面方程：

$$0=\begin{vmatrix} x-0 & y-b & z-0 \\ a-0 & 0-b & 0-0 \\ 0-0 & 0-b & c-0 \end{vmatrix}=abc-bcx-acy-abz \tag{13}$$

- 根据点到平面距离 D 的联立方程为：

$$\begin{cases} D=r_I=\dfrac{-a^3b^3c+a^2b^2v+\left(a^2b^3c-ab^2v\right)x+\left(a^3b^2c-a^2bv\right)y+\left(a^3b^3+a^2cv+b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2b^3c-ab^2v\right)^2+\left(a^3b^2c-a^2bv\right)^2+\left(a^3b^3+a^2cv+b^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_I=\dfrac{-a^3bc^3+a^2c^2v+\left(a^2bc^3-ac^2v\right)x+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)y+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2bc^3-ac^2v\right)^2+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)^2+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_I=\dfrac{-ab^3c^3+b^2c^2v+\left(b^3c^3+ab^2v+ac^2v\right)x+\left(ab^2c^3-bc^2v\right)y+\left(ab^3c^2-b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(b^3c^3+ab^2v+ac^2v\right)^2+\left(ab^2c^3-bc^2v\right)^2+\left(ab^3c^2-b^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_I=\dfrac{abc-bcx-acy-abz}{\left|\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right|} \end{cases} \tag{14}$$

- 解方程求得内切球球心 $I\left(x,y,z\right)$ 坐标为：

$$I=\begin{cases} x_I=\dfrac{bc\left(abc-v\right)+as_1s_4}{s_4\left(s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \\ y_I=\dfrac{ac\left(abc-v\right)+bs_2s_4}{s_4\left(s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \\ z_I=\dfrac{ab\left(abc-v\right)+cs_3s_4}{s_4\left(s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \end{cases}$$

- 将上述坐标代入公式(14)得内切球半径

$$\begin{cases} r_I = \dfrac{-a^3b^3c + a^2b^2v + \left(a^2b^3c - ab^2v\right)x + \left(a^3b^2c - a^2bv\right)y + \left(a^3b^3 + a^2cv + b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2b^3c - ab^2v\right)^2 + \left(a^3b^2c - a^2bv\right)^2 + \left(a^3b^3 + a^2cv + b^2cv\right)^2}\right|} = \dfrac{v}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} \\ r_I = \dfrac{-a^3bc^3 + a^2c^2v + \left(a^2bc^3 - ac^2v\right)x + \left(a^3c^3 + a^2bv + bc^2v\right)y + \left(a^3bc^2 - a^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2bc^3 - ac^2v\right)^2 + \left(a^3c^3 + a^2bv + bc^2v\right)^2 + \left(a^3bc^2 - a^2cv\right)^2}\right|} = \dfrac{v}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} \\ r_I = \dfrac{-ab^3c^3 + b^2c^2v + \left(b^3c^3 + ab^2v + ac^2v\right)x + \left(ab^2c^3 - bc^2v\right)y + \left(ab^3c^2 - b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(b^3c^3 + ab^2v + ac^2v\right)^2 + \left(ab^2c^3 - bc^2v\right)^2 + \left(ab^3c^2 - b^2cv\right)^2}\right|} = \dfrac{v}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} \\ r_I = \dfrac{abc - bcx - acy - abz}{\left|\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\right|} = \dfrac{v}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} \end{cases}$$

经验证：内切球半径公式(4)、球心坐标公式(5)成立。

- 再根据外接球和内切球 2 球心坐标验证公式(3)

$$\begin{aligned} |OI|^2 - R_O^2 &= |OI|^2 - |OA|^2 \\ &= \left(x_O - x_I\right)^2 + \left(y_O - y_I\right)^2 + \left(z_O - z_I\right)^2 - \left[\left(x_O - x_A\right)^2 + \left(y_O - y_A\right)^2 + \left(z_O - z_A\right)^2\right] \\ &= \left(x_O - x_I\right)^2 + \left(y_O - y_I\right)^2 + \left(z_O - z_I\right)^2 - \left[\left(x_O - a\right)^2 + \left(y_O - 0\right)^2 + \left(z_O - 0\right)^2\right] \\ &= -a^2 + x_I^2 + y_I^2 + z_I^2 + 2\left(ax_O - x_I x_O - y_I y_O - z_I z_O\right) \end{aligned}$$

