Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(3), 323-329
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.113043

余切群胚的辛约化

戴远莉

西南交通大学，四川 成都
Email: 1055179198@qq.com

收稿日期：2021年2月11日；录用日期：2021年3月11日；发布日期：2021年3月18日

摘 要

给定李群胚$\Gamma: G \rightrightarrows M$以及Γ-空间$N$，本文考虑了余切群胚$T^*G \rightrightarrows A^*G$在余切丛$T^*N$上的辛群胚作用，并给出了辛约化的具体表示。

关键词

李群胚，辛流形，辛群胚，余切群胚，辛约化

Symplectic Reduction for Cotangent Groupoids

Yuanli Dai

Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
Email: 1055179198@qq.com

Received: Feb. 11th, 2021; accepted: Mar. 11th, 2021; published: Mar. 18th, 2021

Abstract

Given a Lie groupoid $\Gamma: G \rightrightarrows M$ and Γ-space N, this paper considers symplectic groupoid actions of the cotangent groupoid $T^*G \rightrightarrows A^*G$ on the cotangent bundle T^*N. Meanwhile, this reduction is investigated concretely.

Keywords

Lie Groupoid, Symplectic Manifold, Symplectic Groupoid, Cotangent Groupoid, Symplectic Reduction

文章引用: 戴远莉. 余切群胚的辛约化[J]. 理论数学, 2021, 11(3): 323-329.
DOI: 10.12677/pm.2021.113043

1. 引言

约化理论起源于力学发展的早期阶段，是一种古典但历久弥新的理论。由于辛几何与 Hamiltonian 力学的紧密联系，约化理论在辛几何中也得到了充分的发展，即辛约化理论。在经典辛约化理论中 G-等变的矩映射 $J: M \to (LieG)^*$ 生成 Lie 群 G 在辛流形 M 上的 Hamiltonian 作用，从而在必要的附加条件下可得到辛约化流形 $M_{red} := J^{-1}(u)/G_u$。辛约化理论起源于 Arnold [1]，Smale [2]，Meyer [3]以及 Marsden-Weinstein [4]等著名数学家的相关工作，经半个多世纪的发展，迄今仍是辛几何中的研究热点之一。

本文要考虑的余切群胚辛约化与经典辛约化理论中的两种重要情形，即余切丛辛约化和辛群胚约化，有着密切的联系。具体来说，给定李群胚 $\mathrm{I}: G \rightrightarrows M$ 以及 I-空间 N，即给定 C^∞ 流形 N 以及 $G \rightrightarrows M$ 在 N 上的作用。我们可以证明余切群胚 $T^*G \rightrightarrows A^*G$ 是李群胚。若李群胚 $G \rightrightarrows M$ 在 N 上的作用能被提升为余切群胚 $T^*G \rightrightarrows A^*G$ 在余切丛余切群胚 T^*N 上的辛作用，则由辛约化技巧[5]我们可得到新的辛流形，并将证明此约化辛流形辛同胚于某个商流形的余切丛。

2. 余切群胚

首先回顾辛群胚的定义。

定义 2.1 [6] 群胚包含两个集合 G 和 M (分别称为群胚和群胚的基)，满射 $\alpha, \beta: G \to M$ (分别称为源映射和靶映射)，映射 $1: x \mapsto 1_x, M \to G$，定义在 $G \times G$ 的子集 $G_2 = \{(h,g) \in G \times G \mid \alpha(h) = \beta(g)\}$ 上的乘法 $(h,g) \mapsto hg$，满足：

1. 对任意 $(h,g) \in G_2$，有 $\alpha(hg) = \alpha(g)$ 且 $\beta(hg) = \beta(h)$；
2. 对任意 $g,h,k \in G$，有 $(gh)k = g(hk)$，其中 $\alpha(g) = \beta(h)$ 且 $\alpha(h) = \beta(k)$；
3. 对任意 $x \in M$，$\alpha(1_x) = \beta(1_x) = x$；
4. 对任意 $g \in G$，有 $g1_{\alpha g} = g, 1_{\beta g} g = g$；
5. 对任意 $g \in G$，G 中存在逆元 g^{-1}，满足 $\alpha(g^{-1}) = \beta(g)$，$\beta(g^{-1}) = \alpha(g)$，$g^{-1}g = 1_{\alpha g}$，$gg^{-1} = 1_{\beta g}$。

