Pure Mathematics 理论数学, 2020, 9(11), 1044-1050
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011124

复射影空间 CP^2 中辛曲面的平均曲率流

曹顺娟

浙江农林大学数学系，浙江 杭州
Email: caoshunjuan@126.com

收稿日期：2020 年 10 月 19 日；录用日期：2020 年 11 月 9 日；发布日期：2020 年 11 月 16 日

摘 要

本文主要研究复射影空间 CP^2 中辛曲面的平均曲率流，证明了若初始辛曲面满足一定的曲率积分拼挤条件，则平均曲率流将在 $[0,\infty)$ 上存在光滑解，且当 $t\to\infty$ 时光滑收敛到 CP^1。

关键词

辛曲面, 平均曲率流, 曲率积分拼挤, 光滑收敛性

The Mean Curvature Flow of Symplectic Surfaces in the Complex Projective Space CP^2

Shunjuan Cao

Department of Mathematics, Zhejiang Agriculture and Forestry University, Hangzhou Zhejiang
Email: caoshunjuan@126.com

Received: Oct. 19^{th}, 2020; accepted: Nov. 9^{th}, 2020; published: Nov. 16^{th}, 2020

文章引用: 曹顺娟. 复射影空间 CP^2 中辛曲面的平均曲率流 [J]. 理论数学, 2020, 9(11): 1044-1050.
DOI: 10.12677/pm.2020.1011124

Abstract

In this paper, we study the mean curvature flow of symplectic surfaces in the complex projective space CP^2, and prove that if the initial symplectic surface satisfies certain integral curvature pinching condition, then the mean curvature flow has a smooth solution on $[0,\infty)$, and converges to CP^1 as $t\to\infty$.

Keywords

Symplectic Surface, Mean Curvature Flow, Integral Curvature Pinching, Smooth Convergence

1. 引言

设 Σ 是 $(n+p)$-维黎曼流形 M^{n+p} 中的浸入子流形, 并设浸入映射为 $F_0:\Sigma\to M$. 以 F_0 为初值的平均曲率流是一个单参数族的浸入映射 $F:\Sigma\times[0,T)\to M$, 满足

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) &= \boldsymbol{H}(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma\times[0,T),\\ F(x,0) &= F_0(x), \qquad x\in\Sigma,\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{H}$ 表示 Σ 的平均曲率向量.

设 M 是 Kähler 曲面, ω 表示 M 上的 Kähler 形式, J 是与 ω 相容的复结构, 则 M 上的黎曼度量 $\bar g$ 可表示为 $\bar g(X,Y)=\langle X,Y\rangle=\omega(X,JY)$, 其中 X,Y 是 M 上的光滑向量场. 对 M 中的实 2 维可定向曲面 Σ, 令 g 表示其上的诱导度量, $d\mu_\Sigma$ 表示 Σ 的体积形式. Σ 在 M 中的 Kähler 角 α 定义为 $\omega|_\Sigma=\cos\alpha d\mu_\Sigma$. 如果 $\cos\alpha>0$, 则称 Σ 为辛曲面; 如果 $\cos\alpha=1$, 则称 Σ 为全纯曲线.

辛几何中一个非常有意义的问题是能否将 Kähler 曲面中的辛曲面形变为全纯曲线 [1]. 研究这个问题的一个可能的途径是用平均曲率流形变这个辛曲面, 并证明极限曲面为全纯曲线 [2] [3]. 陈 -李 -田 [3] 证明了如果辛曲面是个图, 则辛平均曲率流的长时间解存在, 且收敛到全纯曲线. 韩 -李 [4] 证明了在具有正数量曲率的 Kähler-Einstein 曲面中, 如果初始曲面充分接近于全纯曲线, 那

么辛平均曲率流长时间解存在且收敛到全纯曲线. 韩 -李 -杨 [5] 证明了复射影空间中辛曲面的平均曲率流解的长时间存在性和光滑收敛性.

定理 1 设 CP^2 是常全纯截面曲率为 $k>0$ 的复射影空间，Σ_0 是 CP^2 中的紧致无边辛曲面. 如果 Σ_0 的第二基本形式 A, 平均曲率向量 $\boldsymbol{H}$ 和 *Kähler* 角 α 满足下列条件之一:

(1) 对某个 $\lambda\in\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$, 有 $|A|^2\leqslant\lambda|\boldsymbol{H}|^2+\frac{2\lambda-1}{\lambda}k$, $\cos\alpha\geqslant\sqrt{\frac{7\lambda-3}{3\lambda}}$;

(2) 对某个 $\varepsilon\in\left(0,\frac{14}{265}\right]$, 有 $|A|^2\leqslant\frac{2}{3}|\boldsymbol{H}|^2+\frac{4}{5}k\cos\alpha$, $\cos\alpha\geqslant 1-\varepsilon$.

