Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(7), 623-630
Published Online July 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.107075

Hans汉斯

Positive and Negative Inertia Indexes and Nullity of One Special Kinds of Tricyclic Graphs

Chengling Xie*, Haicheng Ma

Department of Mathematics, Qinghai University for Nationalities, Xining Qinghai
Email: *316237704@qq.com, qhmymhc@163.com

Received: Jun. 19th, 2020; accepted: Jul. 9th, 2020; published: Jul. 16th, 2020

Abstract

By deleting pendant trees and compressing internal paths, a method of calculating the positive and negative inertia indexes and nullity of the one kind of tricyclic graphs is given. This kind of tricyclic graphs can be divided into I- and II-types. It is proved that the positive and negative inertia indexes and nullity of I-type tricyclic graphs are equal to the sum of some trees, unicyclic graphs and bicyclic graphs. The positive and negative inertia indexes and nullity of II-type tricyclic graphs are equal to the sum of some trees and small tricyclic graphs. The positive and negative inertia indexes and nullity of these small tricyclic graphs can be calculated by Matlab. And it is proved that a conjecture about sign difference is true for this kind of three-cycle graph.

Keywords

Tricyclic Graphs, Positive Inertia Index, Negative Inertia Index, Nullity

一类特殊三圈图的正负惯性指数和零度

解承玲*，马海成

青海民族大学，数学与统计学院，青海 西宁
Email: *316237704@qq.com, qhmymhc@163.com

收稿日期：2020年6月19日；录用日期：2020年7月9日；发布日期：2020年7月16日

摘 要

通过删除悬挂的树和压缩内部路等方法，给出了一类特殊三圈图的正负惯性指数和零度的计算方法。这

*通讯作者。

文章引用: 解承玲, 马海成. 一类特殊三圈图的正负惯性指数和零度[J]. 理论数学, 2020, 10(7): 623-630.
DOI: 10.12677/pm.2020.107075

类三圈图可分为I-和II-两个类型，我们得到以下结论：I-型三圈图的正负惯性指数(零度)等于一些树、单圈图和双圈图的正负惯性指数(零度)之和；II-型三圈图的正负惯性指数(零度)等于一些树和一些小的同类三圈图的正负惯性指数(零度)之和；对于那些小的三圈图的正负惯性指数和零度可以利用软件Matlab得到；还验证了对这类三圈图一个关于符号差的猜想成立。

关键词

三圈图，正惯性指数，负惯性指数，零度

1. 引言

设 G 是一个 n 阶图，G 的邻接矩阵的特征值的全体构成 G 的谱。图的谱在分子轨道、量子化学和电子工程等领域内有着广泛的应用，其研究是代数图论的一项重要内容，其成果已经形成多部专著。在图的谱中正特征根的个数、负特征根的个数和零特征根的个数分别称为 G 的正惯性指数、负惯性指数和零度[1] [2]，并分别记作 $p(G)$、$n(G)$、$\eta(G)$。易知 $p(G)+n(G)+\eta(G)=n$；G 的秩代表着非零特征根的个数；正特征根与负特征根的个数之差称为 G 的符号差。在化学中，用图可以表示一个共轭烃分子，称其为该分子的分子图。分子图的零度(或秩)在化学中有许多重要的应用。例如，一个分子化学性质的稳定性的一个满足条件之一就是其图的零度等于零。在 1957 年，Collatz 和 Sinogowitz 在文献[3]中首次引入刻画所有奇异图的问题，这个问题引起了很多数学家和化学家的兴趣。在数学中，由著名的 Graham-Pollak 定理[4]知，图的负惯性指数不大于图的完全二部图分解数。因此，图的惯性在图的二部分解和星分解方面有很多应用。许多图论学者对各类图的正负惯性指数和零度做过大量的研究[5]-[11]，并取得出了很多结论。文献[2]讨论了树、单圈图、双圈图的正负惯性指数和零度，并给出了它们的计算方法，与此同时作者首次提出了图符号差的猜想。文献[10] [11]对于三类三圈图的正负惯性指数和零度进行了研究，并验证了关于图的符号差猜想对这三类图成立。本文讨论了另一类结构相对复杂的三圈图(即 ψ)的正负惯性指数和零度，并给出了计算这类三圈图的正负惯性指数和零度的方法，此外检验了这类三圈图对于图的符号差猜想是成立的。

