Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(4), 586-598
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.114072

Hans汉斯

关于一类($p(u),q(u)$)-Laplacian问题

李燕茹

上海理工大学理学院，上海
Email: 603759951@qq.com

收稿日期：2021年3月14日；录用日期：2021年4月16日；发布日期：2021年4月23日

摘　要

本文在$\left(p(u),q(u)\right)$为局部的情况下考虑下列变量指数椭圆方程的存在性：

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u\right)-div\left(|\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u\right)=f(x), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

其中$\Omega\subset\mathbb{R}^d\ (d\geq 2)$是一个光滑有界区域，$f(x)$是给定的函数并且$p,q:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$为变指数函数，利用了扰动技术及不动点定理证明$\left(p(u),q(u)\right)$-Laplacian方程在$\left(p(u),q(u)\right)$为局部的情况下弱解的存在性。

关键词

$\left(p(u),q(u)\right)$-Laplacian，存在性，唯一性

On a Class of ($p(u),q(u)$)-Laplacian Problem

Yanru Li

College of Sciences, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: 603759951@qq.com

Received: Mar. 14th, 2021; accepted: Apr. 16th, 2021; published: Apr. 23rd, 2021

Abstract

In this paper, we consider the existence of the following variable exponent elliptic problem when $\left(p(u),q(u)\right)$ is a local quantity:

文章引用: 李燕茹. 关于一类($p(u),q(u)$)-Laplacian 问题[J]. 理论数学, 2021, 11(4): 586-598.
DOI: 10.12677/pm.2021.114072

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u\right)-div\left(|\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u\right)=f(x), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega\subset\mathbb{R}^d\ (d\geq 2)$ is a smooth bounded domain, $f(x)$ is a given data, $p,q:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$ are exponent functions. We obtain the existence of weak solution of $(p(u),q(u))$-Laplacian, $(p(u),q(u))$ is a local quantity by means of singular perturbation technique and Schauder fixed point theorem.

Keywords

$(p(u),q(u))$-Laplacian, Existence, Uniqueness

1. 绪论现状

1.1. 研究背景及现状

非线性偏微分方程的研究在很早之前就已经得到了广大学者的关注。特别是在数学、物理、化学等学术领域中，非线性偏微分问题得到了广泛的应用。近些年来，关于$(p(x),q(x))$-Laplacian 问题解的存在性、唯一性和正则性结果已经得到了大量完整的结论[1] [2] [3]。如今，$p(u)$-Laplacian 问题在处理一些全变分图像恢复问题、数学图像处理和计算视觉等方面有了进一步的深入研究[4] [5] [6]。这些变量指数椭圆问题的解决，对数学学科以后的发展具有很大的影响。

本文将在学者的基础上，深入探究$(p(u),q(u))$-Laplacian 问题在局部、非局部情况下解的存在性，可以说$(p(u),q(u))$-Laplacian 为$(p(x),q(x))$-Laplacian 问题的自然拓展，考虑了一种新的变化图像能够去噪的模型。

近些年来，变量指数椭圆问题吸引了广大学者的关注。2010 年，Andreianov、Bendahmane 等[7]研究了下列典型问题

$$\begin{cases} u-div\left(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u\right)=f(x), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

得到了方程(1.1)弱解的存在性。进一步，为了在$L^1(\Omega)$中使得相关的解是保序且收缩的。2019 年，Chipot、Oliverira [8]考虑了如下方程

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u\right)=f(x), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中$\Omega\subset\mathbb{R}^d\ (d\geq 2)$是一个光滑有界区域，$f(x)$是给定的函数并且$p,q:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$为变量指数函数，用小扰动的方法证明了弱解的存在性。方程(1.2)的提出源于 Zhikov [9]介绍的$p(x)$-Laplacian 方程的拓展。在过去的二十年里，人们对这一领域的兴趣主要来源于建模应用[10] [11]，例如热流体或电流变流体和图像复原[12]。