定义 2.2 [6] 一个群胚 $G \rightrightarrows M$ 称为李群胚，如果 G 和 M 都是微分流形，α, β 都是浸没，并且乘法运算均为流形间的光滑映射。

定义 2.3 [6] 令 $G \rightrightarrows M$ 是一个李群胚，若在 G 上有辛结构 Ω，使得乘法图像 $u = \{(x,y,xy) \in G \times G \times G \mid (x,y) \in G_2\}$ 是乘积辛流形 $(G,\Omega)\times(G,\Omega)\times(G,-\Omega)$ 的拉格朗日子流形，则称 $G \rightrightarrows M$ 为辛群胚。

引理 2.1 [7] 设 X 为 C^∞ 流形，S 为 X 的子流形，则余法丛 N^*S 是余切丛 (T^*X, w_{can}) 的拉格朗日子流形，其中 w_{can} 为余切丛 T^*X 的典范辛形式。

给定李群胚 $G \rightrightarrows M$，以 $T^\alpha G \to G$ 表示由切映射 $T(\alpha): TG \to TM$ 诱导的向量丛，以 $1: M \to G$，$m \mapsto 1_m$ 表示单位映射。定义向量丛 $AG \to M$ 为 $T^\alpha G \to G$ 在 C^∞ 映射 $1: M \to G$ 下的拉回丛，从而对 $\forall x \in M$，纤维 $A_x G = \ker T_{1_x}(\alpha) = T_{1_x}\alpha^{-1}(x) \subset T_{1_x} G$。

定义结构映射 α, β，乘积映射 $\bullet$，单位映射 $\tilde{1}$，以及逆映射如下：

① 定义 $\tilde{\alpha}: T^*G \to A^*G, \phi \mapsto \tilde{\alpha}(\phi)$，使得对 $\forall X \in A_{\alpha g} G$，有 $\langle \tilde{\alpha}(\phi), X \rangle = \langle \phi, T(L_g)(X - T(1)aX) \rangle$。其

中 $a=a_G:AG\to TM$ 为向量丛间的丛映射使得对 $\forall x\in M$， $a_x:A_xG\to T_xM$， $X\mapsto d\beta|_{1_x}(X)$，这里 $X\in T_{1_x}G$ 满足 $d\alpha|_{1_x}(X)=0$。

② 定义 $\tilde{\beta}:T^*G\to A^*G,\phi\mapsto\tilde{\beta}(\phi)$，使得对 $\forall Y\in A_{\beta g}G$，有 $\langle\tilde{\beta}(\phi),Y\rangle=\langle\phi,T(R_g)Y\rangle$。

③ 定义乘法运算 $\bullet:T^*G\times T^*G\to T^*G$，$(\phi,\psi)\mapsto\phi\bullet\psi$。其中 $\phi\in T_g^*G,\psi\in T_h^*G$ 满足 $\tilde{\alpha}(\phi)=\tilde{\beta}(\psi)$。这里 $X\in T_gG$ 和 $Y\in T_hG$ 满足 $T(\alpha)X=T(\beta)Y$ 使得 $\langle\phi\bullet\psi,X\bullet Y\rangle=\langle\phi,X\rangle+\langle\psi,Y\rangle$。

④ 定义单位映射 $\tilde{1}:A^*G\to T^*G$，使得对 $\forall\varphi\in A_m^*G,\xi\in T_{1m}G$，有 $\langle\tilde{1}_\varphi,\xi\rangle=\langle\varphi,\xi-T(1)T(\alpha)\xi\rangle$。

⑤ 定义逆运算：$T^*G\to T^*G,\phi\mapsto\phi^{-1}$。使得对 $\forall X\in T_gG$ 有 $\langle\phi^{-1},X^{-1}\rangle=-\langle\phi,X\rangle$ (其中 $\phi\in T_g^*G,X^{-1}\in T_{g^{-1}}G$ 为 X 在逆运算 $G\to G$ 的诱导切映射 $T_gG\to T_{g^{-1}}G$ 下的像)。

定理 2.1 给定李群胚 $G\rightrightarrows M$，在上述定义的映射下，$T^*G\rightrightarrows A^*G$ 为辛群胚。称 $T^*G\rightrightarrows A^*G$ 为余切群胚。