那么以 Σ_0 为初值的平均曲率流在 $[0,\infty)$ 上存在光滑解, 且当 $t\to\infty$ 时光滑收敛到全纯曲线 Σ_∞.

曹 -张 -赵 [6] 进一步研究了定理 1 的条件下 Σ_t 的渐近性质, 证明了下述定理.

定理 2 设 CP^2 是常全纯截面曲率为 $k>0$ 的复射影空间, Σ_0 是 CP^2 中的紧致无边辛曲面. 如果 Σ_0 满足定理 *1* 中的 *(1)* 或 *(2)*, 那么存在时刻 $\tau\geqslant 0$, 使得对 $t\in[\tau,\infty)$, 有

$$|\phi|^2\leqslant\rho_\tau e^{-\delta k(t-\tau)},$$

且极限曲面 Σ_∞ 是 CP^1. 这里 ϕ 表示 Σ_0 的无迹第二基本形式, $\rho_\tau=\sigma\max_{\Sigma_\tau}|\phi|^2$, σ,δ 是绝对正常数.

本文主要研究了曲率积分拼挤条件下 CP^2 中辛曲面的平均曲率流的光滑收敛性, 证明了下述结论。

定理 3 设 CP^2 是常全纯截面曲率为 $k>0$ 的复射影空间, Σ_0 是 CP^2 中的紧致无边辛曲面. 假设 Σ_0 的第二基本形式 A 满足 $|A|\leqslant\Lambda$, *Kähler* 角 α 满足 $\cos\alpha\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}+\delta$, 其中 Λ 与 δ 均为正常数, 那么存在仅依赖于 n,Λ,δ 的正常数 ϵ, 使得若

$$\int_{\Sigma_0}|A|^2d\mu_0<\epsilon,$$

则以 Σ_0 为初值的平均曲率流将在 $[0,\infty)$ 上存在光滑解, 且当 $t\to\infty$ 时光滑收敛到全纯曲线 CP^1.

2. 准备工作

Σ 是 Kähler 曲面 M 中的浸入曲面, $F_0:\Sigma\to M$ 为浸入映射. 令 $F:\Sigma\times[0,T)\to M$ 表示以 F_0 为初值的平均曲率流, 并记 $\Sigma_t=F_t(\Sigma)$。

约定指标范围为

$$1\leqslant A,B,C,\cdots\leqslant 4,\quad 1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant 2,\quad 3\leqslant\alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant 4.$$

选取 $\{e_i\}$, $\{e_\alpha\}$ 分别为切丛 $T\Sigma$ 和法丛 $N\Sigma$ 的局部单位正交基, 并令 $\{\omega^A\}$ 为 $\{e_A\}$ 的对偶基. 令 g_{ij} 表示 Σ_t 上的诱导度量, $d\mu_t$ 表示 Σ_t 上相应的体积形式. 令 A 和 $\boldsymbol{H}$ 分别表示 Σ_t 的第二基

本形式和平均曲率向量, 并设 $A=\sum\limits_{i,j,\alpha} h_{ij}^{\alpha}\omega^i\otimes\omega^j\otimes e_\alpha$, $\boldsymbol{H}=\sum\limits_{\alpha} H^\alpha e_\alpha$, 则有 $H^\alpha=\sum\limits_{i} h_{ii}^{\alpha}$. 我们有

引理 4 *([5]) 沿平均曲率流, 我们有*

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}=-2\sum_{\alpha}H^\alpha h_{ij}^{\alpha},\quad \frac{\partial}{\partial t}d\mu_t=-|\boldsymbol{H}|^2 d\mu_t.$$

因此有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_t}d\mu_t=-\int_{\Sigma_t}|\boldsymbol{H}|^2 d\mu_t.$$

$|A|^2$ 和 $|\boldsymbol{H}|^2$ 沿平均曲率流满足如下发展方程.

