

(2 + 1)维变系数Broer-Kaup方程的精确解与局域激发

张 宁, 肖 冰

新疆师范大学, 新疆 乌鲁木齐
Email: zhangning0718@163.com

收稿日期: 2021年2月15日; 录用日期: 2021年3月16日; 发布日期: 2021年3月24日

摘 要

利用拓展的Riccati映射法对2 + 1维变系数BK方程进行了分析, 得到了包含任意函数的精确解, 通过对任意函数进行选取, 得到了相关的局域激发结构。此方法在求解其他非线性偏微分方程上也有广泛应用。

关键词

Riccati映射法, 非线性偏微分方程, 精确解, 局域激发

Exact Solution and Local Excitation of (2 + 1)-Dimensional Variable Coefficient Broer-Kaup Equation

Ning Zhang, Bing Xiao

Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
Email: zhangning0718@163.com

Received: Feb. 15th, 2021; accepted: Mar. 16th, 2021; published: Mar. 24th, 2021

Abstract

The extended Riccati mapping method is used to analyze the 2 + 1 dimensional variable coefficient Broer-Kaup equation, and the exact solution containing any function is obtained. By selecting the arbitrary function, the relevant local excitation structure is obtained. This method is also widely used in solving other nonlinear partial differential equations.

Keywords

Riccati Mapping Method, Nonlinear Partial Differential Equations, Exact Solutions, Local Excitation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在实际生活中, 很多的物理现象都可以用数学模型来描述, 这些模型往往是非线性的, 因此研究非线性偏微分方程的精确解, 以及解的相关性质是非线性理论科学的重要研究内容。近年来, 出现了很多简单有效的求解非线性系统精确解的方法, 如齐次平衡法、 $\frac{G'}{G}$ 展开法、Jacobi 椭圆函数展开法、Riccati 映射法、Tanh 展开法等[1] [2] [3]。非线性偏微分方程的精确解中含有相关变量的任意函数, 通过对任意函数的选取, 能够获得相应非线性系统的局域激发, 从而对部分物理现象做出解释。本文通过应用 Riccati 映射法, 选取一类 Riccati 方程作为辅助方程, 将原有的行波变换扩展为包含任意函数的变换, 从而获得 2 + 1 维变系数 Broer-Kaup 方程的含有任意函数的非行波精确解, 并选取合适函数, 获得局域激发结构。

考虑 2 + 1 维变系数 Broer-Kaup 方程

$$\begin{aligned} u_{yt} - \alpha(t) [u_{xy} - 2(uu_x)_y - 2v_{xx}] &= 0 \\ v_t + \alpha(t) [v_{xx} + 2(uv)_x] &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

在非线性的领域有着广泛的应用, 其中 $\alpha(t)$ 是 t 的函数。当 $\alpha(t) = 1$ 时, (1.1) 化为常系数 2 + 1 维 Broer-Kaup 方程, 当 $\alpha(t) = -1$ 时, (1.1) 化为修正的色散长水波方程, 文献[3]借助 Riccati 方程对(1.1)进行了求解, 并获得了局域激发。文献[4]利用齐次平衡法对(1.1)进行了求解, 获得了新的类孤子解, 有很多文献对 2 + 1 维变系数 Broer-Kaup 方程的精确解及局域激发进行了研究[5]-[14]。

2. 拓展的 Riccati 展开法解法概述

给定一个非线性系统

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, \dots) \quad (2.1)$$

设它的解有如下形式

$$u = \sum_{i=-n}^n a_i(x) \phi^i(q) \quad (2.2)$$

其中 q 满足

$$\phi' = \sigma + \phi^2 \quad (2.3)$$

(2.3)解的情况如下

$$\begin{aligned} \phi &= \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma} q) & \sigma > 0 \\ \phi &= -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma} q) & \sigma > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi &= -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}q) \quad \sigma < 0 \\ \phi &= -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}q) \quad \sigma < 0 \\ \phi &= -1/q \quad \sigma = 0\end{aligned}\quad (2.4)$$