证明：(1) 验证群胚结构：

① 任取 $\phi\in T_g^*G,\psi\in T_h^*G$，使得 $\tilde{\alpha}(\phi)=\tilde{\beta}(\psi)$，则 $\phi\bullet\psi\in T_{gh}^*G$。需说明 $\tilde{\alpha}(\phi\bullet\psi)=\tilde{\alpha}(\psi)$，$\tilde{\beta}(\phi\bullet\psi)=\tilde{\beta}(\phi)$。

事实上，$\forall X\in A_{\alpha(gh)}G=A_{\alpha(h)}G$，有

$$
\begin{aligned}
&\langle\tilde{\alpha}(\phi\bullet\psi),X\rangle\\
&=\langle\phi\bullet\psi,T(L_{gh})(X-T(1)aX)\rangle=\langle\phi\bullet\psi,0\bullet T(L_h)(X-T(1)aX)\rangle\\
&=\langle\phi,0\rangle+\langle\psi,T(L_h)(X-T(1)aX)\rangle=\langle\tilde{\alpha}(\psi),X\rangle
\end{aligned}
$$

从而 $\tilde{\alpha}(\phi\bullet\psi)=\tilde{\alpha}(\psi)$。

$\forall Y\in A_{\beta(gh)}G=A_{\beta(g)}G$，有

$$
\begin{aligned}
\langle\tilde{\beta}(\phi\bullet\psi),Y\rangle&=\langle\phi\bullet\psi,T(R_{gh})(Y)\rangle=\langle\phi\bullet\psi,T(R_g)(Y)\bullet 0\rangle\\
&=\langle\phi,T(R_g)(Y)\rangle+\langle\psi,0\rangle=\langle\tilde{\beta}(\phi),Y\rangle
\end{aligned},
$$

从而 $\tilde{\beta}(\phi\bullet\psi)=\tilde{\beta}(\phi)$。

② 任取 $\phi_1\in T_f^*G,\phi_2\in T_g^*G,\phi_3\in T_h^*G$，且满足 $\tilde{\alpha}(\phi_1)=\tilde{\beta}(\phi_2),\tilde{\alpha}(\phi_2)=\tilde{\beta}(\phi_3)$。需说明 $\phi_1\bullet(\phi_2\bullet\phi_3)=(\phi_1\bullet\phi_2)\bullet\phi_3$。

任取 $X_1\in T_fG,X_2\in T_gG,X_3\in T_hG$，且满足 $T(\alpha)X_1=T(\beta)X_2,T(\alpha)X_2=T(\beta)X_3$。从而 $T(\alpha)X_1=T(\beta)(X_2\bullet X_3),T(\alpha)(X_1\bullet X_2)=T(\beta)X_3$，从而 $X_1\bullet(X_2\bullet X_3)=(X_1\bullet X_2)\bullet X_3$。从而 $\phi_1\bullet(\phi_2\bullet\phi_3)=(\phi_1\bullet\phi_2)\bullet\phi_3$。

③ 任取 $\varphi\in A_m^*G$，需说明 $\tilde{\alpha}(1_\varphi)=\tilde{\beta}(1_\varphi)=\varphi$。

任取 $X\in A_mG\subseteq T_{1m}G$，则有

$$
\begin{aligned}
\langle\tilde{\alpha}(\tilde{1}_\varphi),X\rangle&=\langle\tilde{1}_\varphi,T(L_{1m})(X-T(1)aX)\rangle=\langle\tilde{1}_\varphi,(X-T(1)aX)\rangle\\
&=\langle\varphi,(X-T(1)aX)-T(1)T(\alpha)(X-T(1)aX)\rangle\\
&=\langle\varphi,X\rangle
\end{aligned}
\quad。
$$

另外，$\langle\tilde{\beta}(\tilde{1}_\varphi),X\rangle=\langle\tilde{1}_\varphi,T(R_{1m})(X)\rangle=\langle\tilde{1}_\varphi,X\rangle=\langle\varphi,X-T(1)T(\alpha)X\rangle=\langle\varphi,X\rangle$。

④ 任取 $\phi\in T_g^*G$，需说明 $\phi\bullet\tilde{1}_{\tilde{\alpha}(\phi)}=\phi$，$\tilde{1}_{\tilde{\beta}(\phi)}\bullet\phi=\phi$。

