Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 606-611
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114074

Hans汉斯

投射余可解的Gorenstein平坦模和Gorenstein *AC*投射模

刘　欢，杨晓燕

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: 1337737547@qq.com

收稿日期：2021年3月16日；录用日期：2021年4月18日；发布日期：2021年4月26日

摘　要

本文我们给出了Gorenstein *AC*投射模的类与投射余可解的Gorenstein平坦模的类等价的条件，证明了在凝聚环R上，Gorenstein *AC*投射模的类，投射余可解的Gorenstein平坦模的类与Ding投射模的类等价。同时也给出了Gorenstein *AC*投射模的类与Gorenstein投射模的类等价的充分必要条件，证明了在任意环R上，Gorenstein *AC*投射模的类与Gorenstein投射模的类等价当且仅当Level模的类包含在Gorenstein投射模的类的右正交中。最后我们给出了Gorenstein *AC*投射模的类与Gorenstein投射模的类在凝聚环上等价的一些充分必要条件。

关键词

投射余可解的Gorenstein平坦模，Gorenstein *AC*投射模，Gorenstein投射模

Projectively Coresolved Gorenstein Flat Modules and Gorenstein *AC* Projective Modules

Huan Liu, Xiaoyan Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 1337737547@qq.com

Received: Mar. 16th, 2021; accepted: Apr. 18th, 2021; published: Apr. 26th, 2021

Abstract

In this paper, we give a condition in order for the class of Gorenstein *AC* projective modules to

文章引用: 刘欢, 杨晓燕. 投射余可解的 Gorenstein 平坦模和 Gorenstein *AC* 投射模[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 606-611.
DOI: 10.12677/pm.2021.114074

coincide with the class of projectively coresolved Gorenstein flat modules, we prove that the class of Gorenstein *AC* projective modules equal to the class of projectively coresolved Gorenstein flat modules equal to the class of Ding projective modules over coherent rings. We also give a necessary and sufficient condition in order for the class of Gorenstein *AC* projective modules to coincide with the class of Gorenstein projective modules, we prove that the class of Gorenstein *AC* projective modules to coincide with the class of Gorenstein projective modules if and only if the class of level modules belongs to the right orthogonal class with respect to Gorenstein projective modules. And we give some necessary and sufficient conditions in order for the class of Gorenstein *AC* projective modules to coincide with the class of Gorenstein projective modules over coherent rings.

Keywords

Projectively Coresolved Gorenstein Flat Module, Gorenstein *AC* Projective Module, Gorenstein Projective Module

1. 引言

近年来，相对同调代数，特别是其中的 Gorenstein 同调理论受到代数学界专家们的广泛关注。1995 年，Jenda 和 Enochs 在[1]中，作为 G-维数为 0 的模的推广，引入了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的概念；为了与平坦模对应，1993 年，Enochs，Jenda 和 Torrecillas 在[2]中定义了 Gorenstein 平坦模。Ding，Li 和 Mao 在[3]中考虑了 Gorenstein 投射模的一种特殊情况，即强 Gorenstein 投射模。因为 Ding，Li 和 Mao 在这方面的杰出工作，Gillespie 在[4] [5]中称强 Gorenstein 投射模为 Ding 投射模。

最近，Saroch 和 Stovicek 在[6]中引入了一个新的模，即投射余可解的 Gorenstein 平坦模。Iacob 在[7]中对这些模的类进行了细致的研究，证明了投射余可解的 Gorenstein 平坦模的类与 Ding 投射模的类等价当且仅当每一个 Ding 投射模是 Gorenstein 平坦模，最后证明了在凝聚环的条件下投射余可解的 Gorenstein 平坦模的类与 Ding 投射模的类等价。同时也给出了投射余可解的 Gorenstein 平坦模的类与 Gorenstein 投射模的类等价的一些充分必要条件。为了进一步刻画 Gorenstein 同调代数在一般环上的性质，Bravo，Gillespie 和 Hovey 在[8]中引入了 Level 模的概念，这是对平坦模的自然推广，继而引入了 Gorenstein *AC* 投射模。在 Noetherian 环上，Gorenstein *AC* 投射模就是 Gorenstein 投射模。在凝聚环上，Gorenstein *AC* 投射模就是 Ding 投射模。