2019 年，Chipot、Oliverira [8]研究了非局部情形下的方程

$$\begin{cases} -div\left(\left|\nabla u\right|^{p(b(u))-2}\nabla u\right)=f(x), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $f(x)$ 为给定的函数， $p:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$， $b:W_0^{1,\alpha}(\Omega)\to\mathbb{R}$ 为非线性指数的函数，这里 $1<\alpha<\infty$。在这种情况下，给出映射 b 的一些合适的例子，例如 $b(u)=\|\nabla u\|_\alpha$ 或者对于 $q\le\alpha^*$ 且 $\frac{1}{\alpha^*}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{d}$，$b(u)=\|u\|_q$。通过 Schauder 不动点定理研究了其弱解的存在性问题。

1.2. 预备知识

这一部分介绍本文用到的数学符号和基础知识。

变指数函数 p 由弱解 u 决定，而 u 最终取决于变量 x。p 可以写成可变指数 $h(x)$： $h(x)=q(u(x))$。这可以促使我们在指数可变的 Sobolev 空间中寻找方程的解。在过去的 20 年。函数空间的数学理论发展得如此之快，以至于现在可以用这个理论来分析原方程。因此我们可利用具有可变指数的 Lebesgue 空间及 Sobolev 空间的性质来解决问题[2] [10] [11]。符号“ $\longrightarrow$ ”和“ $\xrightarrow{w}$ ”分别表示在相应空间中强收敛和弱收敛。

令 $\varsigma(\Omega)$ 表示所有 Lebesgue 可测函数 $h:=\Omega\to[1,\infty)$ 的集合，并定义：

$$h_-:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}h(x),\quad h_+:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}h(x)$$

其中 $h\in\varsigma(\Omega)$。定义 $L^{h(x)}(\Omega)$ 为所有 Lebesgue 可测函数 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 的空间且满足，

$$\rho_{h(x)}(u):=\int_\Omega|u(x)|^{h(x)}\,\mathrm{d}x<\infty$$

其对应 Luxembourg 范数为 $\|u\|_{h(x)}:=\inf\left\{\lambda>0:\rho_{h(x)}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\le1\right\}$， $L^{h(x)}(\Omega)$ 为巴拿赫空间。

若对任意的 h_-,h_+ 满足

$$1\le h_-\le h_+<\infty \tag{1.4}$$

则 $L^{h(x)}(\Omega)$ 是可分的，且 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^{h(x)}(\Omega)$ 中稠密。同时， $L^\infty(\Omega)\cap L^{h(x)}(\Omega)$ 在 $L^{h(x)}(\Omega)$ 中也稠密。若对任意的 h_-,h_+ 满足

$$1<h_-\le h_+<\infty, \tag{1.5}$$

则 $L^{h(x)}(\Omega)$ 是自反的。在方程(1.5)成立的情况下，定义 $L^{h'(x)}(\Omega)$ 为 $L^{h(x)}(\Omega)$ 的对偶空间，其中 $h'(x)$ 为 $h(x)$ 的 Holder 共轭，且两者满足 $\frac{1}{h(x)}+\frac{1}{h'(x)}=1$。

从 h_-,h_+ 的定义及方程(1.5)中，我们可以得到

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}h'(x)\le\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}h(x)\le(h_-)'<\infty,$$

同时，从 $L^{h(x)}(\Omega)$ 空间及其范数的定义可知，若方程(1.5)成立，则满足

$$\min\left\{\|u\|_{h(x)}^{h_-},\|u\|_{h(x)}^{h_+}\right\}\le\rho_{h(\cdot)}(u)\le\max\left\{\|u\|_{h(x)}^{h_-},\|u\|_{h(x)}^{h_+}\right\},$$

$$\min\left\{\rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h_-}},\rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h_+}}\right\}\le\|u\|_{h(x)}\le\max\left\{\rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h_-}},\rho_{h(x)}(u)^{\frac{1}{h_+}}\right\},$$