任取 $X\in T_gG,Y\in T_{1\alpha g}G$ 满足 $T(\alpha)X=T(\beta)Y$，

$$
\begin{aligned}
\left\langle \phi \bullet \tilde{1}_{\tilde{\alpha}(\phi)}, X \bullet Y \right\rangle &= \langle \phi, X \rangle + \left\langle \tilde{1}_{\tilde{\alpha}(\phi)}, Y \right\rangle = \langle \phi, X \rangle + \left\langle \tilde{\alpha}(\phi), Y - T(1)T(\alpha)Y \right\rangle \\
&= \langle \phi, X \rangle + \left\langle \phi, T\left(L_g\right)\left[\left(Y - T(1)T(\alpha)Y\right) - T(1)a\left(Y - T(1)T(\alpha)Y\right)\right] \right\rangle \\
&= \langle \phi, X \rangle + \left\langle \phi, T\left(L_g\right)\left[\left(Y - T(1)T(\alpha)Y\right) - T(1)T(\beta)\left(Y - T(1)T(\alpha)Y\right)\right] \right\rangle \\
&= \langle \phi, X \rangle + \left\langle \phi, T\left(L_g\right)\left(Y - T(1)T(\beta)Y\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \phi, X + T\left(L_g\right)\left(Y - T(1)T(\beta)Y\right) \right\rangle = \langle \phi, X \bullet Y \rangle
\end{aligned}
$$

任取 $X \in T_g G, Z \in T_{1_{\beta g}} G$ 满足 $T(\alpha)Z = T(\beta)X$，

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tilde{1}_{\tilde{\beta}(\phi)} \bullet \phi, Z \bullet X \right\rangle &= \left\langle \tilde{1}_{\tilde{\beta}(\phi)}, Z \right\rangle + \langle \phi, X \rangle = \left\langle \tilde{\beta}(\phi), Z - T(1)T(\alpha)Z \right\rangle + \langle \phi, X \rangle \\
&= \left\langle \phi, T\left(R_g\right)\left(Z - T(1)T(\alpha)Z\right) \right\rangle + \langle \phi, X \rangle \\
&= \left\langle \phi, T\left(R_g\right)\left(Z - T(1)T(\alpha)Z\right) + X \right\rangle = \langle \phi, Z \bullet X \rangle
\end{aligned}
$$

⑤ 任取 $\phi \in T_g^* G$，需说明 $\tilde{\alpha}\left(\phi^{-1}\right) = \tilde{\beta}(\phi)$，$\tilde{\beta}\left(\phi^{-1}\right) = \tilde{\alpha}(\phi)$，$\phi \bullet \phi^{-1} = \tilde{1}_{\tilde{\beta}(\phi)}$，$\phi^{-1} \bullet \phi = \tilde{1}_{\tilde{\alpha}(\phi)}$。

任取 $X \in A_{\alpha g^{-1}} G = A_{\beta g} G$，则

$$
\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\alpha}\left(\phi^{-1}\right), X \right\rangle &= \left\langle \phi^{-1}, T\left(L_{g^{-1}}\right)\left(X - T(1)aX\right) \right\rangle = \left\langle \phi^{-1}, T\left(L_{g^{-1}}\right)\left(-T(i)X\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \phi^{-1}, -T(i)T\left(R_g\right)X \right\rangle = \left\langle \phi, T\left(R_g\right)X \right\rangle = \left\langle \tilde{\beta}(\phi), X \right\rangle
\end{aligned}
。
$$

同理可证 $\tilde{\beta}\left(\phi^{-1}\right) = \tilde{\alpha}(\phi)$。

任取 $X \in T_g G, Y \in T_{g^{-1}} G$ 满足 $T(\alpha)X = T(\beta)Y$，$X \bullet Y \in T_{1_{\beta g}} G$。注意到 $T_{1\beta g} G$ 中的元素均可唯一表示为 $T(1)(w) + W$，其中 $w \in T_{\beta g} M, W \in A_{\beta g} G$。

