Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 694-700
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114084

Hans汉斯

涉及微分多项式分担函数的正规定则

王 晗

上海理工大学，上海
Email: 1356938164@qq.com

收稿日期：2021年3月21日；录用日期：2021年4月23日；发布日期：2021年4月30日

摘 要

本文主要讨论了涉及微分多项式分担函数的正规定则，并且得到了以下结果：设$\mathcal{F}$和$\mathcal{G}$为区域$D\subset\mathbb{C}$的两族亚纯函数，所有零点的重级至少为$k+1$，其中$k\geq 1$且为整数。设$b(z)\neq 0$在D内全纯，$a_i, i=1,2,\cdots,k-1$为有穷常数。若$\mathcal{G}$正规，对于$\mathcal{G}$中任意子列$\{g_n\}$，$g_n\Rightarrow g$，在区域D上我们有$g\not\equiv\infty$和$L(g)\not\equiv b(z)$ (其中$L(f)=f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1 f$且$L(g)=g^{(k)}+a_{k-1}g^{(k-1)}+\cdots+a_1 g$)。若对于任意$f\in\mathcal{F}$，存在$g\in\mathcal{G}$使得：1) $f(z)=0\Leftrightarrow g(z)=0$；2) $f(z)=\infty\Leftrightarrow g(z)=\infty$；3) $L(f(z))=b(z)\rightleftharpoons L(g(z))=b(z)$；则$\mathcal{F}$在D上正规。

关键词

正规族，分担函数，微分多项式

Normal Criterion of Shared Function Concerning Differential Polynomials

Han Wang

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 1356938164@qq.com

Received: Mar. 21st, 2021; accepted: Apr. 23rd, 2021; published: Apr. 30th, 2021

Abstract

In this paper, we mainly discuss a normal criterion of shared function concerning differential po-

文章引用: 王晗. 涉及微分多项式分担函数的正规定则[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 694-700.
DOI: 10.12677/pm.2021.114084

lynomials and proved: Let $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ be two families of functions meromorphic on a domain $D \subset \mathbb{C}$, all of whose zeros have multiplicity at least $k+1$, where $k \geq 1$ is an integer. Let $b(z) \neq 0$ be a holomorphic function in the domain D, and $a_i, i = 1,2,\cdots,k-1$ be finite constant. Assume also that $\mathcal{G}$ is normal, and for any subsequence $\{g_n\}$, $g_n \Rightarrow g$, we have $g \not\equiv \infty$ and $L(g) \not\equiv b(z)$ on D ($L(f) = f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + a_1 f$, $L(g) = g^{(k)} + a_{k-1}g^{(k-1)} + \cdots + a_1 g$). If for every $f \in \mathcal{F}$, there exist $g \in \mathcal{G}$ such that: 1) $f(z) = 0 \Leftrightarrow g(z) = 0$; 2) $f(z) = \infty \Leftrightarrow g(z) = \infty$; 3) $L(f(z)) = b(z) \rightleftharpoons L(g(z)) = b(z)$; Then $\mathcal{F}$ is normal on D.

Keywords

Normal Family, Shared Function, Differential Polynomials

1. 引言

设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数，若从函数族 $\mathcal{F}$ 中的每一个函数序列 $\{f_n(z)\}$ 中能够选出一个子序列 $\{f_{n_k}(z)\}$，使得 $\{f_{n_k}(z)\}$ 在 D 内按球面距离内闭一致收敛于一亚纯函数，或一致趋于∞，则称函数族 $\mathcal{F}$ 在区域 D 内正规。

设 f 和 g 是区域 D 内的两个亚纯函数，a 是一个复数，如果 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在区域 D 内有相同的零点，则称 f 和 g 在区域 D 分担 a，如果 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 在区域 D 内有相同的零点并且所有零点的重级也相同，则称 f 和 g 在区域 D 内 CM 分担 a，我们用 $f = a \Rightarrow g = a$ 来表示。