同时，利用这两个方程，我们可以得到

$$\|u\|_{h(x)}^{h_-}-1\le\rho_{h(x)}(u)\le\|u\|_{h(x)}^{h_+}+1,\tag{1.6}$$

Young 不等式：对任意的 $u\in L^{h(x)}(\Omega)$， $v\in L^{h'(x)}(\Omega)$ 及正常数 $C(\delta)$，任意的 $\delta>0$ 都有

$$|uv|\le\delta\frac{|u|^{h(x)}}{h(x)}+C(\delta)\frac{|v|^{h'(x)}}{h'(x)},$$

Holder 不等式：对任意的 $u\in L^{h(x)}(\Omega)$， $v\in L^{h'(x)}(\Omega)$，都有

$$\int_\Omega uv\mathrm{d}x\le\left(\frac{1}{h_-}+\frac{1}{h_+}\right)\|u\|_{h(x)}\|v\|_{h'(x)}\le 2\|u\|_{h(x)}\|v\|_{h'(x)}\tag{1.7}$$

同时，若方程(1.7)成立，则对 h 满足方程(1.4)且对有界区域 Ω，都有 $L^{h(x)}(\Omega)$ 连续嵌入到 $L^{r(\cdot)}(\Omega)$ 中，其中 $h(x)\ge r(x)$ 对几乎处处的 $x\in\Omega$ 都成立。

假设对任意的 $i\in\{1,\cdots,d\}$ 都有弱导数 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$，定义空间

$$W^{1,h(x)}(\Omega):=\left\{u\in L^{h(x)}(\Omega):\nabla u\in L^{h(x)}(\Omega)\right\},$$

其对应范数 $\|u\|_{1,h(x)}:=\|u\|_{h(x)}+\|\nabla u\|_{h(x)}$。

若方程(1.4)成立，则 $W^{1,h(x)}(\Omega)$ 可分；若方程(1.5)成立，则 $W^{1,h(x)}(\Omega)$ 自反，同时当 $h(x)\ge r(x)$ 对几乎处处的 $x\in\Omega$，都有 $W^{1,h(x)}(\Omega)$ 连续嵌入到 $W^{1,r(x)}(\Omega)$ 成立。定义空间 $W_0^{1,h(x)}(\Omega):=\left\{u\in W_0^{1,1}(\Omega):\nabla u\in L^{h(x)}(\Omega)\right\}$，其对应范数为 $\|u\|_{W_0^{1,h(x)}(\Omega)}:=\|u\|_1+\|\nabla u\|_{h(x)}$，若 $h\in C(\bar{\Omega})$，则 $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ 的范数等价于 $\|\nabla u\|_{h(x)}$。

不同于经典 Sobolev 空间，在空间 $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ 中，光滑函数不一定是稠密的。故定义 $H_0^{1,h(x)}(\Omega)$ 为范数 $\|u\|_{1,h(x)}:=\|u\|_{h(x)}+\|\nabla u\|_{h(x)}$ 定义下 $C_0^\infty(\Omega)$ 的闭包，且满足 $H_0^{1,h(x)}(\Omega)\subsetneq W_0^{1,h(x)}(\Omega)$。

若 Ω 为有界区域，$\partial\Omega$ 为 Lipschitz 连续，且 h 满足局部 Holder 连续，则 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ 中稠密。

局部 Holder 连续：若满足

$$\exists C>0:|h(x)-h(y)|\le\frac{C}{\ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right)}\quad\forall x,y\in\Omega,\ |x-y|<\frac{1}{2}\tag{1.8}$$

则 h 为局部 Holder 连续。也就是

$$|h(x)-h(y)|\le\omega(|x-y|)\quad\forall x,y\in\Omega,$$

其中 $\omega:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 且定义为 $\omega(t):=\frac{C}{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}$ 对 $t<\frac{1}{2}$ 为连续递增的函数，使得 $\lim_{t\to0^+}\omega(t)=0$。若方程(1.8)成立，则 $H_0^{1,h(x)}(\Omega)=W_0^{1,h(x)}(\Omega)$。特别的，若对 $\lambda\in(0,1)$ 有 $h\in C^{0,\lambda}(\Omega)$，则 h 为局部 Holder 连续。