引理 5 *([5]) 沿平均曲率流, 我们有*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 \;=\;& \Delta|A|^2-2|\nabla A|^2+\sum_{\alpha,i,j,k}h_{ij}^{\alpha}(\bar R_{\alpha ijkk}+\bar R_{\alpha kikj})\\ &-4\sum_{\alpha,i,j,k,l}\bar R_{lijk}h_{lk}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}+8\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}\bar R_{\alpha\beta jk}h_{ik}^{\beta}h_{ij}^{\alpha}\\ &-4\sum_{\alpha,i,j,k,l}\bar R_{lijk}h_{lk}^{\alpha}h_{ij}^{\alpha}+8\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}\bar R_{\alpha\beta jk}h_{ik}^{\beta}h_{ij}^{\alpha}\\ &+2\sum_{\alpha,\beta,i,j}\left(\sum_k(h_{ik}^{\alpha}h_{jk}^{\beta}-h_{jk}^{\alpha}h_{ik}^{\beta})\right)^2+2\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{i,j}h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}\right)^2,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{H}|^2 \;=\; \Delta|\boldsymbol{H}|^2-2|\nabla\boldsymbol{H}|^2+2\textstyle\sum_{\alpha,\beta}\bar R_{\alpha k\beta k}H^\alpha H^\beta+2\sum_{i,j}\left(\sum_\alpha H^\alpha h_{ij}^{\alpha}\right)^2.\tag{2}$$

引理 5 中, $\bar R_{ABCD}$ 表示 M 的黎曼曲率张量, $\bar R_{ABCDE}$ 表示 $\bar R_{ABCD}$ 的一阶协变微分.

令 ω 表示 M 上的 Kähler 形式, J 表示 M 上与 ω 相容的复结构. Σ 在 M 中的 Kähler 角 α 定义为 $\omega|_\Sigma=\cos\alpha d\mu_\Sigma$. $\cos\alpha$ 满足如下发展方程.

引理 6 *([5]) 沿平均曲率流, 我们有*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\cos\alpha=\left|\overline{\nabla}J_{\Sigma_t}\right|^2\cos\alpha+\overline{R}c(Je_1,e_2)\sin^2\alpha,$$

这里 $|\overline{\nabla}J_{\Sigma_t}|^2=|h_{1k}^3-h_{2k}^4|^2+|h_{2k}^3+h_{1k}^4|^2$, $\overline{R}c$ 表示 M 的 Ricci 曲率张量.

$\overline{\nabla}J_{\Sigma_t}$ 不依赖于局部标架的选取, 且满足

$$|\overline{\nabla}J_{\Sigma_t}|^2\geqslant\frac{1}{2}|\boldsymbol{H}|^2,\quad |\nabla\cos\alpha|^2\leqslant\sin^2\alpha|\overline{\nabla}J_{\Sigma_t}|^2.\tag{3}$$

设 M 为常全纯截面曲率为 $k>0$ 的复射影空间 CP^2, 则有

$$\bar R_{ABCD}=-\frac{k}{4}[(\delta_{AD}\delta_{BC}-\delta_{BD}\delta_{AC})+(J_{AD}J_{BC}-J_{BD}J_{AC})-2J_{AB}J_{CD}].$$

因此 CP^2 是对称的 Einstein 流形, 且 Ricci 曲率张量满足 $\overline{R}c = \frac{3}{2}k\bar{g}$. 因此 $\cos\alpha$ 满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\cos\alpha = \left|\overline{\nabla} J_{\Sigma_t}\right|^2 \cos\alpha + \frac{3}{2}k\cos\alpha\sin^2\alpha. \tag{4}$$

根据极值原理, $\cos\alpha > 0$ 沿平均曲率流保持.

我们需要用到下述引理.

引理 7 *([7])* 设 Σ 是黎曼流形 M^{n+p} 中的 n 维浸入子流形. 如果 M 的单射半径满足 $\mathrm{inj}(M) \geqslant \iota_0 > 0$, 黎曼曲率张量 $|\bar{R}m| \leqslant K_0$, Σ 的第二基本形式满足 $|A| \leqslant \Lambda_0$, 那么存在仅依赖于 n 的正常数 k_0 和仅依赖于 $n, p, \iota_0, \Lambda_0, K_0$ 的正常数 r_0, 使得对任意 $P \in \Sigma$, $\rho \leqslant r_0$, 只要 $B(P,\rho) \subset \Sigma$, 就有 $\mathrm{vol}(B(P,R)) \geqslant k_0\rho^n$.

3. 定理的证明

在节中我们给出主要定理的证明.