1992 年，Nevanilnna 证明了著名的五值定理。即设 f 和 g 为两个非常数亚纯函数，若 f 和 g 分担五个两两互异的值，那么这两个函数必定恒等。

对于正规族理论方面，由 Bloch 原理，刘晓俊、李三华和庞学诚[1]考虑了两族亚纯函数的分担值问题，得到了下面定理。

定理 1.1. 设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 为区域 $D \subset \mathbb{C}$ 的两族亚纯函数，a_1,a_2,a_3,a_4 为四个不同的复数，若 $\mathcal{G}$ 正规，且对于所有的 $f \in \mathcal{F}$，存在 $g \in \mathcal{G}$ 使得 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分担值 a_1,a_2,a_3,a_4，则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

在涉及分担值的正规族理论方面，1992 年，W. Schwick [2]证明了下面定理，建立了一个与分担值相关的正规定则。

定理 1.2. 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的一族亚纯函数，a_1,a_2,a_3 是三个判别的有穷复数。如果对于 $\mathcal{F}$ 中的任意函数 f，f 和 f' 在 D 内分担 a_1,a_2,a_3，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

关于两个函数间分担的情况方[3] [4]证明了下面定理。

定理 1.3. 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D \subset \mathbb{C}$ 的一族亚纯函数，其中每个函数的零点的重数至少为 $k+2$，其中 $k \geq 1$ 且为整数，设 b 是非零有穷复数，若对于 $\mathcal{F}$ 中任意两个函数 f 和 g，f 和 g 在 D 内分担 0，$f^{(k)}$ 和 $g^{(k)}$ 在 D 内分担 b，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

2013 年，刘晓俊、李三华和庞学诚[1]考虑与分担值相关的两族函数的情况并证明了下面定理。

定理 1.4. 设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 为区域 $D\subset\mathbb{C}$ 的两族亚纯函数，其中每个函数的零点的重数至少为 $k+1$，其中 $k\ge 1$ 且为整数。设 b 是非零有穷复数，若 $\mathcal{G}$ 正规，对于 $\mathcal{G}$ 中任意子列 $\{g_n\}$， $g_n\Rightarrow g$，在区域 D 上我们有 $g\not\equiv\infty$ 和 $g^{(k)}\ne b$。若对于任意 $f\in\mathcal{F}$，存在 $g\in\mathcal{G}$ 使得。

1) $f(z)=0\Leftrightarrow g(z)=0$；

2) $f(z)=\infty\Leftrightarrow g(z)=\infty$；

3) $f^{(k)}=b\rightleftharpoons g^{(k)}=b$。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

文本我们考虑将上述定理中非零有穷复数 b 换成非零的全纯函数 $b(z)$，并且将 $f^{(k)}$ 替换为 $f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f$，以及 $g^{(k)}$ 替换为 $g^{(k)}+a_{k-1}g^{(k-1)}+\cdots+a_1g$， $a_i,i=1,2,\cdots,k-1$ 为有穷常数，得到如下定理。

定理 1.5. 设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 为区域 $D\subset\mathbb{C}$ 的两族亚纯函数，所有零点的重级至少为 $k+1$，其中 $k\ge 1$ 且为整数。设 $b(z)$ 是在 D 内不为零的全纯函数，$a_i,i=1,2,\cdots,k-1$ 为有穷常数。若 $\mathcal{G}$ 正规，对于 $\mathcal{G}$ 中任意子列 $\{g_n\}$，$g_n\Rightarrow g$，在区域 D 上我们有 $g\not\equiv\infty$ 和 $L(g)\ne b(z)$（其中 $L(f)=f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1f$ 且 $L(g)=g^{(k)}+a_{k-1}g^{(k-1)}+\cdots+a_1g$）。若对于任意 $f\in\mathcal{F}$，存在 $g\in\mathcal{G}$ 使得