由于 $w = T(\alpha)X = T(\beta)Y$，从而 $T(1)w = T(1)T(\beta)Y = Y \bullet Y^{-1}$。从而
$\left\langle \phi \bullet \phi^{-1}, T(1)w \right\rangle = \left\langle \phi \bullet \phi^{-1}, Y \bullet Y^{-1} \right\rangle = \langle \phi, Y \rangle + \left\langle \phi^{-1}, Y^{-1} \right\rangle = \langle \phi, Y \rangle - \langle \phi, Y \rangle = 0$。
$\left\langle \tilde{1}_{\tilde{\beta}(\phi)}, T(1)w \right\rangle = \left\langle \tilde{1}_{\tilde{\beta}(\phi)}, T(1)T(\alpha)X \right\rangle = 0$，故 $\left\langle \phi \bullet \phi^{-1}, T(1)w \right\rangle = \left\langle \tilde{1}_{\tilde{\beta}(\phi)}, T(1)w \right\rangle$。

以 $\tilde{0}_{g^{-1}} \in T_{g^{-1}} G$ 为切空间 $T_{g^{-1}} G$ 中的零向量，则

$$
W = \left(T\left(R_g\right)W\right) \bullet \tilde{0}_{g^{-1}}，\quad (*)
$$

若上式成立，则
$\left\langle \phi \bullet \phi^{-1}, W \right\rangle = \left\langle \phi \bullet \phi^{-1}, \left(T\left(R_g\right)\right)W \bullet \tilde{0}_{g^{-1}} \right\rangle = \left\langle \phi, \left(T\left(R_g\right)\right)W \right\rangle + \left\langle \phi^{-1}, \tilde{0}_{g^{-1}} \right\rangle = \left\langle \phi, T\left(R_g\right)W \right\rangle = \left\langle \tilde{\beta}(\phi), W \right\rangle = \left\langle 1_{\tilde{\beta}(\phi)}, W \right\rangle$。
从而 $\phi \bullet \phi^{-1} = \tilde{1}_{\tilde{\beta}(\phi)}$。同理可证 $\phi^{-1} \bullet \phi = \tilde{1}_{\tilde{\alpha}(\phi)}$。

注：由于 $W \in A_y G$，从而可取 C^∞ 曲线 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G, \varepsilon > 0$ 充分小使得 $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 有 $\gamma(0) = 1_y, \alpha(\gamma(t)) = y$ 且 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t) = W$。从而 $T\left(R_g\right)W = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} R_g\left(\gamma(t)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t) g$ 从而
$T\left(R_g\right)W \bullet \tilde{0}_{g^{-1}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} k\left(\gamma(t) g, g^{-1}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \gamma(t) = W$。

(2) 证明 $G = \left\{(g, \phi), (h, \psi), (gh, \phi \bullet \psi) \in T^*G \times T^*G \times T^*G \middle| \tilde{\alpha}(\phi) = \tilde{\beta}(\psi)\right\}$ 是辛流形 $\left(T^*G, w_0\right) \times \left(T^*G, w_0\right) \times \left(T^*G, -w_0\right)$ 的拉格朗日子流形，则 $T^*G \rightrightarrows A^*G$ 为辛群胚。

由于 $G \rightrightarrows M$ 为李群胚，从而 $S = \left\{(g, h, gh) \in G \times G \times G \middle| \alpha(g) = \beta(h)\right\}$ 是 $G \times G \times G$ 的光滑子流形，由引理 1 可知，余法丛 N^*S 是 $\left(T^*G, w_{can}\right) \times \left(T^*G, w_{can}\right) \times \left(T^*G, w_{can}\right)$ 的拉格朗日子流形。任取 $(g, h, gh) \in S$，

则余法丛 N^*S 的纤维为

$$\left\{(\phi,\psi,-\phi\bullet\psi)\in T_g^*G\times T_h^*G\times T_{gh}^*G\middle|\tilde{\alpha}(\phi)=\tilde{\beta}(\psi)\right\},$$

此纤维同构于 $\left\{(\phi,\psi,\phi\bullet\psi)\in T_g^*G\times T_h^*G\times T_{gh}^*G\middle|\tilde{\alpha}(\phi)=\tilde{\beta}(\psi)\right\}$。得证。

3. 主要结果及证明

令 $G\rightrightarrows M$ 是一个李群胚，N 是一个 C^∞ 流形，并且 $J:N\to M$ 是 C^∞ 映射。

定义 3.1 [8] 李群胚 G 在流形 N 上的带有矩映射 J 的作用是一个 C^∞ 映射 $\sigma:G\times_J N\to N$，$(g,n)\mapsto gn$，其中 $\alpha(g)=J(n)$，满足以下条件：