文章中出现的图都是简单无向图。设 $G=(V(G),E(G))$ 是 n 阶图，$V(G)$ 表示 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 图 G 的顶点集，$E(G)$ 是图 G 的边集。设 W 是图 G 的一个非空点子集，用 $G[W]$ 表示由点子集 W 导出的子图，用 $G-W$ 表示从 G 中删去 W 中的点以及与 W 中的点相关联的所有边后得到的图。用 $G_1\cup G_2$ 表示两个顶点集不相交，称边数等于顶点数加上—1(0, 1, 2)的连通图为树(单圈图，双圈图，三圈图)。

三条内部不相交的路 P_l,P_m,P_n 的两个端点分别黏结成两个点后得到的图叫 θ-图，记为 $\theta(l,m,n)$，这里的 $\min\{l,m,n\}\geq 2$，且最多有一个等于 2。由一条长为 P_q 的路两端上分别黏结图 $\theta(l,m,n)$ 的一个 3 度点和一个圈 C_r 上的一个点构成的图称为 ψ-图，记作 $\psi(l,m,n,q,r)$ (如图 1)，这里的 $q\geq 2, r\geq 3$。根据所含的圈的类型，三圈图可分为 15 类，β = {所有只包含一个 ψ —图作为导出子图的三圈图}是其中的一类。对于给定的三圈图 $G\in\beta$，将 G 的导出子图 ψ-图称作图 G 的核，记作 χ_G。

2. 若干引理

引理 1 [2]若图 $G=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_t$，其中 $G_i\ (i=1,2,\cdots,t)$ 是图 G 的连通分支。则

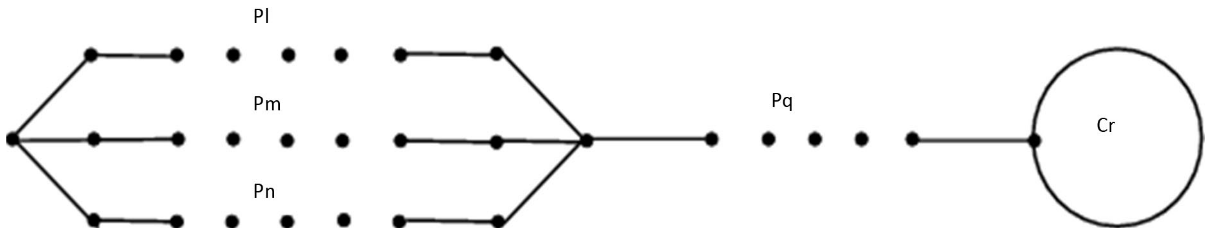

Figure 1. Tricyclic graphs $\psi(l,m,n,q,r)$

图 1. 三圈图 $\psi(l,m,n,q,r)$

$$p(G)=\sum_{i=1}^{t}p(G_i),\ n(G)=\sum_{i=1}^{t}n(G_i),\ \eta(G)=\sum_{i=1}^{t}\eta(G_i).$$

引理 2 [2]设图 G 中包含一条 4 个内点的度均为 2 的长为 5 的路，将用一条边来替换图 G 的这条路后得到的图记为 H，则

$$p(G)=p(H)+2,\ n(G)=n(H)+2,\ \eta(G)=\eta(H).$$

引理 3 [4]设 T 是一棵阶数为 n 的树，那么

$$p(T)=n(T)=\mu(T),\ \eta(T)=n-2\mu(T)$$

其中，$\mu(T)$ 为树 T 的匹配数(即 T 的最大独立边数)。

设 T 是一棵树，$v\in V(T)$，如果存在树 T 的一个极大匹配不覆盖点 v，则称点 v 为树 T 的一个未匹配点；否则，称 v 为树 T 的一个匹配点。若树 T 仅由一个点组成，约定该点是 T 的未匹配点。

设图 G_1 和 n 阶图 G_2 不相交，$u\in V(G_1)$，在 $G_1\cup G_2$ 中把点 u 和 G_2 的任意 k 个点连接后得到的图称为 G_1 和 G_2 的关于点 u 的一个 k-连图($1\le k\le n$)，记为 $G_1(u)\odot^k G_2$。由定义易知，当 $k<n$ 时，图 $G_1(u)\odot^k G_2$ 不唯一。