1) $f(z)=0\Leftrightarrow g(z)=0$；

2) $f(z)=\infty\Leftrightarrow g(z)=\infty$；

3) $L(f(z))=b(z)\rightleftharpoons L(g(z))=b(z)$。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

在给出证明之前，先介绍一些符号。本节中，D 表示 $\mathbb{C}$ 中的区域。对于 $z_0\in\mathbb{C}$ 和 $r>0$，记 $\Delta(z_0,r)=\{z:|z-z_0|<r\}$ 以及 $\Delta'(z_0,r)=\{z:0<|z-z_0|<r\}$，单位圆盘记作 Δ。

2. 相关引理

引理 2.1. [5]设 $\mathcal{F}$ 为单位圆盘上的一族亚纯函数，其中每个函数的零点的重数至少为 k，假设存在 $A\ge 1$，使得当 $f(z)=0$ 有 $\left|f^{(k)}(z)\right|\le A$。如果 $\mathcal{F}$ 在 $z_0\in D$ 处不正规，则对于任意 $0\le\alpha\le k$，存在：

1) 实数 r，$0<r<1$；

2) 一点列 $z_n:z_n\to z_0$；

3) 一函数列 $\{f_n\}:f_n\in\mathcal{F}$；

4) 一正数列 $\rho_n:\rho_n\to 0$。

使得

$$g_n(\xi)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^{\alpha}}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$，且 g 的所有零点重级至少为 k，$g^{\#}(\xi)\le g^{\#}(0)=kA+1$。此外，$g$ 的级至多是 2。

引理 2.2. [6]设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数，若球面导数 $f^{\#}(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有界，则 $f(z)$ 的级至多为 2，当 $f(z)$ 是整函数， $f(z)$ 的级至多为 1。

引理 2.3. [7]设 f 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的超越亚纯函数且级是有限的，所有零点的重数至少为 $k+1$，k 为一个正整数，则对于所有非零负数 b， $f^{(k)}-b$ 在 $\mathbb{C}$ 上有无限多个零点。

引理 2.4. [8]设 $f(z)$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯映射且级是有限的，所有零点的重数至少为 $k+1$，若在 $\mathbb{C}$ 上 $f^{(k)}\ne b$，其中 $b\ne 0\in\mathbb{C}$，则

$$f(z)=\frac{b}{k!}\frac{(z-a)^{k+1}}{z-b}$$

其中 $a,b\in\mathbb{C}$， $a\neq b$ 。

3. 定理 1.5 的证明

不失一般性，我们假设 $D=\Delta$，若存在 $z_0\in\Delta$ 使得 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规，则由引理 2.1，存在点 $z_n\to z_0$，函数 $f_n\in\mathcal{F}$，正数 $\rho_n\to 0^+$，使得在 $\mathbb{C}$ 上

$$F_n(\zeta)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)}{\rho_n^k}\Rightarrow F(\zeta)$$

其中 F 为非常值亚纯函数，其零点的重级最少为 $k+1$，由引理 2.2 知 F 的级至多为 2。

相应的，由条件可知存在 $g_n\in\mathcal{G}$，使得在 Δ 上 $g_n(z)\Rightarrow g(z)$，$g\not\equiv\infty$ 且 $g(z)$ 零点的重级最少为 $k+1$。我们分为以下三种情况讨论。

情形 1. $g(z_0)\neq 0$， $g(z_0)\neq\infty$ 。

在这种情形下，存在 z_0 的一些邻域 $U(z_0)$ 使得对每一个充分大的 n，$g_n\neq 0,\infty$ 。由条件(1)和条件(2)，我们有在邻域 $U(z_0)$ 中 $f_n\neq 0,\infty$ 。