其中 $x = (x_0, x_1, \dots, x_m)$, $a_i(x)$ 为待求函数, $q = q(x)$ 为任意函数, σ 为任意常数, n 根据齐次平衡法确定。将(2.2)、(2.3)代入(2.1), 合并 ϕ^i 的同类项, 并取同幂次系数为零, 得到一组关于 $a_i(x)$, $q = q(x)$ 的偏微分约束方程组, 解出 $a_i(x)$, $q = q(x)$, 代入(2.2)结合(2.4)就可以得到所求方程的精确解。

3.2 + 1 维变系数 BK 方程的精确解

为了方便求解, 对(1.1)作变换

$$v = u_y \quad (3.1)$$

将(3.1)代入(1.1)可以将(1.1)化为

$$u_{yt} + \alpha(t) \left[2(uu_x)_y + u_{xy} \right] = 0 \quad (3.2)$$

根据齐次平衡法, (3.2)有如下形式的解

$$u = f + g\phi(q) + h\phi^{-1}(q) \quad (3.3)$$

其中 f, g, h, q 是关于 (x, y, t) 的任意函数。将(3.3)、(2.3)代入(3.2), 合并 ϕ^i 的同次幂, 并取 ϕ^i 的系数为零, 得到一个关于 f, g, h, q 的偏微分方程组, 求解得

$$f = -\frac{\alpha(t)q_{xx} + q_t}{2q_x\alpha(t)}, \quad g = -q_x, \quad h = q_x\sigma \quad (3.4)$$

在求解上述偏微分方程组的过程中, 通过将(3.4)代入方程组约化发现, 约化后关于 q 的方程组有一个特解

$$q(x, y, t) = \chi(x, t) + \phi(y) \quad (3.5)$$

将(2.4)、(3.4)、(3.5)代入(3.3)并结合(3.1)得到 2 + 1 维变系数 Broer-Kaup 方程的精确解情形 1 当 $\sigma < 0$ 时

$$u_1 = -\frac{\alpha(t)\chi_{xx} + \chi_t}{2\chi_x\alpha(t)} + \chi_x \cdot \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi)) - \chi_x\sigma \cdot \left(\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi)) \right)^{-1} \quad (3.6)$$

$$v_1 = -\chi_x\sigma\phi' \left(\operatorname{sech}^2(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi)) - \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi))}{\tanh^2(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi))} \right) \quad (3.7)$$

$$u_2 = -\frac{\alpha(t)\chi_{xx} + \chi_t}{2\chi_x\alpha(t)} + \chi_x \cdot \sqrt{-\sigma} \cdot \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi)) - \chi_x\sigma \cdot \left(\sqrt{-\sigma} \cdot \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi)) \right)^{-1} \quad (3.8)$$

$$v_2 = \chi_x\sigma\phi' \left(\operatorname{csch}^2(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi)) - \frac{\operatorname{csch}^2(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi))}{\coth^2(\sqrt{-\sigma}(\chi + \phi))} \right) \quad (3.9)$$

情形 2 当 $\sigma > 0$ 时

$$u_3 = -\frac{\alpha(t)\chi_{xx} + \chi_t}{2\chi_x\alpha(t)} - \chi_x \cdot \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)) + \chi_x \sigma \cdot (\sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)))^{-1} \quad (3.10)$$

$$v_3 = -\chi_x \sigma \varphi' \left(\sec^2(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)) + \frac{\sec^2(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))}{\tan^2(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))} \right) \quad (3.11)$$

$$u_4 = -\frac{\alpha(t)\chi_{xx} + \chi_t}{2\chi_x\alpha(t)} + \chi_x \cdot \sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)) - \chi_x \sigma \cdot (\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)))^{-1} \quad (3.12)$$

$$v_4 = -\chi_x \sigma \varphi' \left(\csc^2(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)) + \frac{\csc^2(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))}{\cot^2(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))} \right) \quad (3.13)$$

