Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(9), 843-846
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.109097

三次对称群和四次对称群子群的求解

王　凯*，郭继东#

伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
Email: 3091343342@qq.com, #guojd662@163.com

收稿日期：2020年8月14日；录用日期：2020年9月7日；发布日期：2020年9月14日

摘　要

凯莱定理告诉我们研究群的重点在于研究置换群，因此对于有限群来说，对对称群的研究是必要的。本文主要利用有限群论中的一些基本定理来具体阐述对三次对称群和四次对称群子群的求解。

关键词

三次对称群，四次对称群，子群

The Solution of Subgroups of Cubic Symmetric Group and Quartic Symmetric Group

Kai Wang*, Jidong Guo#

College of Mathematics and Statics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
Email: 3091343342@qq.com, #guojd662@163.com

Received: Aug. 14th, 2020; accepted: Sep. 7th, 2020; published: Sep. 14th, 2020

Abstract

Kelley's theorem tells us that the focus of studying groups is to study permutation groups, and for finite groups, it is necessary to study symmetric groups. In this paper, some basic theorems in finite group theory are used to explain the solution of subgroups of cubic symmetric group and quartic symmetric group.

*第一作者。
#通讯作者。

文章引用: 王凯, 郭继东. 三次对称群和四次对称群子群的求解[J]. 理论数学, 2020, 10(9): 843-846.
DOI: 10.12677/pm.2020.109097

Keywords

Cubic Symmetric Group, Quartic Symmetric Group, Subgroup

1. 引言

随着现代数学的不断发展，群已成为数学中一个十分重要的基本概念，并且渗透到数学的各个分支，而对有限群的研究更是对群研究的基础。文章利用群论中的一些基本定理来较为严谨，详细地推导出两个简单的对称群 S_3 和 S_4 的子群。

2. 涉及的定理及其推论

定理 1　(Lagrange 定理)设 G 是有限群，H 是 G 的子群，则有 $|G|=[G:H]|H|$。从而 G 的子群 H 的阶是 G 的阶的因子[1]。

推论 1　设 G 是有限群，则 G 中元素的阶是群 G 的阶的因子[1]。

定理 2　有限群 G 的阶为 m(m 为正整数)，若 G 中有 m 阶元，则 G 必为 m 阶循环群。

结合定理 1 和定理 2 有以下两个推论：

推论 2　4 阶群只有两种结构。即 4 阶群要么与 4 阶循环群同构，要么与 Klein 四元数群同构，故四阶群是交换群[2]。

推论 3　6 阶群也只有两种结构。即 6 阶群要么与 6 阶循环群同构，要么与 S_3 同构[2]。

定理 3　(Sylow 定理) $|G|=p^i m$ (p 为素数，i 为正整数)，$(p,m)=1$，则对 $k\le i$ (k 为正整数)，则 G 中一定有 p^k 阶子群[3]。

定理 4　H，K 是群 G 的有限子群，则有：$|HK|=(|H||K|)/(H\cap K)$ [4]。

定理 5　H 是群 G 的子群，若 $[G:H]=2$，则 H 还是 G 的不变子群[5]。

定理 6　群 G 中的不变子群的交仍是不变子群。

定理 7　群 G 中两个不变子群的乘积还是不变子群。

3. 对 S_3 子群的求解

$S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$，其中有 1 个 1 阶元，3 个 2 阶元和 1 对互逆的 3 阶元，共 6 个元素，故 S_3 的阶数为 6。S_3 有两个平凡子群，分别是 $\{(1)\}$ 和 S_3，由 Lagrange 定理可知 S_3 的非平凡子群可能的阶数为 2 或 3。为了讨论方便不妨将 S_3 中由所有 i 阶子群组成的 j 个元素的集合记为 $\{H_{i1},H_{i2},\cdots,H_{ij}\}$，其中 i，j 均为正整数。