我们断言 $F(\zeta)\neq 0,\infty$， $\zeta\in\mathbb{C}$ 。否则，存在 $\zeta_0\in\mathbb{C}$ 使得 $F(\zeta_0)=0$ 。因为 $F(\zeta)\not\equiv 0$，由 Hurwitz's 定理知，存在 $\zeta_{n,0}\to\zeta_0$ 使得 $F_n(\zeta_{n,0})=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta_{n,0})=0$ 。所以我们有 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_{n,0})=0$ 且 $z_n+\rho_n\zeta_n\to z_0$ 。矛盾，这表明在 $\mathbb{C}$ 上 $F\neq 0$ 。同理可证 $F\neq\infty$ 。

因此 F 为复平面 $\mathbb{C}$ 上的非零整函数。根据条件 $L(f)=f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_1 f$ ，我们有 $L(f_n(z_n+\rho_n\zeta))=F_n^{(k)}(\zeta)+a_{k-1}\rho_n F_n^{(k-1)}(\zeta)+\cdots+a_0\rho_n^k F_n(\zeta)$，因此 $L(f_n(z_n+\rho_n\zeta))\Rightarrow F^{(k)}(\zeta)$ 。由引理 2.3 可知 $F^{(k)}-b(z_0)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有无限多个零点。所以存在 $\eta_0\in\mathbb{C}$ 使得 $F^{(k)}(\eta_0)=b(z_0)$ 。

若 $F^{(k)}(\zeta)\equiv b(z_0)$，则 F 一定为 k 次多项式，和 $F\neq 0$ 矛盾。

因此 $F^{(k)}(\zeta)-b(z_0)\not\equiv 0$ 。由 Hurwitz's 定理知，这里存在 $\eta_n\to\eta_0$ 使得 $L(f_n(z_n+\rho_n\eta_n))-b(z_n+\rho_n\eta_n)=0$，由条件(3)我们可以得出 $L(g_n(z_n+\rho_n\eta_n))-b(z_n+\rho_n\eta_n)=0$，令 $n\to\infty$，我们得到 $L(g(z_0))-b(z_0)=0$，因为 $L(g(z))\not\equiv b(z)$，所以在邻域 $U(z_0)$ 中 $L(g_n(z))-b(z)$ 只有有限多个零点，由条件可知在邻域 $U(z_0)$ 中 $L(f(z))-b(z)$ 也只有有限多个零点，也就是说 $L(f_n(z_n+\rho_n\zeta))-b(z_n+\rho_n\eta_n)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上有有限多个零点，因此 $F^{(k)}(\zeta)-b(z_0)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上有有限多个零点，矛盾。

情形 2. $g(z_0)=0$ 。

因为 g 零点的重数至少为 $k+1$，我们有 $L(g(z_0))\neq b(z_0)$，用同样类似的方法，我们可以证得在 $\mathbb{C}$ 上

$$F^{(k)}(\zeta)\neq b(z_0)\text{。}$$

由引理 2.4

$$F(\zeta)=\frac{b(z_0)}{k!}\frac{(\zeta-\zeta_0)^{k+1}}{\zeta-\zeta_1}$$

其中 $\zeta_0\neq\zeta_1$ 为两个有限复数。则由 Hurwitz's 定理知，存在 $\zeta_{n,1}\to\zeta_1$ 使得 $F_n(\zeta_{n,1})=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta_{n,1})=\infty$ 且 $f_n(z_n+\rho_n\zeta_{n,1})=\infty$ 。由条件(2)知，我们得知 $g_n(z_n+\rho_n\zeta_{n,0})=\infty$，令 $n\to\infty$， $g(z_0)=\infty$，矛盾。