引理 4 [2]设 G 为 n 阶图，树 T 含有一个可匹配点 u，则对每一个正整数 $k(1\le k\le n)$ 有：

$$p\left(T(u)\odot^k G\right)=p(T)+p(G),$$

$$n\left(T(u)\odot^k G\right)=n(T)+n(G),$$

$$\eta\left(T(u)\odot^k G\right)=\eta(T)+\eta(G).$$

引理 5 [2]设 G 为 n 阶图，树 T 含有一个不可匹配点 u，则对每一个正整数 $k(1\le k\le n)$ 有

$$p\left(T(u)\odot^k G\right)=p(T-u)+p(G+u)=p(T)+p(G+u),$$

$$n\left(T(u)\odot^k G\right)=n(T-u)+n(G+u)=n(T)+n(G+u),$$

$$\eta\left(T(u)\odot^k G\right)=\eta(T-u)+\eta(G+u)=\eta(T)+\eta(G+u)-1.$$

引理 6 [2]设图 G 的每个分支是树，单圈图或是双圈图，则

$$-c_3(G)\le p(G)-n(G)\le c_5(G).$$

并且在文献[2]中，作者提出了下面的猜想：

猜想： 设 G 是一个图，则

$$-c_3(G)\le p(G)-n(G)\le c_5(G).$$

引理 7：设 $l\ge 2, m\ge 3, n\ge 3, q\ge 2, r\ge 3$，且 $l=4a+l'\left(2\le l'\le 5\right)$，$m=4b+m'\left(2\le m'\le 5\right)$，$n=4c+n'\left(2\le n\le 5\right)$，$q=4d+q'\left(2\le h\le 5\right)$，$r=4e+r'\left(3\le r'\le 6\right)$，则

$$p\left(\psi\left(l,m,n,q,r\right)\right)=2\left(a+b+c+d+e\right)+p\left(\psi\left(l',m',n',q',r'\right)\right);$$

$$n\left(\psi\left(l,m,n,q,r\right)\right)=2\left(a+b+c+d+e\right)+n\left(\psi\left(l',m',n',q',r'\right)\right);$$

$$\eta\left(\psi\left(l,m,n,q,r\right)\right)=\eta\left(\psi\left(l',m',n',q',r'\right)\right).$$

证明：根据引理 2，压缩三圈图 ψ 的内部路即得。

3. 主要结果

对于点数相对少的 ψ -图 $\psi\left(l,m,n,q,r\right)$ (不妨设 $2\le l\le m\le n$，其中最多有一个等于 2，$q\ge 2, r\ge 3$)，我们利用 Matlab 软件可计算出它的正负惯性指数和零度(见表 1) (此处将图 $G=\psi\left(l,m,n,q,r\right)$ 均简记为 G，$p\left(G\right)$，$n\left(G\right)$，$\eta\left(G\right)$ 分别简记为 p，n，η)。

Table 1. Positive and negative inertia indexes and nullity of tricyclic graph $\psi\left(l,m,n,q,r\right)$ ($2\le l,q\le 5, 3\le m,n,r\le 6, l\le m\le n$)

表 1. 三圈图 $\psi\left(l,m,n,q,r\right)$ 的正负惯性指数和零度($2\le l,q\le 5, 3\le m,n,r\le 6, l\le m\le n$)