将外接球和内切球 2 球心坐标代入：

$$\begin{aligned} OI^2 - R_O^2 = &-a^2 + \left[\frac{bc\left(abc - v\right) + as_1s_4}{s_4\left(s_1 + s_2 + s_3 + s_4\right)}\right]^2 + \left[\frac{ac\left(abc - v\right) + bs_2s_4}{s_4\left(s_1 + s_2 + s_3 + s_4\right)}\right]^2 + \left[\frac{ac\left(abc - v\right) + bs_2s_4}{s_4\left(s_1 + s_2 + s_3 + s_4\right)}\right]^2 \\ &+ 2\left[a\frac{1}{2}\left(a + bct\frac{v + 2abc}{v}\right) - \frac{bc\left(abc - v\right) + as_1s_4}{s_4\left(s_1 + s_2 + s_3 + s_4\right)}\frac{1}{2}\left(a + bct\frac{v + 2abc}{v}\right)\right. \\ &\left. - \frac{ac\left(abc - v\right) + bs_2s_4}{s_4\left(s_1 + s_2 + s_3 + s_4\right)}\frac{1}{2}\left(b + act\frac{v + 2abc}{v}\right) - \frac{ab\left(abc - v\right) + cs_3s_4}{s_4\left(s_1 + s_2 + s_3 + s_4\right)}\frac{1}{2}\left(c + abt\frac{v + 2abc}{v}\right)\right] \\ = &-\left(\frac{a^2s_1 + b^2s_2 + c^2s_3 + d^2s_4}{v}\right)\frac{v}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4} + 3\left(\frac{v}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}\right)^2 \\ = &-\left(AH + BH + CH + DH\right)r_I + 3r_I^2 \end{aligned}$$

整理上式得：

$$OI^2 = R_O^2 + 3r_I^2 - \left(AH + BH + CH + DH\right)r_I$$

命题得证：公式(3)成立。

因此公式(3)、公式(4)、公式(5)均验证成立。

2.3.2. 验证面旁切球半径及其球心坐标公式

即：验证公式(6)、公式(7)。

验证 A 球心对平面 BCD 面为 s_1 面的旁切球半径及其球心坐标。

将 s_1 面的平面方程乘以负号：

$$0=(-)\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-c \\ bct-0 & act-0 & abt-c \\ 0-0 & b-0 & 0-c \end{vmatrix}=b^2c^2t-\left(bc-ab^2t-ac^2t\right)x-bc^2ty-b^2ctz \tag{15}$$

将公式(15)代入点到平面距离公式(14)第 1 行为：

$$\begin{cases} D=r_{E1}=\dfrac{a^3b^3c-a^2b^2v-\left(a^2b^3c-ab^2v\right)x-\left(a^3b^2c-a^2bv\right)y-\left(a^3b^3+a^2cv+b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2b^3c-ab^2v\right)^2+\left(-a^3b^2c+a^2bv\right)^2+\left(-a^3b^3-a^2cv-b^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_{E1}=\dfrac{-a^3bc^3+a^2c^2v+\left(a^2bc^3-ac^2v\right)x+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)y+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2bc^3-ac^2v\right)^2+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)^2+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_{E1}=\dfrac{-ab^3c^3+b^2c^2v+\left(b^3c^3+ab^2v+ac^2v\right)x+\left(ab^2c^3-bc^2v\right)y+\left(ab^3c^2-b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(b^3c^3+ab^2v+ac^2v\right)^2+\left(ab^2c^3-bc^2v\right)^2+\left(ab^3c^2-b^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_{E1}=\dfrac{abc-bcx-acy-abz}{\left|\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right|} \end{cases} \tag{16}$$

解方程求得 s_1 面 BCD 旁切球球心 $E_1\left(x_{E1},y_{E1},z_{E1}\right)$ 坐标为：

$$E_1=\begin{cases} x_{E1}=\dfrac{bc\left(abc-v\right)-as_1s_4}{s_4\left(-s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \\ y_{E1}=\dfrac{ac\left(abc-v\right)+bs_2s_4}{s_4\left(-s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \\ z_{E1}=\dfrac{ab\left(abc-v\right)+cs_3s_4}{s_4\left(-s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \end{cases}$$