命题 1　S_3 有且仅有 3 个 2 阶子群和 1 个 3 阶非平凡子群。

证明：有 $|S_3|=6=2^1*3^1$，而且 $(2,3)=1$，满足 Sylow 定理条件，故可判定 S_3 中必然存在 2 阶和 3 阶非平凡子群。而 2 阶群中的元素由 Lagrange 定理可知只能是 1 阶或 2 阶元，由于幺群为 1 阶群，所以 2 阶群中必含有 2 阶元，又定理 2 知 2 阶群必为 2 阶循环群，所以 S_3 共有 3 个 2 阶子群它们分别是 $H_{21}=\{(1),(12)\}$，$H_{22}=\{(1),(13)\}$，$H_{23}=\{(1),(23)\}$。同理可得 3 阶群必为 3 阶循环群，所以 S_3 共有 1 个 3 阶子群它是 $H_{31}=\{(1),(123),(132)\}$。证毕

由上述分析可以推出 5 阶群必是 5 阶循环群，从而是交换群，在 S_3 中显然有 $(12)(13)\neq(13)(12)$，故 S_3 是非交换群，再结合推论 2 可知 S_3 是阶数最小的非交换群。

4. 对 S_4 子群的求解

$$S_4=\left\{\begin{matrix}(1),(12),(13),(14),(23),(24),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(234),\\(243),(124),(142),(134),(143),(1234),(1432),(1324),(1243),(1342),(1423)\end{matrix}\right\}$$，其中有 1 个 1 阶元，9 个 2 阶元，4 对互逆的 3 阶元，3 对互逆的 4 阶元，共 24 个元素，即 S_4 的阶数为 24。S_4 有两个平凡子群 $\{(1)\}$ 和 S_4，由 Lagrange 定理可知 S_4 的非平凡子群可能的阶数为 2, 3, 4, 6, 8, 12。为了讨论方便不妨将 S_4 中由所有 i 阶子群组成的 j 个元素的集合记为 $\{N_{i1},N_{i2},\cdots,N_{ij}\}$，其中 i，j 均为正整数。

命题 2　S_4 有且仅有 9 个 2 阶子群，4 个 3 阶子群，3 个 4 阶循环群和 4 个与 Klein 四元数群同构的 4 阶群，4 个与 S_3 同构的 6 阶群，3 个 8 阶群，这些都是非平凡子群。

证明：有 $|S_4|=24=2^3*3$，且 $(2,3)=1$，由 Sylow 定理可知 S_4 必有 2 阶，3 阶，4 阶，8 阶子群。与 S_3 相同的分析的方法可知 S_4 有 9 个 2 阶子群，即 $N_{21}=\{(1),(12)\}$，$N_{22}=\{(1),(13)\}$，$N_{23}=\{(1),(14)\}$，$N_{24}=\{(1),(23)\}$，$N_{25}=\{(1),(24)\}$，$N_{26}=\{(1),(34)\}$，$N_{27}=\{(1),(12)(34)\}$，$N_{28}=\{(1),(13)(24)\}$，$N_{29}=\{(1),(14)(23)\}$。以及 4 个 3 阶子群，分别为 $N_{31}=\{(1),(123),(132)\}$，$N_{32}=\{(1),(234),(243)\}$，$N_{33}=\{(1),(134),(143)\}$，$N_{34}=\{(1),(124),(142)\}$。

S_4 的 4 阶子群据推论 2 可知只有两种结构即 4 阶群中有 4 阶元时，则该 4 阶群与 4 阶循环群同构；4 阶群中没有 4 阶元时，该 4 阶群与 Klein 四元数群同构。经过检验，S_4 中共有 3 个 4 阶循 $N_{41}=\langle(1234)\rangle=\{(1),(13)(24),(1234),(1432)\}$，$N_{42}=\langle(1324)\rangle=\{(1),(12)(34),(1324),(1423)\}$，$N_{43}=\langle(1342)\rangle=\{(1),(14)(23),(1243),(1342)\}$；考虑与 Klein 四元数群同构的 4 阶群，由 Lagrange 定理可知，这种 4 阶群中的元素由幺元与 S_4 中的 2 阶元构成，经过检验共有 4 个分别为 $N_{44}=\{(1),(12),(34),(12)(34)\}$，$N_{45}=\{(1),(13),(24),(13)(24)\}$，$N_{46}=\{(1),(14),(23),(14)(23)\}$，$N_{47}=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$。

由推论 3 知 6 阶群只有 6 阶循环群和 S_3 这两种结构，由于 S_4 中没有 6 阶元，故 S_4 中的 6 阶群都与已知结构的 S_3 同构，经过验算，S_4 中共有 4 个 6 阶群，分别是 $N_{61}=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$，$N_{62}=\{(1),(12),(14),(24),(124),(142)\}$，$N_{63}=\{(1),(13),(14),(34),(134),(143)\}$，$N_{64}=\{(1),(23),(24),(34),(234),(243)\}$。