受上述研究的启发，本文研究了 Gorenstein *AC* 投射模的类与投射余可解的 Gorenstein 平坦模的类等价以及 Gorenstein *AC* 投射模的类与 Gorenstein 投射模的类等价的一些充分必要条件。

2. 预备知识

除非特别说明，本文中所有的环 R 是结合环，所有的 R-模都是左 R-模。投射模的类，内射模的类，平坦模的类以及 Level 模的类分别用 $\mathcal{P}$、$\mathcal{I}$、$\mathcal{F}$、$\mathcal{L}$ 表示。$M(R)$ 表示 R-模范畴。对于任意 R-模的类 $\mathcal{X}$，我们记：

$$\mathcal{X}^{\perp}=\left\{Y\in M(R)\mid \operatorname{Ext}_R^1(X,Y)=0,\text{任意的}X\in\mathcal{X}\right\},$$

$$^{\perp}\mathcal{X}=\left\{Y\in M(R)\mid \operatorname{Ext}_R^1(Y,X)=0,\text{任意的}X\in\mathcal{X}\right\}。$$

定义 2.1 1) 称 R-模 F 是超有限表示模，如果 R-模 F 有一个投射分解

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to F \to 0$$

其中 P_i 是有限生成的。

2) 称 R-模 L 是 Level 模，如果对任意的超有限表示模 F，有 $\mathrm{Tor}_1^R(F,L)=0$ 。

3) 称 R-模 A 是绝对 clean 模，如果对任意的超有限表示模 F，有 $\mathrm{Ext}_R^1(F,A)=0$ 。

定义 2.2 考虑投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}:\cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$$

其中 $M \cong \mathrm{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$。

1) 若对任意的投射 R-模 Q，有 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},Q)$ 正合，则称 R-模 M 是 Gorenstein 投射模。用 $\mathcal{GP}$ 表示 Gorenstein 投射模的类。

2) 若对任意的平坦 R-模 F，有 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},F)$ 正合，则称 R-模 M 是 Ding 投射模。用 $\mathcal{DP}$ 表示 Ding 投射模的类。

3) 若对任意的 Level R-模 L，有 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},L)$ 正合，则称 R-模 M 是 Gorenstein AC 投射模。用 $\mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}$ 表示 Gorenstein AC 投射模的类。

4) 若对任意的内射右 R-模 I，有 $I\otimes_R \mathbb{P}$ 正合，则称 R-模 M 是投射余可解的 Gorenstein 平坦模。用 $\mathcal{PGF}$ 表示投射余可解的 Gorenstein 平坦模的类。

定义 2.3 称 R-模 M 是 Gorenstein 平坦模，如果存在平坦 R-模的正合列

$$\mathbb{F}:\cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots$$

其中 $M \cong \mathrm{Ker}\left(F^0 \to F^1\right)$，使得对任意的内射右 R-模 I，有 $I\otimes_R \mathbb{F}$ 正合。用 $\mathcal{GF}$ 表示 Gorenstein 平坦模的类。

定义 2.4 称 R-模 M 是强 Gorenstein 投射模，如果存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}:\cdots \to P \to P \to P \to P \to \cdots$$

其中 $M \cong \mathrm{Ker}(P \to P)$，使得对任意的投射 R-模 Q，有 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},Q)$ 正合。

注记 由定义可知，$\mathcal{GP}_{\mathrm{ac}} \subseteq \mathcal{DP} \subseteq \mathcal{GP}$，$\mathcal{PGF} \subseteq \mathcal{GF}$ 。

3. 主要结果

命题 3.1 设 R 是任意环。则下列条件等价：

1) $\mathcal{GP}_{\mathrm{ac}} \subseteq \mathcal{GF}$ 。

2) 对任意的 R-模 $M \in \mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}$，有 $M^+ \in \mathcal{GI}$ 。