将上述坐标代入公式(16)得 1 面 BCD 旁切球半径为

$$\begin{cases} r_{E1}=\dfrac{a^3b^3c-a^2b^2v-\left(a^2b^3c-ab^2v\right)x-\left(a^3b^2c-a^2bv\right)y-\left(a^3b^3+a^2cv+b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2b^3c-ab^2v\right)^2+\left(-a^3b^2c+a^2bv\right)^2+\left(-a^3b^3-a^2cv-b^2cv\right)^2}\right|}=\dfrac{v}{-s_1+s_2+s_3+s_4} \\ r_{E1}=\dfrac{-a^3bc^3+a^2c^2v+\left(a^2bc^3-ac^2v\right)x+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)y+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2bc^3-ac^2v\right)^2+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)^2+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)^2}\right|}=\dfrac{v}{-s_1+s_2+s_3+s_4} \\ r_{E1}=\dfrac{-ab^3c^3+b^2c^2v+\left(b^3c^3+ab^2v+ac^2v\right)x+\left(ab^2c^3-bc^2v\right)y+\left(ab^3c^2-b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(b^3c^3+ab^2v+ac^2v\right)^2+\left(ab^2c^3-bc^2v\right)^2+\left(ab^3c^2-b^2cv\right)^2}\right|}=\dfrac{v}{-s_1+s_2+s_3+s_4} \\ r_{E1}=\dfrac{abc-bcx-acy-abz}{\left|\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right|}=\dfrac{v}{-s_1+s_2+s_3+s_4} \end{cases}$$

因此公式(6)、公式(7)验证成立。

同理：可验证：旁切 s_2 平面、旁切 s_3 平面、旁切 s_4 平面的旁切球心坐标及其半径。它们的半径及其球心坐标见表 1。

2.3.3. 验证棱(双面)旁切球半径及其球心坐标公式

即：验证公式(8)、公式(9)。

- 验证 AB 棱旁切球(即旁切 s_3 和 s_4 2 个面)半径及其球心坐标。

将 ABD 球心的 s_3 面，和 ABC 球心的 s_4 面的 2 个平面方程公式(12)、公式(13)均乘以负号：

ABD 球心为 s_3 的平面方程公式(12)乘以负号为：

$$0=(-)\begin{vmatrix} x-bct & y-act & z-abt \\ 0-bct & b-act & 0-abt \\ a-bct & 0-act & 0-abt \end{vmatrix}=a^2b^2t-ab^2tx-a^2bty-\left(ab-a^2ct-b^2ct\right)z \tag{17}$$

ABC 球心为 s_4 的平面方程公式(12)乘以负号为：

$$0=(-)\begin{vmatrix} x-0 & y-b & z-0 \\ a-0 & 0-b & 0-0 \\ 0-0 & 0-b & c-0 \end{vmatrix}=-abc+bcx+acy+abz \tag{18}$$

将公式(17)，公式(18)代入点到平面距离公式(14)第 3 行和第 4 行为：

$$\begin{cases} D=r_{E34}=\dfrac{-a^3b^3c+a^2b^2v+\left(a^2b^3c-ab^2v\right)x+\left(a^3b^2c-a^2bv\right)y+\left(a^3b^3+a^2cv+b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2b^3c-ab^2v\right)^2+\left(a^3b^2c-a^2bv\right)^2+\left(a^3b^3+a^2cv+b^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_{E34}=\dfrac{-a^3bc^3+a^2c^2v+\left(a^2bc^3-ac^2v\right)x+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)y+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2bc^3-ac^2v\right)^2+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)^2+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_{E34}=\dfrac{ab^3c^3-b^2c^2v-\left(b^3c^3+ab^2v+ac^2v\right)x-\left(ab^2c^3-bc^2v\right)y-\left(ab^3c^2-b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(-b^3c^3-ab^2v-ac^2v\right)^2+\left(-ab^2c^3+bc^2v\right)^2+\left(-ab^3c^2+b^2cv\right)^2}\right|} \\ D=r_{E34}=\dfrac{-abc+bcx+acy+abz}{\left|\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right|} \end{cases} \tag{19}$$

解方程求得旁切 AB 棱(即旁切 s_3 面， s_4 面的旁切球球心 $E_{34}\left(x_{E34},y_{E34},z_{E34}\right)$ 坐标为：

$$E_{34}=\begin{cases} x_{E34}=\dfrac{bc\left(abc-v\right)-as_1s_4}{s_4\left(-s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \\ y_{E34}=\dfrac{ac\left(abc-v\right)+bs_2s_4}{s_4\left(-s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \\ z_{E34}=\dfrac{ab\left(abc-v\right)+cs_3s_4}{s_4\left(-s_1+s_2+s_3+s_4\right)} \end{cases}$$