情形 3. $g(z_0)=\infty$ 。

在这种情形下，我们有 $L(g(z_0))\neq b(z_0)$ 。我们也分为两种情况讨论。

情形 3.1. $F(\zeta_0)=0$，$\zeta_0\in\mathbb{C}$。

因为在复平面$\mathbb{C}$上$F\not\equiv 0$，由Hurwitz's定理知，存在$\zeta_{n,0}\to\zeta_0$使得$F_n(\zeta_{n,0})=\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta_{n,0})=0$，而且$f_n(z_n+\rho_n\zeta_{n,0})=0$。由假设知，我们有$g_n(z_n+\rho_n\zeta_{n,0})=0$。令$n\to\infty$，我们得到$g(z_0)=0$，矛盾。

情形 3.2. 在$\mathbb{C}$上$F\neq 0$，我们同样也分为两种情况讨论。

情形 3.2.1. F为超越亚纯函数。

因为$F\neq 0$，由引理2.3可知$F^{(k)}-b(z)$在$\mathbb{C}$上有无限多个零点，因为$g(z)\not\equiv\infty$，存在$\delta>0$，使得g,g_n在圆$\{z:|z-z_0|=\delta\}$上全纯，且在该圆上$g_n^{(j)}(z)$一致收敛到$g^{(j)}(z),j=0,1,2,\cdots,k,\cdots$，则我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}\frac{\left(L(g_n(z))-b(z)\right)'}{L(g_n(z))-b(z)}\mathrm{d}z\to\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}\frac{\left(L(g(z))-b(z)\right)'}{L(g(z))-b(z)}\mathrm{d}z$$

因为上式两边均为整数，当n充分大时，我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}\frac{\left(L(g_n(z))-b(z)\right)'}{L(g_n(z))-b(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}\frac{\left(L(g(z))-b(z)\right)'}{L(g(z))-b(z)}\mathrm{d}z$$

由于$b(z)\neq 0$，则

$$\begin{aligned}&n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(g_n(z))-b(z)}\right)-n\left(\Delta(z_0,\delta),L(g_n(z))\right)\\&=n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(g(z))-b(z)}\right)-n\left(\Delta(z_0,\delta),L(g(z))\right)\end{aligned}$$

因为$g(z_0)=\infty$，$L(g(z_0))\neq b(z_0)$，对于充分小的δ，$n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(g(z))-b(z)}\right)=0$。所以

$$n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(g_n(z))-b(z)}\right)-n\left(\Delta(z_0,\delta),L(g_n(z))\right)=-n\left(\Delta(z_0,\delta),L(g(z))\right)$$

令$g(z)=\frac{h(z)}{(z-z_0)^{\tau}}$，$z\in\Delta'(z_0,\delta)$，其中$h(z)$在$\Delta(z_0,\delta)$上全纯，$h(z_0)\neq 0$，$\tau$是一个正整数。因为$g_n(z)\Rightarrow g(z)$，我们有

$$g_n(z)=\frac{h_n(z)}{(z-z_{n,1})^{\tau_{n,1}}\cdots(z-z_{n,s_n})^{\tau_{n,s_n}}}$$

其中$h_n(z)$在$\Delta(z_0,\delta)$上全纯，$h_n(z_{n,i})\neq 0$，$\tau_{n,1}\geq 1$且为整数，$i=1,2,\cdots,s_n$且$\sum_{i=1}^{s_n}\tau_{n,1}=\tau$，通过计算，我们得到

$$n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(g_n(z))-b(z)}\right)=\tau+s_nk-(\tau+k)=(s_n-1)k\leq(\tau-1)k$$

因此在$\Delta(z_0,\delta)$上，$L(g_n(z))-b(z)$只有有限多个零点，由条件知，在$\Delta(z_0,\delta)$上$L(f_n(z))-b(z)$也只有有限多个零点，则表示$L(f_n(z_n+\rho_n\zeta))-b(z_n+\rho_n\eta_n)$在复平面$\mathbb{C}$上有有限多个零点，继而可知$F^{(k)}-b(z_0)$在复平面$\mathbb{C}$上只有有限多个零点，矛盾。