(1) $J(gn)=\beta(g)$；

(2) $(gh)n=g(hn)$；

(3) $1(J(n))n=n$。

定义 3.2 [8] 设 $\sigma:G\times_J N\to N$ 是李群胚 G 在辛流形 N 上的作用，如果 $G\rightrightarrows M$ 是辛群胚，并且作用的图像 $u=\left\{(g,m,gm)\in G\times N\times N\middle|\alpha(g)=J(m)\right\}$ 是乘积辛流形 $G\times N\times\bar{N}$ 的拉格朗日子流形，则称 σ 为辛群胚作用。其中 $\bar{N}$ 表示辛流形 $(N,-\Omega)$。

定理 3.1 [8] 令 (M,J) 为辛 Γ-空间，如果 u 是 J 的 clean 值，$J^{-1}(u)/\Gamma_u$ 为光滑流形使得投射 $h_u:J^{-1}(u)\to J^{-1}(u)/\Gamma_u$ 为浸没映射。那么在 $J^{-1}(u)/\Gamma_u$ 上存在一个辛结构 Ω_u 使得 $h_u^*\Omega_u=l_u^*w_M$，其中 l_u 是 $J^{-1}(u)$ 到 M 的包含映射。这里称 u 为 J 的 clean 值，是指 $J^{-1}(u)$ 为 u 的 C^∞ 子流形，并且对 $\forall m\in J^{-1}(u)$ 有 $T_mJ^{-1}(u)=\ker T_mJ$。

下面开始考虑余切群胚在余切丛上的辛作用，并具体描述辛约化过程。具体来说，假设李群胚 $G\rightrightarrows M$ 光滑作用在流形 N 上，且有矩映射 $J:N\to M$。定义映射 $J^*:T^*N\to A^*G$ 如下：任取 $(q,\phi_q)\in T^*N$，定义 $J_q^*\phi_q\in(A^*G)_{J(q)}$ 使得对 $\forall X\in(AG)_{J(q)}=T_{1_{J(q)}}\alpha^{-1}(J(q))$ 有 $\langle J_q^*\phi_q,X\rangle=\langle\phi_q,X^\#(q)\rangle$ (其中 $X^\#(q)\in T_{J(q)}N$ 为由 X 诱导的切向量：任取 $\alpha^{-1}(J(q))\subset G$ 中通过 $1_{J(q)}$ 的 C^∞ 曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\alpha^{-1}(J(q))$，$\gamma(0)=1_{J(q)}$ 使得 $\left.\frac{\mathrm{d}\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=X$，则 $X^\#(q):=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\gamma(t)q\in T_qN$)。定义 $J^*:T^*N\to A^*G$，$(q,\phi_q)\mapsto(J(q),J_q^*\phi_q)$，显然 J^* 是光滑的丛映射且使得图表

$$\begin{array}{ccc}T^*N&\to&A^*G\\ {\scriptstyle\pi_N}\downarrow&&\downarrow{\scriptstyle\pi_M}\\ N&\to&M\end{array}$$

可交换，其中 π_N,π_M 均为丛投影映射。

定理 3.2 假设余切群胚 $T^*G\rightrightarrows A^*G$ 辛作用在余切丛上 T^*N 上，且以 $J^*:T^*N\to A^*G$ 为矩映射。假设 $0_m\in A^*G$ 为 clean 值使得 $(J^*)^{-1}(0_m)/G_m$ 为 C^∞ 流形，且 $\pi_0:(J^*)^{-1}(0_m)\to(J^*)^{-1}(0_m)/G_m$ 为浸没映射，假设 m 为 clean 值使得 $(J)^{-1}(m)/G_m$ 为 C^∞ 流形，且 $\pi_J:J^{-1}(m)\to J^{-1}(m)/G_m$ 为浸没映射，则约化辛流形 $(J^*)^{-1}(0_m)/G_m$ 辛微分同胚于余切丛 $T^*(J^{-1}(m)/G_m)$。