情形 3 $\sigma = 0$ 时

$$u_5 = -\frac{\alpha(t)\chi_{xx} + \chi_t}{2\chi_x\alpha(t)} + \chi_x \cdot \frac{1}{\chi + \varphi} - \chi_x \sigma \cdot (\chi + \varphi) \quad (3.14)$$

$$v_5 = -\chi_x \cdot \frac{\varphi'}{(\chi + \varphi)^2} - \chi_x \sigma \cdot \varphi' \quad (3.15)$$

以上的 $\chi = \chi(x, y, t)$, $\varphi = \varphi(y)$ 。

4. 局域激发与分形结构

选取一种简单的情形

$$\chi(x, t) = -x^2 + t^2, \quad \varphi(y) = -y^2 \quad (3.16)$$

将(3.16)代入(3.7), 取 $\sigma = 1$, $t = 4$, 可以得到环孤子, 如图 1, 将(3.16)代入(3.6), 取 $\sigma = 1$, $\alpha(t) = 1$, $t = 0$ 可以得到 2dromion 解, 如图 2, 在图 2 的基础上, 依次选取 $x \in [-1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}]$, $y \in [-1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}]$ 得到图 3, $x \in [-1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-9}]$, $y \in [-1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-9}]$ 得到图 4。可以发现, 无论怎么缩小, 图 2 依旧保持规则的分形结构。

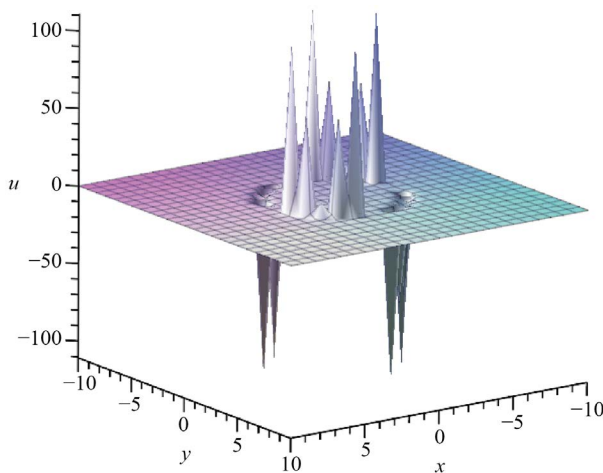


Figure 1. The ring soliton structure is obtained when $t = 4$, $\sigma = 1$

图 1. 取 $t = 4$, $\sigma = 1$ 时得到的环状孤子结构

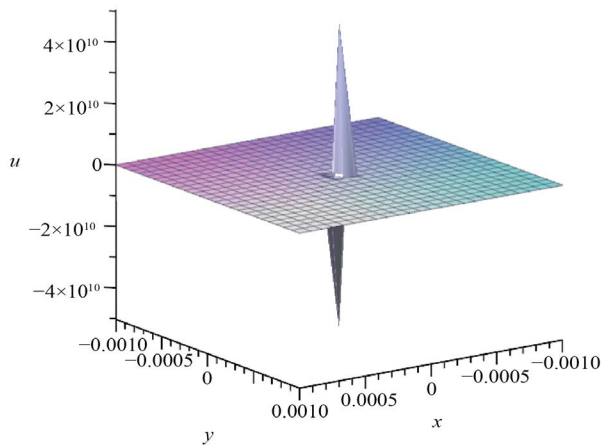


Figure 2. Take $t = 0$, $\sigma = 1$ Take to get the light and dark domion

图 2. 取 $t = 0$, $\sigma = 1$ 时得到的亮暗 domion

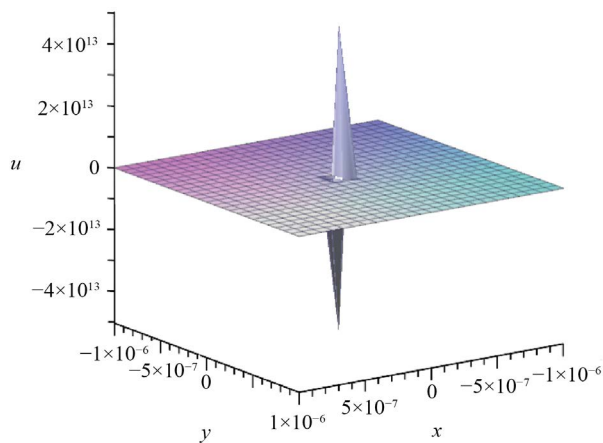


Figure 3. Figure 2 takes $x, y \in [-1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}]$