情形 3.2.2. F 为有理函数。

因为 $F\neq 0$， $F(\zeta)=\frac{1}{P(\zeta)}$，其中 P 为多项式。对于任意 $z^*\in\Delta'(z_0,\delta)$，因为 $g(z_0)=\infty$ 且 $g\not\equiv\infty$，若我们假设 $g(z^*)\neq\infty$，由情形 1 及情形 2 的讨论得知，$\{f_n\}$ 在 z^* 处正规，则 $\{f_n\}$ 在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 处不正规。同样我们可以证得在 $\Delta(z_0,\delta)$ 上 $f_n\neq 0$，所以在 $\Delta'(z_0,\delta)$ 上我们有 $f_n\Rightarrow 0$ 以及 $L(f_n)$， $L(f_n')\Rightarrow 0$。则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}\frac{\left(L(f_n(z))-b(z)\right)'}{L(f_n(z))-b(z)}\mathrm{d}z\to\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\delta}\frac{\left(L(f(z))-b(z)\right)'}{L(f(z))-b(z)}\mathrm{d}z=0$$

即

$$n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(f_n(z))-b(z)}\right)-n\left(\Delta(z_0,\delta),L(f_n(z))\right)=0$$

由条件(2)和(3)，我们有

$$n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(f_n(z))-b(z)}\right)=n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(g_n(z))-b(z)}\right)$$

因为 $g_n(z)\Rightarrow g(z)$ 且 $g(z_0)=\infty$，我们假设

$$g_n(z)=\frac{h_n(z)}{(z-z_{n,1})^{\tau_{n,1}}\cdots(z-z_{n,s_n})^{\tau_{n,s_n}}}$$

其中 $h_n(z)$ 在 $\Delta(z_0,\delta)$ 上全纯， $h_n(z_{n,i})\neq 0$， $\tau_{n,1}\geq 1$ 且为整数， $i=1,2,\cdots,s_n$， 由条件(2)知， f_n 有 s_n 个单一极点 $z_{n,i}$ 且重数至少为 1。

$$n\left(\Delta(z_0,\delta),L(f_n(z))\right)\geq s_n k$$

由同样的方法，我们有

$$n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(g_n(z))-b(z)}\right)=(s_n-1)k$$

则

$$(s_n-1)k=n\left(\Delta(z_0,\delta),\frac{1}{L(f_n(z))-b(z)}\right)=n\left(\Delta(z_0,\delta),L(f_n(z))\right)\geq s_n k$$

矛盾。则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

参考文献

[1] Liu, X.J., Li, S.H. and Pang, X.C. (2012) A Normal Criterion about Two Families of Meromorphic Function Concerning Shared Values. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **29**, 151-158. https://doi.org/10.1007/s10114-012-0600-7

[2] Schwick, W. (1992) Sharing Values and Nofmality. *Archiv Der Mathematik*, **59**, 50-54.

[3] Fang, M.-L. and Zalcman, L. (2001) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions II. *Computational Methods and Function Theory*, **1**, 289-299.

[4] Fang, M.-L. and Zalcman, L. (2002) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions III. *Computational Methods and Function Theory*, **2**, 385-395. https://doi.org/10.1007/BF03321856

[5] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normal Families and Shared Values. *Bulletin of the London Mathematical Society*,

32, 325-331. https://doi.org/10.1112/S002460939900644X

[6] Clunie, J. and Hayman, W.K. (1966) The Spherical Derivative of Integral and Meromorphic Functions. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **40**, 117-148. https://doi.org/10.1007/BF02564366

[7] Bergwiler, W. and Eremenko, A.E. (1995) On the Singularities of the Inverse to a Meromerphic Function of Finite Order. *Revista Matemática Iberoamericana*, **11**, 355-373. https://doi.org/10.4171/RMI/176

[8] Wang, Y.F. and Fang, M.L. (1998) Picard Values and Normal Families of Meromerphic Function with Zeros. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **14**, 17-26. https://doi.org/10.1007/BF02563879