G	p	n	η	G	p	n	η	G	p	n	η	G	p	n	η
(2,3,3,2,3)	2	4	1	(2,3,5,3,3)	5	5	0	(2,4,4,4,3)	5	6	0	(2,4,6,5,3)	7	7	0
(2,3,3,2,4)	3	3	2	(2,3,5,3,4)	5	5	1	(2,4,4,4,4)	5	5	2	(2,4,6,5,4)	7	7	1
(2,3,3,2,5)	4	4	1	(2,3,5,3,5)	6	6	0	(2,4,4,4,5)	6	7	0	(2,4,6,5,5)	8	8	0
(2,3,3,2,6)	4	5	1	(2,3,5,3,6)	6	6	1	(2,4,4,4,6)	6	7	0	(2,4,6,5,6)	8	8	1
(2,3,3,3,3)	3	4	1	(2,3,5,4,3)	5	6	0	(2,4,4,5,3)	6	6	0	(2,5,5,2,3)	5	5	1
(2,3,3,3,4)	3	4	2	(2,3,5,4,4)	5	5	2	(2,4,4,5,4)	6	6	1	(2,5,5,2,4)	5	5	2
(2,3,3,3,5)	4	4	2	(2,3,5,4,5)	7	6	0	(2,4,4,5,5)	7	7	0	(2,5,5,2,5)	7	5	1
(2,3,3,3,6)	5	5	1	(2,3,5,4,6)	7	7	0	(2,4,4,5,6)	7	7	1	(2,5,5,2,6)	7	6	1
(2,3,3,4,3)	3	5	1	(2,3,5,5,3)	6	6	0	(2,4,5,2,3)	5	5	0	(2,5,5,3,3)	5	5	2
(2,3,3,4,4)	4	4	2	(2,3,5,5,4)	6	6	1	(2,4,5,2,4)	5	5	1	(2,5,5,3,4)	6	5	2
(2,3,3,4,5)	5	5	1	(2,3,5,5,5)	7	7	0	(2,4,5,2,5)	6	6	0	(2,5,5,3,5)	7	6	1
(2,3,3,4,6)	5	6	1	(2,3,5,5,6)	7	7	1	(2,4,5,2,6)	6	6	1	(2,5,5,3,6)	7	7	1
(2,3,3,5,3)	4	5	1	(2,3,6,2,3)	4	6	0	(2,4,5,3,3)	5	6	0	(2,5,5,4,3)	6	6	1
(2,3,3,5,4)	4	5	2	(2,3,6,2,4)	5	5	1	(2,4,5,3,4)	5	5	2	(2,5,5,4,4)	6	6	2
(2,3,3,5,5)	5	5	2	(2,3,6,2,5)	6	6	0	(2,4,5,3,5)	7	6	0	(2,5,5,4,5)	8	6	1
(2,3,3,5,6)	6	6	1	(2,3,6,2,6)	6	7	0	(2,4,5,3,6)	7	7	0	(2,5,5,4,6)	8	7	1
(2,3,4,2,3)	4	4	0	(2,3,6,3,3)	5	6	0	(2,4,5,4,3)	6	6	0	(2,5,5,5,3)	6	6	2
(2,3,4,2,4)	4	4	1	(2,3,6,3,4)	5	6	1	(2,4,5,4,4)	6	6	1	(2,5,5,5,4)	7	6	2
(2,3,4,2,5)	5	5	0	(2,3,6,3,5)	6	7	0	(2,4,5,4,5)	7	7	0	(2,5,5,5,5)	8	7	1
(2,3,4,2,6)	5	5	1	(2,3,6,3,6)	7	7	0	(2,4,5,4,6)	7	7	1	(2,5,5,5,6)	8	8	1
(2,3,4,3,3)	4	5	0	(2,3,6,4,3)	5	7	0	(2,4,5,5,3)	6	7	0	(2,5,6,2,3)	6	6	0
(2,3,4,3,4)	4	4	2	(2,3,6,4,4)	6	6	1	(2,4,5,5,4)	6	6	2	(2,5,6,2,4)	6	6	1