3) $\mathcal{I}^+ \subseteq \mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}^{\perp}$ 。

证明 1) $\Longrightarrow$ 2) 设 $M \in \mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}$。因为 $\mathcal{GP}_{\mathrm{ac}} \subseteq \mathcal{GF}$，所以 M 是 Gorenstein 平坦的，从而由([9]，定理 3.6)知，$M^+ \in \mathcal{GI}$ 。

2) $\Longrightarrow$ 1) 设 $M \in \mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}$。则存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}:\cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots$$

其中 $M \cong \mathrm{Ker}(P_{-1} \to P_{-2})$，$Z_j\mathbb{P} = \mathrm{Ker}\left(P_j \to P_{j-1}\right) \in \mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}$ 且对任意的 Level R-模 L，有 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},L)$ 正合。所以有内射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}^+:\cdots \to P_{-1}^+ \to P_0^+ \to P_1^+ \to P_2^+ \to \cdots$$

又由假设知 $Z_j\mathbb{P}^+ \in \mathcal{GI}$，所以对任意的内射右 R-模 I，有 $\mathrm{Hom}_R\left(I,\mathbb{P}^+\right)$ 正合。由伴随同构知 $\mathrm{Hom}_R\left(I,\mathbb{P}^+\right) \cong \left(I\otimes_R \mathbb{P}\right)^+$，所以 $\left(I\otimes_R \mathbb{P}\right)^+ = \mathrm{Hom}_R\left(I\otimes_R \mathbb{P},Q/Z\right)$ 正合。又因为 Q/Z 是忠实内射的，所以

$I\otimes_R\mathbb{P}$ 正合，因此 $M\in\mathcal{GF}$。

2) $\Longrightarrow$ 3) 设 $M\in\mathcal{GP}_{\text{ac}}$。则 $M^+\in\mathcal{GI}$。从而对任意的内射右 R-模 I，有

$$\text{Ext}_R^1\left(M,I^+\right)\cong\text{Ext}_R^1\left(I,M^+\right)=0,$$

所以 $\mathcal{I}^+\subseteq\mathcal{GP}_{\text{ac}}^{\perp}$。

3) $\Longrightarrow$ 2) 设 $M\in\mathcal{GP}_{\text{ac}}$。则存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}:\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-2}\to\cdots$$

其中 $M\cong\text{Ker}\left(P_{-1}\to P_{-2}\right)$ 且有 $Z_j\mathbb{P}=\text{Ker}\left(P_j\to P_{j-1}\right)\in\mathcal{GP}_{\text{ac}}$。因为 $\mathcal{I}^+\subseteq\mathcal{GP}_{\text{ac}}^{\perp}$，所以对任意的内射右 R-模 I，有 $\text{Ext}_R^1\left(Z_j\mathbb{P},I^+\right)=0$。因此对任意的内射右 R-模 I，有 $\text{Ext}_R^1\left(I,Z_j\mathbb{P}^+\right)=0$。故对任意的内射右 R-模 I，$\text{Hom}_R\left(I,\mathbb{P}^+\right)$ 正合且 $\mathbb{P}^+$ 是内射模的正合列。从而证得 $M^+\in\mathcal{GI}$。

下面我们讨论 $\mathcal{GP}_{\text{ac}}=\mathcal{GP}$ 的条件。

引理 3.2 在任意环 R 上，$\mathcal{GP}_{\text{ac}}\subseteq\mathcal{PGF}$。

证明 设 $M\in\mathcal{GP}_{\text{ac}}$。则存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$$

其中 $M\cong\text{Ker}\left(P^0\to P^1\right)$ 且对任意的 Level R-模 L，有 $\text{Hom}_R\left(\mathbb{P},L\right)$ 正合。由([10]，命题 2.7)知，对任意的绝对 clean 右 R-模 A，有 $A\otimes_R\mathbb{P}$ 正合。又因为内射 R-模一定是绝对 clean R-模，所以对任意的内射右 R-模 I，有 $I\otimes_R\mathbb{P}$ 正合。因此 $M\in\mathcal{PGF}$。