证明 根据 (4) 和极值原理, $\cos\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} + \delta$ 在平均曲率流下是保持的. 由 (1) 和 (2), 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|A|^2 &\leqslant \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 - k|A|^2 - \frac{k}{2}(3\cos^2\alpha + 1)|A|^2 + 2k|\boldsymbol{H}|^2 \\
&\quad + 2\sum_{i,j,\alpha,\beta}\left[\sum_k (h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk} - h^\alpha_{jk}h^\beta_{ik})\right]^2 + 2\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{ij} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij}\right)^2 \\
&\leqslant \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2k|A|^2 + 3|A|^4.
\end{aligned}$$

这里我们用到了

$$\begin{aligned}
& 2\sum_{i,j,\alpha,\beta}\left(\sum_k (h^\alpha_{ik}h^\beta_{jk} - h^\alpha_{jk}h^\beta_{ik})\right)^2 + 2\sum_{\alpha,\beta}\left(\sum_{ij} h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij}\right)^2 \\
= \; & 2\sum_{\alpha,\beta} N(A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha) + 2\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(A^\alpha A^\beta)]^2 \\
\leqslant \; & 2|A|^4,
\end{aligned}$$

这可由 [8] 中的李 -李不等式得到.

由极值原理可得, 存在 $T_1 = T_1(k,\Lambda) > 0$, 使得平均曲率流的光滑解在 $[0,T_1]$ 上存在, 且对 $t \in [0,T_1]$ 有 $|A| \leqslant 2\Lambda$. 根据体积形式的发展方程，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_t}|A|^2 d\mu_t &= \int_{\Sigma_t}\left(\frac{\partial}{\partial t}|A|^2\right)d\mu_t - \int_{\Sigma_t}|A|^2|\boldsymbol{H}|^2 d\mu_t \\
&\leqslant \int_{\Sigma_t}(-2|\nabla A|^2 + 2k|A|^2 + 3|A|^4)d\mu_t \\
&\leqslant (2k + 12\Lambda^2)\int_{\Sigma_t}|A|^2 d\mu_t.
\end{aligned}$$

令 $f(t)=\int_{\Sigma_t}|A|^2d\mu_t$, 则由上式可得

$$\frac{\partial}{\partial t}f\leqslant(2k+12\Lambda^2)f.$$

根据极值原理, 有

$$f(t)\leqslant f(0)e^{(2k+12\Lambda^2)t},\quad t\in[0,T_1].$$

若 $t\in\left[0,\frac{\ln 2}{2k+12\Lambda^2}\right]$, 则 $e^{(2k+12\Lambda^2)t}\leqslant 2$. 假设 $\int_{\Sigma_0}|A|^2d\mu_0<\epsilon$, 其中 ϵ 待定. 则对 $t\in[0,T_2]$ 有

$$\int_{\Sigma_t}|A|^2d\mu_t\leqslant e^{(2k+12\Lambda^2)t}\int_{\Sigma_0}|A|^2d\mu_0\leqslant 2\epsilon,$$

其中 $T_2=\min\left\{T_1,\frac{\ln 2}{2k+12\Lambda^2}\right\}$.

由引理 7, 对任意 $t\in[0,T_2]$, 存在绝对正常数 κ 和常数 $r_0=r_0(k,\Lambda)>0$, 使得只要 $\rho\leqslant r_0$ 且 $B_t(P,\rho)\subset\Sigma_t$, 那么 $\mathrm{vol}(B_t(P,\rho))\leqslant\kappa\rho^2$.

选取 ϵ 使得 $\epsilon\leqslant r_0^4/2$. 我们可假设

$$\max_{\Sigma_t}|A|\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\bar{C}\right)(2\epsilon)^{\frac14},t\in[T_2/2,T_2],$$

其中 $\bar{C}$ 为仅依赖于 k,Λ 的正常数. 事实上, 假设在点 $x_t\in\Sigma_t$ 处 $|A|$ 取得最大值, 且 $|A|(x_t)>\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\bar{C}\right)(2\epsilon)^{\frac14}$, 那么选取 $\rho=(2\epsilon)^{\frac14}\leqslant r_0$, 有 $\bar{C}\rho=\bar{C}(2\epsilon)^{\frac14}<|A|(x_t)$. 根据对 A 的高阶导数的估计, 我们有 $\max_{\Sigma_t}|\nabla A|\leqslant\bar{C},t\in[T_2/2,T_2]$, $\bar{C}=C(k,\Lambda)$ 是仅依赖于 k,Λ 的正常数. 从而对任意点 $x\in B(x_t,\rho)$, 我们有

$$|A|(x)\geqslant|A|(x_t)-\bar{C}\rho>0.$$

由引理 7,

$$\begin{aligned}2\epsilon&\geqslant\int_{\Sigma_t}|A|^2d\mu_t\\&\geqslant\int_{B(x_t,\rho)}|A|^2d\mu_t\\&\geqslant[|A|(x_t)-\bar{C}\rho]\,\mathrm{vol}(B(x_t,\rho))\\&\geqslant[|A|(x_t)-\bar{C}\rho^2]\kappa\rho^2.\end{aligned}$$