Continued

(2,3,4,3,5)	6	5	0	(2,3,6,4,5)	7	7	0	(2,4,5,5,5)	8	7	0	(2,5,6,2,5)	8	6	0
(2,3,4,3,6)	6	6	0	(2,3,6,4,6)	7	8	0	(2,4,5,5,6)	8	8	0	(2,5,6,2,6)	8	7	0
(2,3,4,4,3)	5	5	0	(2,3,6,5,3)	6	7	0	(2,4,6,2,3)	5	6	0	(2,5,6,3,3)	7	6	0
(2,3,4,4,4)	5	5	1	(2,3,6,5,4)	6	7	1	(2,4,6,2,4)	5	5	2	(2,5,6,3,4)	7	6	1
(2,3,4,4,5)	6	6	0	(2,3,6,5,5)	7	8	0	(2,4,6,2,5)	7	6	0	(2,5,6,3,5)	8	7	0
(2,3,4,4,6)	6	6	1	(2,3,6,5,6)	8	8	0	(2,4,6,2,6)	7	7	0	(2,5,6,3,6)	8	8	0
(2,3,4,5,3)	5	6	0	(2,4,4,2,3)	4	5	0	(2,4,6,3,3)	6	6	0	(2,5,6,4,3)	7	7	0
(2,3,4,5,4)	5	5	2	(2,4,4,2,4)	4	4	2	(2,4,6,3,4)	6	6	1	(2,5,6,4,4)	7	7	1
(2,3,4,5,5)	7	6	0	(2,4,4,2,5)	6	5	0	(2,4,6,3,5)	7	7	0	(2,5,6,4,5)	9	7	0
(2,3,4,5,6)	7	7	0	(2,4,4,2,6)	6	6	0	(2,4,6,3,6)	7	7	1	(2,5,6,4,6)	9	8	0
(2,3,5,2,3)	4	5	0	(2,4,4,3,3)	5	5	0	(2,4,6,4,3)	6	7	0	(2,5,6,5,3)	8	7	0
(2,3,5,2,4)	4	5	1	(2,4,4,3,4)	5	5	1	(2,4,6,4,4)	6	6	2	(2,5,6,5,4)	8	7	1
(2,3,5,2,5)	6	5	0	(2,4,4,3,5)	6	6	0	(2,4,6,4,5)	8	7	0	(2,5,6,5,5)	9	8	0
(2,3,5,2,6)	6	6	0	(2,4,4,3,6)	6	6	1	(2,4,6,4,6)	8	8	0	(2,5,6,5,6)	9	9	0
(2,6,6,2,3)	6	7	0	(3,3,4,3,3)	4	4	2	(3,4,4,4,3)	6	6	0	(3,5,5,5,3)	7	7	1
(2,6,6,2,4)	6	6	2	(3,3,4,3,4)	5	4	2	(3,4,4,4,4)	6	6	1	(3,5,5,5,4)	7	7	2
(2,6,6,2,5)	8	7	0	(3,3,4,3,5)	6	5	1	(3,4,4,4,5)	8	6	0	(3,5,5,5,5)	8	8	1
(2,6,6,2,6)	8	8	0	(3,3,4,3,6)	6	6	1	(3,4,4,4,6)	8	7	0	(3,5,5,5,6)	8	8	2
(2,6,6,3,3)	7	7	0	(3,3,4,4,3)	5	5	1	(3,4,4,5,3)	7	6	0	(4,4,4,2,3)	5	6	0
(2,6,6,3,4)	7	7	1	(3,3,4,4,4)	5	5	2	(3,4,4,5,4)	7	6	1	(4,4,4,2,4)	5	5	2
(2,6,6,3,5)	8	8	0	(3,3,4,4,5)	7	5	1	(3,4,4,5,5)	8	7	0	(4,4,4,2,5)	7	6	0
(2,6,6,3,6)	8	8	1	(3,3,4,4,6)	7	6	1	(3,4,4,5,6)	8	8	0	(4,4,4,2,6)	7	7	0
(2,6,6,4,3)	7	8	0	(3,3,4,5,3)	6	5	1	(3,4,5,2,3)	5	6	0	(4,4,4,3,3)	6	6	0
(2,6,6,4,4)	7	7	2	(3,3,4,5,4)	6	5	2	(3,4,5,2,4)	5	5	2	(4,4,4,3,4)	6	6	1
(2,6,6,4,5)	9	8	0	(3,3,4,5,5)	7	6	1	(3,4,5,2,5)	7	6	0	(4,4,4,3,5)	7	7	0
(2,6,6,4,6)	9	9	0	(3,3,4,5,6)	7	7	1	(3,4,5,2,6)	7	7	0	(4,4,4,3,6)	7	7	1
(2,6,6,5,3)	8	8	0	(3,3,5,2,3)	4	5	1	(3,4,5,3,3)	6	6	0	(4,4,4,4,3)	6	7	0
(2,6,6,5,4)	8	8	1	(3,3,5,2,4)	4	4	3	(3,4,5,3,4)	6	6	1	(4,4,4,4,4)	7	6	1
(2,6,6,5,5)	9	9	0	(3,3,5,2,5)	6	5	1	(3,4,5,3,5)	7	7	0	(4,4,4,4,5)	8	7	0
(2,6,6,5,6)	9	9	1	(3,3,5,2,6)	6	6	1	(3,4,5,3,6)	7	8	0	(4,4,4,4,6)	8	8	0
(3,3,3,2,3)	3	3	2	(3,3,5,3,3)	5	5	1	(3,4,5,4,3)	6	7	0	(4,4,4,5,3)	7	7	0
(3,3,3,2,4)	3	3	3	(3,3,5,3,4)	5	5	2	(3,4,5,4,4)	6	6	2	(4,4,4,5,4)	7	7	1
(3,3,3,2,5)	4	4	2	(3,3,5,3,5)	6	6	1	(3,4,5,4,5)	8	7	0	(4,4,4,5,5)	8	8	0
(3,3,3,2,6)	4	4	3	(3,3,5,3,6)	6	6	2	(3,4,5,4,6)	8	8	0	(4,4,4,5,6)	8	8	1
(3,3,3,3,3)	3	4	2	(3,3,5,4,3)	5	6	1	(3,4,5,5,3)	7	7	0	(4,4,5,2,3)	5	7	0
(3,3,3,3,4)	3	3	4	(3,3,5,4,4)	5	5	3	(3,4,5,5,4)	7	7	1	(4,4,5,2,4)	6	6	1