定理 3.3 若 R 是凝聚环，则 $\mathcal{GP}_{\text{ac}}=\mathcal{DP}=\mathcal{PGF}$。

证明 由定义知，$\mathcal{GP}_{\text{ac}}\subseteq\mathcal{DP}$。设 $M\in\mathcal{DP}$。则存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$$

其中 $M\cong\text{Ker}\left(P^0\to P^1\right)$ 且对任意的平坦 R-模 F，有 $\text{Hom}_R\left(\mathbb{P},F\right)$ 正合。又因为 R 是凝聚环。由([8]，推论 2.11)知，Level R-模是平坦 R-模，所以对任意的 Level R-模 L，有 $\text{Hom}_R\left(\mathbb{P},L\right)$ 正合。因此 $M\in\mathcal{GP}_{\text{ac}}$。故 $\mathcal{GP}_{\text{ac}}=\mathcal{DP}$。又由引理 3.2 和([7]，推论 1)知，$\mathcal{GP}_{\text{ac}}\subseteq\mathcal{PGF}$，$\mathcal{PGF}\subseteq\mathcal{DP}$。因此 $\mathcal{GP}_{\text{ac}}=\mathcal{DP}=\mathcal{PGF}$。

命题 3.4 $\mathcal{GP}_{\text{ac}}=\mathcal{GP}$ 当且仅当 $\mathcal{L}\in\mathcal{GP}^{\perp}$。

证明 必要性：由定义知，$\mathcal{L}\subseteq\mathcal{GP}_{\text{ac}}^{\perp}$，而 $\mathcal{GP}_{\text{ac}}=\mathcal{GP}$，所以 $\mathcal{L}\in\mathcal{GP}^{\perp}$。

充分性：由定义知，$\mathcal{GP}_{\text{ac}}\subseteq\mathcal{GP}$。设 $M\in\mathcal{GP}$。则存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}:\cdots\to P_1\to P_0\to P_{-1}\to P_{-2}\to\cdots$$

其中 $\text{M}\cong\text{Ker}\left(P_{-1}\to P_{-2}\right)$ 且有 $Z_j\mathbb{P}=\text{Ker}\left(P_j\to P_{j-1}\right)\in\mathcal{GP}$。因为 $\mathcal{L}\in\mathcal{GP}^{\perp}$，所以对任意的 Level R-模 L，有 $\text{Ext}_R^1\left(Z_j\mathbb{P},L\right)=0$。因此对任意的 Level R-模 L，$\text{Hom}_R\left(\mathbb{P},L\right)$ 正合。故 $M\in\mathcal{GP}_{\text{ac}}$。

推论 3.5 设 R 是凝聚环。则 $\mathcal{PGF}=\mathcal{GP}$ 当且仅当 $\mathcal{L}\in\mathcal{GP}^{\perp}$。

证明 必要性：由定理 3.3 知，$\mathcal{PGF}=\mathcal{GP}_{\text{ac}}$。因为 $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{GP}_{\text{ac}}^{\perp}$，所以 $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{PGF}^{\perp}$。又因为 $\mathcal{PGF}=\mathcal{GP}$，所以 $\mathcal{L}\in\mathcal{GP}^{\perp}$。

充分性：因为 R 是凝聚环，所以由定理 3.3 知，$\mathcal{GP}_{\text{ac}}=\mathcal{DP}=\mathcal{PGF}$。又因为 $\mathcal{L}\in\mathcal{GP}^{\perp}$，所以由命题 3.4，得 $\mathcal{PGF}=\mathcal{GP}$。