图 3. 图 2 取 $x, y \in [-1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-6}]$

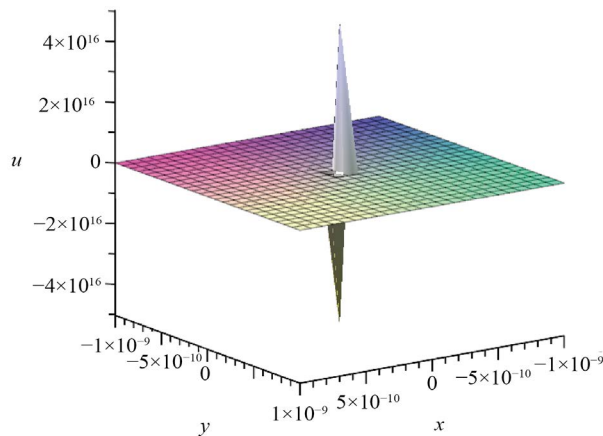


Figure 4. Figure 2 takes $x, y \in [-1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-9}]$

图 4. 图 2 取 $x, y \in [-1 \times 10^{-9}, 1 \times 10^{-9}]$

5. 结论

本文用拓展的 Riccati 映射法求解了 $2 + 1$ 维变系数 Broer-Kaup 方程, 得到了 5 组含有任意函数的精确解, 通过对任意函数的选取, 可以得到丰富的局域结构, 给出了一个简单的选取示例, 得到了环孤子结构和一种分形结构。拓展的 Riccati 映射法还可以用来求解其他的非线性偏微分方程。

参考文献

- [1] 李志斌. 非线性数学物理方程的行波解[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [2] 楼森岳, 唐晓艳. 非线性数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [3] 刘丽环, 常晶, 冯雪. 求非线性发展方程行波解的(G'/G)展开法[J]. 吉林大学学报(理学版), 2013, 51(200): 31-34.
- [4] 张楠鸽, 马松华. 变系数(2 + 1)维 Broer-Kaup 方程的复合波激发及分形结构[J]. 丽水学院学报, 2014, 36(5): 21-28.
- [5] 洪宝剑, 卢殿臣. 变系数(2 + 1)维 Broer-Kaup 方程新的类孤子解[J]. 原子与分子物理学报, 2008, 25(1): 136-140.
- [6] 郑春龙. (2 + 1)维非线性系统的局域激发模式及其分形和混沌行为研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 上海大学, 2005.
- [7] 黄文华, 卢颖. (2 + 1)维高阶 Broer-Kaup 方程的多种局域相干结构(英文) [J]. 湖州师范学院学报, 2018, 40(276): 6-11+34.
- [8] 白玉梅, 套格图桑. 变系数(2 + 1)维 Broer-Kaup 方程的无穷序列新精确解[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2015, 44(176): 28-33.
- [9] 马志民, 孙峪怀. (2 + 1)维变系数 Broer-Kaup 系统的精确解[J]. 广西科学院学报, 2013, 29(100): 14-16.
- [10] Wang, L.H. and He, J.S. (2012) Integrability and Solutions of the (2 + 1)-Dimensional Broer-Kaup Equation with Variable Coefficients. *Communications in Theoretical Physics*, **58**, 75-80. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/58/3/11>
- [11] 包来友, 包志华. 变系数(2 + 1)维 Broer-Kaup 方程的分离变量解[J]. 呼伦贝尔学院学报, 2011, 19(90): 83-85.
- [12] 刘丽红. (2 + 1)维耗散长水波方程和 Broer-Kaup 方程的显示解[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2011, 32(115): 65-68+71.
- [13] 许韬. 符号计算与若干非线性发展方程的解析研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 北京邮电大学, 2011.
- [14] 刘萍. Broer-Kaup 系统的达布变换及其偶孤子解(英文) [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2009, 31(175): 69-74.