Continued

(3,3,3,3,5)	5	4	2	(3,3,5,4,5)	7	6	1	(3,4,5,5,5)	7	8	0	(4,4,5,2,5)	7	7	0
(3,3,3,3,6)	5	5	2	(3,3,5,4,6)	7	7	1	(3,4,5,5,6)	7	9	0	(4,4,5,2,6)	7	7	1
(3,3,3,4,3)	4	4	2	(3,3,5,5,3)	6	6	1	(3,5,5,2,3)	5	6	1	(4,4,5,3,3)	6	7	0
(3,3,3,4,4)	4	4	3	(3,3,5,5,4)	6	6	2	(3,5,5,2,4)	5	5	3	(4,4,5,3,4)	6	7	1
(3,3,3,4,5)	5	5	2	(3,3,5,5,5)	7	7	1	(3,5,5,2,5)	7	6	1	(4,4,5,3,5)	7	8	0
(3,3,3,4,6)	5	5	3	(3,3,5,5,6)	7	7	2	(3,5,5,2,6)	7	7	1	(4,4,5,3,6)	8	8	0
(3,3,3,5,3)	4	5	2	(3,4,4,2,3)	5	5	0	(3,5,5,3,3)	6	6	1	(4,4,5,4,3)	6	8	0
(3,3,3,5,4)	4	4	4	(3,4,4,2,4)	5	5	1	(3,5,5,3,4)	6	6	2	(4,4,5,4,4)	7	7	1
(3,3,3,5,5)	6	5	2	(3,4,4,2,5)	7	5	0	(3,5,5,3,5)	7	7	1	(4,4,5,4,5)	8	8	0
(3,3,3,5,6)	6	6	2	(3,4,4,2,6)	7	6	0	(3,5,5,3,6)	7	7	2	(4,4,5,4,6)	8	9	0
(3,3,4,2,3)	4	4	1	(3,4,4,3,3)	6	5	0	(3,5,5,4,3)	6	7	1	(4,4,5,5,3)	7	8	0
(3,3,4,2,4)	4	4	2	(3,4,4,3,4)	6	5	1	(3,5,5,4,4)	6	6	3	(4,4,5,5,4)	7	8	1
(3,3,4,2,5)	6	4	1	(3,4,4,3,5)	7	6	0	(3,5,5,4,5)	7	7	1	(4,4,5,5,5)	8	9	0
(3,3,4,2,6)	6	5	1	(3,4,4,3,6)	7	7	0	(3,5,5,4,6)	8	8	1	(4,4,5,5,6)	9	9	0
(4,5,5,2,3)	5	7	1	(4,5,5,4,3)	6	8	1	(5,5,5,2,3)	6	6	2	(5,5,5,4,3)	7	7	2
(4,5,5,2,4)	6	6	2	(4,5,5,4,4)	7	7	2	(5,5,5,2,4)	6	6	3	(5,5,5,4,4)	7	7	3
(4,5,5,2,5)	7	7	1	(4,5,5,4,5)	8	8	1	(5,5,5,2,5)	7	7	2	(5,5,5,4,5)	8	8	2
(4,5,5,2,6)	7	8	1	(4,5,5,4,6)	8	9	1	(5,5,5,2,6)	7	7	3	(5,5,5,4,6)	8	8	3
(4,5,5,3,3)	6	7	1	(4,5,5,5,3)	7	8	1	(5,5,5,3,3)	6	7	2	(5,5,5,5,3)	7	8	2
(4,5,5,3,4)	6	7	2	(4,5,5,5,4)	7	8	2	(5,5,5,3,4)	6	6	4	(5,5,5,5,4)	7	7	4
(4,5,5,3,5)	7	7	2	(4,5,5,5,5)	8	8	2	(5,5,5,3,5)	8	7	2	(5,5,5,5,5)	9	8	2
(4,5,5,3,6)	8	8	1	(4,5,5,5,6)	9	9	1	(5,5,5,3,6)	8	8	2	(5,5,5,5,6)	9	9	2