由 Sylow 定理可以知道 8 阶子群中至少有一个 4 阶子群，可利用已经求得的 S_4 的每个 4 阶子群中添加合适的 4 个 S_4 中的 2 阶元，这样的 8 个元素才有可能构成 S_4 的 8 阶子群；经过检验 S_4 中共有 3 个 8 阶子群，分别是 $N_{81}=\{(1),(13),(24),(13)(24),(12)(34),(14)(23),(1234),(1432)\}$，$N_{82}=\{(1),(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1324),(1423)\}$，$N_{83}=\{(1),(14),(23),(14)(23),(12)(34),(13)(24),(1234),(1342)\}$。证毕

命题 3　S_4 中有且仅有 1 个 12 阶群。

证明：经过验算得 S_4 中的全体偶置换 $A_4=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(123),(132),(134),(143),(124),(142),(234),(243)\}$ 是 S_4 的一个 12 阶子群。下面再证唯一性；不妨假设 S_4 中存在 1 个 12 阶子群 M($M\neq A_4$)，于是有定理 4 知 A_4 和 M 满足下述关系：

$|A_4M|=(|A_4||M|)/|A_4\cap M|$，且 $|A_4M|\geq 12$

根据假设得 A_4 和 M 为 S_4 中的 12 阶子群，故它们在 S_4 中的指数都是 2，根据定理 5 得 A_4 和 M 皆是 S_4 的不变子群，有定理 6 得 $A_4\cap M$ 也是 S_4 的不变子群，又定理 7 知 A_4 和 M 之积是 S_4 的不变子群，根据

推论 4 以及 Lagrange 定理得 $|A_4M|=12$ 或 24。若 $|A_4M|=12$，即可得到 $|A_4\cap M|=12$，即有 $A_4=M$，矛盾；若 $|A_4M|=24$，则 $|A_4\cap M|=6$，故由假设可推出 $A_4\cap M$ 是 A_4 的 6 阶子群，同时也是 S_4 的 6 阶子群，然而 S_4 中所有的 6 阶子群共有 4 个，而且 $|A_4\cap N_{61}|=|\{(1),(123),(132)\}|$，$|A_4\cap N_{62}|=|\{(1),(124),(142)\}|$，$|A_4\cap N_{63}|=|\{(1),(134),(143)\}|$，$|A_4\cap N_{64}|=|\{(1),(234),(243)\}|$，即 $|A_4\cap N_{61}|=|A_4\cap N_{62}|=|A_4\cap N_{63}|=|A_4\cap N_{64}|=3\neq 6$，可推出 A_4 中不存在 6 阶子群，矛盾；故假设矛盾。证毕

5. 结论

综合上述命题我们知道，S_3 有且仅有 3 个 2 阶子群和 1 个 3 阶子群，还有两个平凡子群；S_4 中有且仅有 9 个 2 阶子群，4 个 3 阶子群，3 个 4 阶循环群和 4 个与 Klein 四元数群同构的 4 阶群，4 个与 S_3 同构的 6 阶群，3 个 8 阶群和 1 个 12 阶子群，还有两个平凡子群。

致　谢

本文是在导师郭继东教授的精心指导和悉心教导下完成的，从选题到材料收集以及写作过程中遇到的问题都得到了郭老师的热心帮助，在此表示感谢。

基金项目

新疆维吾尔自治区高校科研计划自然科学重点项目(XJEDU2020I018)。

参考文献

[1] 顾沛，邓少强，编．简明抽象代数[M]．北京：高等教育出版社, 2003.

[2] 孙自行，崔方达. 4 次对称群 S4 的子群个数及其证明[J]．阜阳师范学院学报(自然科学版), 2005, 22(4): 16.

[3] 孟道骥，等编著．抽象代数. I, 代数学基础[M]．北京：科学教育出版社, 2010.

[4] 徐明耀，著．有限群论引导(上) [M]．北京：科学出版社, 1999.

[5] 王萼芳，编著．有群论基础[M]．北京：清华大学出版社, 2002.