这与 $|A|(x_t)>\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\bar{C}\right)(2\epsilon)^{\frac14}$ 矛盾. 因此 $\max_{\Sigma_t}|A|\leqslant\tilde{C}\epsilon^{\frac14},t\in[T_2/2,T_2]$, $\tilde{C}=2^{\frac14}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}+\bar{C}\right)$.

因为对 $t\in[T_2/2,T_2]$ 有 $\cos\alpha\geqslant\frac{\sqrt3}{3}+\delta$, 从而存在常数 $\lambda=\lambda(\delta)\in\left(\frac12,\frac23\right]$, 使得 $\cos\alpha\geqslant\sqrt{\frac{7\lambda-3}{3\lambda}}$. 事实上, 我们选取 $\lambda=\frac{1}{\frac73-\left(\frac{\sqrt3}{3}+\delta\right)^2}=\frac{1}{2-\frac23\sqrt3\delta+\delta^2}$ 即可得 $\sqrt{\frac{7\lambda-3}{3\lambda}}=\frac{\sqrt3}{3}+\delta$, 而且 $\sqrt{\frac{2\lambda-1}{\lambda}}$ 是仅依赖于 δ 的正常数, 我们用 $\tilde{\lambda}$ 记之. 我们选取 $\epsilon=\min\{r_0^4/2,(\tilde{\lambda}k/\tilde{C})^4\}$. 因此对 $t\in[T_2/2,T_2]$ 和 $\lambda\in\left(\frac12,\frac23\right]$, 有 $|A|^2\leqslant\lambda|\boldsymbol{H}|^2+\frac{2\lambda-1}{\lambda}k$, 且 $\cos\alpha\geqslant\sqrt{\frac{7\lambda-3}{3\lambda}}$. 从而由定理 2 和平均曲率流光滑解的唯一性可得, 初

始曲面为 Σ_0 的辛平均曲率流在 $t \in [0, \infty)$ 上存在光滑解 Σ_t, 且当时间 $t \to \infty$ 时 Σ_t 收敛到 CP^1. □

基金项目

本研究得到浙江省自然科学基金资助，项目编号: LQ16A010012!

参考文献

[1] Tian, G. (2001) Symplectic Isotopy in Four Dimension. *First International Congress of Chinese Mathematicians*, Beijing, 1998, 143-147. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 20, American Mathematical Society, Providence, RI.
https://doi.org/10.1090/amsip/020/09

[2] Chen, J. and Li, J. (2001) Mean Curvature Flow of Surface in 4-Manifolds. *Advances in Mathematics*, **163**, 287-309.
https://doi.org/10.1006/aima.2001.2008

[3] Chen, J., Li, J. and Tian, G. (2002) Two-Dimensional Graphs Moving by Mean Curvature Flow. *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, **18**, 209-224.
https://doi.org/10.1007/s101140200163

[4] Han, X. and Li, J. (2005) The Mean Curvature Flow Approach to the Symplectic Isotopy Problem. *International Mathematics Research Notices*, **26**, 1611-1620.
https://doi.org/10.1155/IMRN.2005.1611

[5] Han, X., Li, J. and Yang, L. (2013) Symplectic Mean Curvature Flow in CP^2. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **48**, 111-129.
https://doi.org/10.1007/s00526-012-0544-x

[6] Cao, S., Zhang, X. and Zhao, E. (2016) The Asymptotic Behavior of Symplectic Mean Curvature Flow with Pinched Curvatures in CP^2. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **434**, 633-637.
https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.008

[7] Han, X. and Sun, J. (2012) ε_0-Regularity for Mean Curvature Flow from Surface to Flat Riemannian Manifold. *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, **28**, 1475-1490.
https://doi.org/10.1007/s10114-012-9271-7

[8] Li, A.M. and Li, J.M. (1992) An Intrinsic Rigidity Theorem for Minimal Submanifolds in a Sphere. *Archiv der Mathematik (Basel)*, **58**, 582-594.
https://doi.org/10.1007/BF01193528