证明：定义光滑映射 $\bar{\varphi}_0:(J^*)^{-1}(0_m)\to T^*(J^{-1}(m)/G_m)$ 使得对 $\forall v_q\in T_qJ^{-1}(m)\in T_qN$ 有 $\langle\bar{\varphi}_0(\phi_q),T_q\pi_J(v_q)\rangle:=\langle\phi_q,v_q\rangle$。下面说明与 v_q 的选取无关，如果 $v_q,v_q'\in T_qJ^{-1}(m)$ 使得 $T_q\pi_J(v_q)=T_q\pi_J(v_q')$，则 $v_q'-v_q=\ker T\pi_J(q)=T_q\pi_J^{-1}([q])$，因此 $v_q'-v_q=\xi_{G_m}^\#(q)$，其中 $\xi_{G_m}\in Lie(G_m)$。从而 $\langle\phi_q,v_q'-v_q\rangle=\langle\phi_q,\xi_{G_m}^\#(q)\rangle=0$，即 $\langle\phi_q,v_q'\rangle=\langle\phi_q,v_q\rangle$。

下面说明 $\bar{\varphi}_0$ 是 G_m-不变的。对于任意 $g\in G_m,v_q\in T_qN$ 有 $T_{g\cdot q}\pi_J(g\cdot v_q)=T_q\pi_J(v_q)$，从而 $\langle\bar{\varphi}_0(g\cdot\phi_q),T_q\pi_J(v_q)\rangle=\langle\bar{\varphi}_0(g\cdot\phi_q),T_{g\cdot q}\pi_J(g\cdot v_q)\rangle=\langle g\cdot\phi_q,g\cdot v_q\rangle=\langle\phi_q,v_q\rangle=\langle\bar{\varphi}_0(\phi_q),T_q\pi_J(v_q)\rangle$，所以对于

任意 $g\in G_m$ 及任意 $\phi_q\in\left(J^*\right)^{-1}\left(\xi^*\right)$，有 $\bar{\varphi}_0\left(g\cdot\phi_q\right)=\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right)$。

下面说明 $\bar{\varphi}_0$ 是满射。如果 $\Gamma_{[q]}\in T^*_{[q]}\left(J^{-1}(m)/G_m\right)$，其中 $[q]:=\pi_J(q)$。我们定义 $\phi_q\in\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)$ 使得 $\left\langle\phi_q,v_q\right\rangle:=\left\langle\Gamma_{[q]},T_q\pi_J\left(v_q\right)\right\rangle$，那么 $\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right)=\Gamma_{[q]}$。

从而 $\bar{\varphi}_0$ 诱导 C^∞ 满射 $\varphi_0:\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)/G_m\to J^{-1}(m)/G_m$，满足 $\varphi_0\circ\pi_0=\bar{\varphi}_0$（其中 $\pi_0:\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)\to\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)/G_m$）。

下面说明 φ_0 是单射。取 $\phi_q,\phi_q'\in\left(J^*\right)^{-1}\left(\xi^*\right)$ 满足 $\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right)=\varphi_0\left(\pi_0\left(\phi_q\right)\right)=\varphi_0\left(\pi_0\left(\phi_q'\right)\right)=\bar{\varphi}_0\left(\phi_q'\right)$。从而有 $g\in G_m$ 使得 $q'=g\cdot q$。因为 $J^*\left(g\cdot\phi_q\right)=Ad^*_{g^{-1}}J^*\left(\phi_q\right)=0$ 可知 $g\cdot\alpha_q,\alpha_{q'}\in\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)\cap T^*_{q'}N$。由于 φ_0 是 G_m-不变的，则 $\bar{\varphi}_0\left(g\cdot\phi_q\right)=\bar{\varphi}_0\left(\phi_{q'}\right)$，即对于任意 $v_{q'}\in T_{q'}N$ 有 $\left\langle g\cdot\phi_q,v_{q'}\right\rangle=\left\langle\phi_{q'},v_{q'}\right\rangle$。因此 $\phi_{q'}=g\cdot\phi_q$，从而 $\pi_0\left(\phi_{q'}\right)=\pi_0\left(\phi_q\right)$。