设ψ-型的三圈图G（即$G\in\beta$），三圈图G的核表示为χ_G，对每一个点$v\in\chi_G$，记$G\{v\}$为包含点v且不包含χ_G上的其他点的图G的最大连通导出子图，易知$G\{v\}$是一棵树，假如存在点$v\in\chi_G$使得点v是$G\{v\}$的匹配点，则称图G是I—型的，否则称图G是II—型的。

定理1：设三圈图$G\in\beta$，其中χ_G为图G的核。

1)若G为I-型的，且点v是$G\{v\}$的一个可匹配点则

$$p(G)=p(G\{v\})+p(G-G\{v\}),$$

$$n(G)=n(G\{v\})+n(G-G\{v\}),$$

$$\eta(G)=\eta(G\{v\})+\eta(G-G\{v\}).$$

其中$G\{v\}$是树，$G-G\{v\}$是一些双圈图，单圈图和树的并。

2) 若图G为II-型的，则

$$p(G)=p(G-\chi_G)+p(\chi_G),$$

$$n(G)=n(G-\chi_G)+n(\chi_G),$$

$$\eta(G)=\eta(G-\chi_G)+\eta(\chi_G).$$

证明：1) 若 G 是 I-型的，点 v 是 $G\{v\}$ 的可匹配点，则存在一个正整数 $k\in\{2,3,4\}$ 使得 $G=G\{v\}(v)\odot^k\left(G-G\{v\}\right)$ 成立，由引理 4 知

$$p(G)=p\left(G\{v\}\right)+p\left(G-G\{v\}\right),$$

$$n(G)=n\left(G\{v\}\right)+n\left(G-G\{v\}\right),$$

$$\eta(G)=\eta\left(G\{v\}\right)+\eta\left(G-G\{v\}\right).$$

其中 $G\{v\}$ 是树，$G-G\{v\}$ 是双圈图，单圈图和树的并。

2) 若 G 是 II-型且 G 不是 ψ -图，所以 H 有悬挂点或树，点 v 为 $G\{v\}$ 的未匹配点，由引理 5 有

$$p(G)=p\left(G\{v\}-v\right)+p\left(G-\left(G\{v\}-v\right)\right),$$

$$n(G)=n\left(G\{v\}-v\right)+n\left(G-\left(G\{v\}-v\right)\right),$$

$$\eta(G)=\eta\left(G\{v\}-v\right)+\eta\left(G-\left(G\{v\}-v\right)\right).$$

反复运用引理 1 和引理 5 有

$$p(G)=\sum_{v\in\chi_G}p\left(G\{v\}-v\right)+p\left(\chi_G\right)=p\left(G-\chi_G\right)+p\left(\chi_G\right),$$

$$n(G)=\sum_{v\in\chi_G}n\left(G\{v\}-v\right)+n\left(\chi_G\right)=n\left(G-\chi_G\right)+n\left(\chi_G\right),$$

$$\eta(G)=\sum_{v\in\chi_G}\eta\left(G\{v\}-v\right)+\eta\left(\chi_G\right)=\eta\left(G-\chi_G\right)+\eta\left(\chi_G\right).$$

从而结论得证。

文献[2]中作者提出了一个猜想：设 G 是一个图，则 $-c_3(G)\le p(G)-n(G)\le c_5(G)$.