定理 3.6 设 R 是凝聚环。则下列条件等价：

1) $\mathcal{GP}\subseteq\mathcal{GF}$。

2) $\mathcal{GP}_{\text{ac}}=\mathcal{GP}$。

3) 对任意的 R-模 $M\in\mathcal{GP}$，有 $M^+\in\mathcal{GI}$。

4) $\mathcal{I}^{+} \subseteq \mathcal{GP}^{\perp}$。

证明 2) $\Longrightarrow$ 1) 因为 $\mathcal{GP}_{\text{ac}} \subseteq \mathcal{PGF} \subseteq \mathcal{GF}$，而 $\mathcal{GP}_{\text{ac}} = \mathcal{GP}$，所以 $\mathcal{GP} \subseteq \mathcal{GF}$。

1) $\Longrightarrow$ 2) 由定义知，$\mathcal{GP}_{\text{ac}} \subseteq \mathcal{GP}$。下证 $\mathcal{GP} \subseteq \mathcal{GP}_{\text{ac}}$。设 M 是强 Gorenstein 投射模。则存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}: \cdots \to P \to P \to P \to P \to \cdots$$

其中 $M \cong \text{Ker}(P \to P)$。由假设知，$M \in \mathcal{GF}$，所以对任意的内射右 R-模 I，有 $\text{Tor}_1^R(A, M) = 0$。又因为有短正合列 $\mathbb{T}: 0 \to M \to P \to M \to 0$，所以对任意的内射右 R-模 A，有正合列

$$0 = \text{Tor}_1^R(A, M) \to A \otimes_R M \to A \otimes_R P \to A \otimes_R M \to 0$$

所以 $A \otimes_R \mathbb{P}$ 正合。因此 $M \in \mathcal{PGF}$。设 $M' \in \mathcal{GP}$。因为 M' 是强 Gorenstien 投射模的直和项且投射余可解的 Gorenstien 平坦模的类关于直和项封闭，所以 $M' \in \mathcal{PGF}$。又因为 R 是凝聚环，由定理 3.3 知，$\mathcal{GP}_{\text{ac}} = \mathcal{PGF}$，所以 $M' \in \mathcal{GP}_{\text{ac}}$。

1) $\Leftrightarrow$ 3) 由([11]，定理 2.2)可得。

3) $\Longrightarrow$ 4) 设 $M \in \mathcal{GP}$。因为 $M^{+} \in \mathcal{GI}$，所以对任意的内射右 R-模 I，有 $\text{Ext}_R^1(I, M^{+}) = 0$。又因为 $\text{Ext}_R^1(M, I^{+}) \cong \text{Ext}_R^1(I, M^{+})$，所以 $\mathcal{I}^{+} \subseteq \mathcal{GP}^{\perp}$。

4) $\Longrightarrow$ 3) 设 $M \in \mathcal{GP}$。则存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P}: \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots$$

其中 $M_j = Z_j\mathbb{P} = \text{Ker}(P_j \to P_{j-1}) \in \mathcal{GP}$。从而有正合列

$$\mathbb{P}^{+}: \cdots \to P_{-1}^{+} \to P_0^{+} \to P_1^{+} \to P_2^{+} \to \cdots$$

且 $M_j^{+} = Z_j\mathbb{P}^{+}$。因为 $\mathcal{I}^{+} \subseteq \mathcal{GP}^{\perp}$，所以对任意的内射右 R-模 I，有 $\text{Ext}_R^1(I, M_j^{+}) \cong \text{Ext}_R^1(M_j, I^{+}) = 0$。因此 $\text{Hom}_R(I, \mathbb{P}^{+})$ 正合。故 $M^{+} \in \mathcal{GI}$。

下面我们讨论模的 Gorenstein AC 投射预覆盖的存在性。

引理 3.7 设 R 是凝聚环。若 $M \in \mathcal{GF}$，则存在特殊的 Gorenstein AC 投射预覆盖 $0 \to A \to B \to M \to 0$，其中 $A \in \mathcal{F}$。