下面说明 φ_0 是辛映射。令 θ_{can} 为 $T^*\left(J^{-1}(m)/G_m\right)$ 的典范 1-形式，Θ_{can} 为 $T^*J^{-1}(m)$ 的典范 1-形式，$i_0:\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)\to T^*J^{-1}(m)$ 为包含映射，$\pi_0:\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)\to\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)/G_m$ 为商投影。$\pi_{J^{-1}(m)/G_m}:T^*\left(J^{-1}(m)/G_m\right)\to J^{-1}(m)/G_m$ 为余切丛投影，显然有 $\pi_{J^{-1}(m)/G_m}\circ\bar{\varphi}_0=\pi_J\circ\pi_{J^{-1}(m)}\circ i_0$。取 $\phi_q\in\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right),v\in T_{\phi_q}\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)$，则

$$
\begin{aligned}
\left\langle\left(\pi_0^*\varphi_0^*\theta_{can}\right)\left(\phi_q\right),v\right\rangle&=\left\langle\left(\bar{\varphi}_0^*\theta_{can}\right)\phi_q,v\right\rangle=\left\langle\theta_{can}\left(\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right)\right),T_{\phi_q}\bar{\varphi}_0(v)\right\rangle\\
&=\left\langle\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right),T_{\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right)}\pi_{\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)}\left(T_{\phi_q}\bar{\varphi}_0(v)\right)\right\rangle\\
&=\left\langle\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right),T_{\phi_q}\left(\pi_{\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)}\circ\bar{\varphi}_0\right)(v)\right\rangle\\
&=\left\langle\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right),T_{\phi_q}\left(\pi_J\circ\pi_{J^{-1}(m)}\circ i_0\right)(v)\right\rangle\\
&=\left\langle\bar{\varphi}_0\left(\phi_q\right),T_q\pi_J\left(T_{\phi_q}\pi_{J^{-1}(m)}(v)\right)\right\rangle\\
&=\left\langle\phi_q,T_{\phi_q}\pi_{J^{-1}(m)}(v)\right\rangle=\left\langle i_0^*\Theta\left(\phi_q\right),v\right\rangle
\end{aligned}
$$

故 $\pi_0^*\varphi_0^*\theta_{can}=i_0^*\Theta_{can}$。因此 $\pi_0^*\varphi_0^*w_{can}=i_0^*\Omega_{can}$，其中 w_{can},Ω_{can} 分别为 $T^*\left(J^{-1}(m)/G_m\right),T^*\left(J^{-1}(m)\right)$ 的典范辛形式。由辛约化定理可知，$\varphi_0^*w_{can}=\Omega_0$，其中 Ω_0 为 $\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)/G_m$ 的约化辛形式。

因此 $\varphi_0:\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)/G_m\to T^*\left(J^{-1}(m)/G_m\right)$ 为光滑辛双射。因为辛映射为浸入映射，故 φ_0 为浸入映射。由维数比较有

$$
\dim\left(J^*\right)^{-1}\left(0_m\right)/G_m=2\dim J^{-1}(m)-2\dim G_m=\dim T^*\left(J^{-1}(m)/G_m\right),
$$

故 φ_0 为局部微分同胚映射。又由于 φ_0 为双射，从而 φ_0 为微分同胚映射。

参考文献

[1] Arnold, V. (1966) Sur la gèométrie diffèrentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Annales de l'Institut Fourier*, **16**, 319-361. https://doi.org/10.5802/aif.233

[2] Smale, S. (1970) Topology and Mechanics. I. *Inventiones Mathematicae*, **10**, 305-331. https://doi.org/10.1007/BF01418778

[3] Meyer, K.R. (1973) Symmetries and Integrals in Mathematics. *Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 259-272. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50025-4

[4] Marsden, J. and Weinstein, A. (1974) Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry. *Reports on Mathematical*

Physics, **5**, 121-130. https://doi.org/10.1016/0034-4877(74)90021-4

[5] Marsden, J.E., Misiolek, G., Ortega, J.P., *et al.* (2007) Hamiltonian Reduction by Stages. Springer, New York, 1-64.

[6] Mackenzie, K.C.H. (2005) General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids. Cambridge University Press, New York. https://doi.org/10.1017/CBO9781107325883

[7] da Silva, A.C. (2008) Lectures on Symplectic Geometry. Springer, New York, 7-22. https://doi.org/10.1007/978-3-540-45330-7

[8] Mikami, K. and Weinstein, A. (1988) Moments and Reduction for Symplectic Groupoids. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **24**, 121-140. https://doi.org/10.2977/prims/1195175328