接下来的推论验证次猜想对本文所研究的一类三圈图成立。

推论 1：设三圈图 $G\in\beta$，则

$$-c_3(G)\le p(G)-n(G)\le c_5(G).$$

证明：设 χ_G 是三圈图 G 的核，

1) 若 G 是 I-型的且点 v 是 $G\{v\}$ 的匹配点，则

$$p(G)=p\left(G\{v\}\right)+p\left(G-G\{v\}\right),$$

$$n(G)=n\left(G\{v\}\right)+n\left(G-G\{v\}\right).$$

其中 $G\{v\}$ 是树，$G-G\{v\}$ 是双圈图，单圈图和树的并，由引理 6 知对于树和双圈图，单圈图和树的并成立，从而对于三圈图 G 结论成立。

2) 若 G 为 II-型的，由定理 1 知

$$p(G)=p\left(G-\chi_G\right)+p\left(\chi_G\right),$$

$$n(G)=n\left(G-\chi_G\right)+n\left(\chi_G\right).$$

因为 $G-\chi_G$ 是森林，根据树的正负惯性指数相等，得 $p(G)-n(G)$ 等于它的核的正负惯性指数之差，由引理 7 和表 1 中所含图的正负惯性指数之差，可检验 $p\left(\chi_G\right)-n\left(\chi_G\right)$ 满足结论中的不等式，从而推论成立。

4. 结束语

本文受文献[2]、文献[10]和文献[11]研究思路的启发，在15类三圈图中选取了结构相对复杂的一类(即β)，讨论了其正负惯性指数和零度。详细数据可在本文给出的表格中查询(即表 1)。最后在前人研究的基础上，验证了图的符号差猜想对于本文所研究的这类三圈图也成立。

基金项目

国家自然科学基金(11561056, 11661066)，青海省自然科学基金(2016-ZJ-914)资助。

参考文献

[1] Cvetković, D., Doob, M. and Sachs, H. (1980) Spectra of Graphs-Theory and its Application. Academic Press, New York.

[2] Ma, H.C., Yang, W.H. and Li, S.G. (2013) Positive and Negative Inertia Index of a Graph. *Linear Algebra and its Applications*, **438**, 331-341. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.07.014

[3] Collatz, V.L. and Sinogowitz, U. ()1957 Spektren Endlicher Grafen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminarder Universitat Hamburg*, **21**, 63-77. https://doi.org/10.1007/BF02941924

[4] Graham, R.I. and Pollak, H.O. (1972) On Embedding Graphs in Squashed Cube. Gr*aph Theory and Applications*, **303**, 99-110. https://doi.org/10.1007/BFb0067362

[5] Cheng, B. and Liu, B.L. (2007) On the Nullity of Graphs. *Linear Algebra and its Applications*, **16**, 60-67. https://doi.org/10.13001/1081-3810.1182

[6] Fan, Y.Z. and Qian, K.S. (2009) On the Nullity of Bipartite Graphs. *Linear Algebra and its Applications*, **430**, 2943-2949. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.01.007

[7] Guo, J.M., Yan, W. and Yeh, Y.N. (2009) The Nullity and Matching Number of Unicyclic Graphs. *Linear Algebra and its Applications*, **431**, 1293-1301. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.04.026

[8] Fan, Y.Z., Wang, Y. and Wang, Y. (2013) A Note on the Nullity of Unicyclic Signed Graphs. *Linear Algebra and its Applications*, **438**, 1193-1200. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.08.027

[9] Yu, G.H., Feng, L.H. and Wang, Q.W. (2013) Bicyclic Graphs with Small Positive Index of Inertia. *Linear Algebra and its Applications*, **438**, 2036-2045. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.09.031

[10] 孟霞飞, 马海成, 李生刚. 两类三圈图的正负惯性指数和零度[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2013(4): 16-19.

[11] 杨陈, 马海成. 两类特殊三圈图的正负惯性指数和零度[J]. 山东大学学报(理学版), 2015(2): 32-37.