证明 因为由([12]，定理 2.13)知，$(\mathcal{PGF}, \mathcal{PGF}^{\perp})$ 是完全的余挠对，所以存在短正合列

$$0 \to A \to B \to M \to 0$$

其中 $A \in \mathcal{PGF}^{\perp}$，$B \in \mathcal{PGF}$。又因为 $M \in \mathcal{GF}$ 且 $B \in \mathcal{PGF} \subseteq \mathcal{GF}$，所以 $A \in \mathcal{GF}$。因此 $A \in \mathcal{GF} \cap \mathcal{PGF}^{\perp}$。由([6]，定理 4.11)知，$\mathcal{GF} \cap \mathcal{PGF}^{\perp} = \mathcal{F}$。又因为 R 是凝聚环，所以对上述短正合列，由定理 3.3 知，$A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{DP}^{\perp} \subseteq \mathcal{GP}_{\text{ac}}^{\perp}$ 且 $B \in \mathcal{PGF} = \mathcal{GP}_{\text{ac}}$。从而得 $B \to M$ 是 M 的一个特殊的 Gorenstein AC 投射预覆盖。

设 R 是环。我们记

$$\text{Gfd} = \inf\{n \mid \text{存在正合列} 0 \to G_n \to \cdots \to G_0 \to M \to 0, \text{其中} G_i \in \mathcal{GF}, 0 \le i \le n\}$$

且称之为 R-模 M 的 Gorenstein 平坦维数。

命题 3.8 设 R 是凝聚环。则每一个 Gorenstein 平坦维数有限的模都有一个特殊的 Gorenstein AC 投射预覆盖。

证明 设 M 的 Gorenstein 平坦维数有限。则由([9]，引理 3.17)知，存在短正合列

$$0 \to D \to T \to M \to 0$$

其中 $T \in \mathcal{GF}$ 且 D 的平坦维数有限。对 T，由引理 3.7 知，T 有一个特殊的 Gorenstein AC 投射预覆盖，即存在正合列

$$0 \to A \to B \to T \to 0$$

其中 $A \in \mathcal{F}$ 且 $B \in \mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}$。从而有拉回图

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

所以 $0 \to X \to B \to M \to 0$ 正合，其中 $B \in \mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}$。又因为 D 的平坦维数有限且 $A \in \mathcal{F}$，所以 X 的平坦维数有限。因此 $X \subseteq \mathcal{GP}_{\mathrm{ac}}^{\perp}$。故 $B \to M$ 是 M 的一个特殊的 Gorenstein AC 投射预覆盖。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761060)。

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Gorenstein Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Enochs, E.E., Jenda, O.M.G. and Torrecillas, B. (1993) Gorenstein Flat Modules. *Annals of Mathematics*, *Nanjing University*, **10**, 1-9.

[3] Ding, N., Li, Y. and Mao, L. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/S1446788708000761

[4] Gillespie, J. (2010) Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings. *Homology*, *Homotopy and Applications*, **12**, 61-73. https://doi.org/10.4310/HHA.2010.v12.n1.a6

[5] Gillespie, J. (2015) On Ding Injective, Ding Projective, and Ding Flat Modules and Complexes. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **47**, 2641-2673.

[6] Saroch, J. and Stovícek, J. (2020) Singular Compactness and Definability for Σ-Cotorsion and Gorenstein Modules. *Selecta Mathematica*, **26**, 23-63. https://doi.org/10.1007/s00029-020-0543-2

[7] Iacob, A. (2020) Projectively Coresolved Gorenstein Flat and Ding Projective Modules. *Communications in Algebra*, **48**, 2883-2893. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1723612

[8] Bravo, D., Gillespie, J. and Hovey, M. (2014) The Stable Module Category of a General Ring. *Mathematics*, arxiv: 1210.0196.

[9] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[10] Gillespie, J. (2018) Gorenstein AC-Projective Complexes. *Journal of Homotopy and Related Structures*, **13**, 769-791. https://doi.org/10.1007/s40062-018-0203-9

[11] Emmanouil, I. (2012) On the Finiteness of Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Algebra*, **372**, 376-396. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.09.018

[12] Estrada, S., Iacob, A. and Pérez, M. (2017) Model Structures and Relative Gorenstein Flat Modules and Chain Complexes. *Contemporary Mathematics*, arxiv: 1709.00658.