将上述坐标代入公式(19)得旁切 s_3 面， s_4 面的旁切球半径为

$$\begin{cases} r_{E34}=\dfrac{-a^3b^3c+a^2b^2v+\left(a^2b^3c-ab^2v\right)x+\left(a^3b^2c-a^2bv\right)y+\left(a^3b^3+a^2cv+b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2b^3c-ab^2v\right)^2+\left(a^3b^2c-a^2bv\right)^2+\left(a^3b^3+a^2cv+b^2cv\right)^2}\right|}=\dfrac{v}{s_1+s_2-s_3-s_4} \\ r_{E34}=\dfrac{-a^3bc^3+a^2c^2v+\left(a^2bc^3-ac^2v\right)x+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)y+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(a^2bc^3-ac^2v\right)^2+\left(a^3c^3+a^2bv+bc^2v\right)^2+\left(a^3bc^2-a^2cv\right)^2}\right|}=\dfrac{v}{s_1+s_2-s_3-s_4} \\ r_{E34}=\dfrac{ab^3c^3-b^2c^2v-\left(b^3c^3+ab^2v+ac^2v\right)x-\left(ab^2c^3-bc^2v\right)y-\left(ab^3c^2-b^2cv\right)z}{\left|\sqrt{\left(-b^3c^3-ab^2v-ac^2v\right)^2+\left(-ab^2c^3+bc^2v\right)^2+\left(-ab^3c^2+b^2cv\right)^2}\right|}=\dfrac{v}{s_1+s_2-s_3-s_4} \\ r_{E34}=\dfrac{-abc+bcx+acy+abz}{\left|\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}\right|}=\dfrac{v}{s_1+s_2-s_3-s_4} \end{cases} \tag{19}$$

(当 $r_{E34}>0$ 时公式成立)。

同理可验证：旁切 s_1s_2 平面、旁切 s_1s_3 平面、旁切 s_1s_4 平面、旁切 s_2s_3 平面、旁切 s_2s_4 平面的 5 个棱旁切球心坐标及其半径 $r_{Eij}>0$ 时公式成立。它们的半径及其球心坐标见表 1。

- 说明：6 个棱旁切球的半径必须大于零 $r_{Eij}>0$ 时，棱旁切球才成立。

当正交 4 球半径均相等时：

∵ 此时 6 个棱旁切球半径分母都等于零，

∴ 6 个棱旁切球都不存在。

当正交 4 球半径均不相等时：

∵ 此时 6 个棱旁切球半径：其中：与最小球心相连的 3 棱旁切球半径大于零，与最小球心对平面相交的 3 棱旁切球半径小于零。

∴ 6 个棱旁切球仅与最小球心相连的 3 棱旁切球半径大于零。

例：

正交 4 球半径分别为：$r_A=3, r_B=4, r_C=5, r_D=6$ 时：6 棱旁切球半径分别为：

$$r_{E12}=\frac{v}{-s_1-s_2+s_3+s_4}=-8.2896;\quad r_{E34}=\frac{v}{s_1+s_2-s_3-s_4}=8.2896;$$
$$r_{E13}=\frac{v}{-s_1+s_2-s_3+s_4}=-17.9983;\quad r_{E24}=\frac{v}{s_1-s_2+s_3-s_4}=17.9983;$$
$$r_{E14}=\frac{v}{-s_1+s_2+s_3-s_4}=-265.1992;\quad r_{E23}=\frac{v}{s_1-s_2-s_3+s_4}=265.1992$$

因此公式(8)、公式(9)验证成立(当 $r_{E34}>0$ 时公式成立)。

3. 总结

1) 以内切球的半径为基准，所有 10 个旁切球半径仅变更旁切面积元为负。公式(1)成立。

2) 以内切球心坐标公式(2)为基准，所有 10 个旁切球心坐标仅变更旁切面积元为负。

3) 内切球心与外接球心间距公式(3)成立。

4) 内切球和 4 面旁切球任何情况均成立。

5) 6 棱旁切球：当：正交 4 球心均相等时没有棱旁切球；正交 4 球心不等时，仅见 3 个与最小球心相连的 3 棱旁切球，而与最小球心对平面 3 棱的旁切球不存在。

参考文献

[1] 蔡国伟. 体积勾股定理的证明[J]. 理论数学, 2019, 9(6):723-729.

[2] 顾云良. 几道内切外切球的典型例题[J]. 中学生数学, 2004(12s): 5-6.

[3] 李晶, 张国坤. 探寻四面体外接球球心位置[J]. 上海中学数学, 2014(9): 22-24.