局部 Holder 连续的性质对变量指数 Sobolev 空间中建立 Sobolev 不等式是非常重要。定义 $h(x)$ 的点态 Sobolev 共轭为：

$$h^*(x):=\begin{cases}\dfrac{dh(x)}{d-h(x)} & \text{if } h(x)<d\\ \infty & \text{if } h(x)\ge d\end{cases}$$

若在 Ω 中 h 为可测函数满足 $1\le h_-\le h_+<d$ 且方程(1.8)，则有 $\|u\|_{h^*(x)}\le C\|\nabla u\|_{h(x)}$，对任意的 $u\in W_0^{1,h(x)}(\Omega)$，其中正常数 C 取决于 h_+，d 及方程(1.8)。另一方面，若 h 满足方程(1.8)且 $h_->d$，则有 $\|u\|_\infty\le C\|\nabla u\|_{h(x)}$，对任意的 $u\in W_0^{1,h(x)}(\Omega)$ 都成立，其中正常数 C 取决于 h_+，d 及方程(1.8)。

引理 1.3.1 [13]假设对几乎处处的 $x\in\Omega$，常数 α 和 β，以及任意的 $n\in\mathbb{N}$，满足以下条件：

i) $1<\alpha\le q_n(x)\le\beta<\infty$；

ii) 当 $n\to\infty$ 时，在 Ω 中有 $q_n\to q$；

iii) 当 $n\to\infty$ 时，在 $L^1(\Omega)^d$ 中 ∇u_n 弱收敛于 ∇u；

iv) 对常数 C 有 $\left\||\nabla u|^{q_n(x)}\right\|_1\le C$；

则有

$$\nabla u\in L^{q(\cdot)}(\Omega)^d, \tag{1.9}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_n|^{q_n(x)}\,\mathrm{d}x\ge\int_\Omega|\nabla u|^{q(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{1.10}$$

证明：由 Young 不等式得：对 $a,b\in\mathbb{R}^d$，$1<q<\infty$ 及 $\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}=1$，有

$$a\cdot b\le|a||b|\le\varepsilon\frac{|a|^q}{q}+\frac{|b|^{q'}}{\varepsilon^{\frac{q'}{q}}q'}\le|a|^q+\frac{|b|^{q'}}{q^{\frac{q'}{q}}\cdot q'},$$

得到

$$a\cdot b-\frac{|b|^{q'}}{q'q^{\frac{q'}{q}}}\le|a|^q, \tag{1.11}$$

令 b 为 $L^\infty(\Omega)^d$ 中的函数，$a=\nabla u_n$，$q=q_n$ 代入方程(1.11)，由假设 i)得到

$$\int_\Omega\left(\nabla u_n\cdot b-\frac{|b|^{q_n'(x)}}{q_n'(x)q_n(x)^{\frac{q_n'(x)}{q_n(x)}}}\right)\mathrm{d}x\le\int_\Omega|\nabla u_n|^{q_n(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{1.12}$$

由假设 ii) iii)，使得方程(1.12)中取极限 $n\to\infty$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left(\nabla u_n\cdot b-\frac{|b|^{q_n'(x)}}{q_n'(x)q_n(x)^{\frac{q_n'(x)}{q_n(x)}}}\right)\mathrm{d}x\le\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_n|^{q_n(x)}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_\Omega\lim_{n\to\infty}\left(\nabla u_n\cdot b-\frac{|b|^{q_n'(x)}}{q_n'(x)q_n(x)^{\frac{q_n'(x)}{q_n(x)}}}\right)\mathrm{d}x\le\int_\Omega|\nabla u|^{q_n(x)}\,\mathrm{d}x,$$

得

$$\int_\Omega\left(\nabla u\cdot b-\frac{|b|^{q'(x)}}{q'(x)q(x)^{\frac{q'(x)}{q(x)}}}\right)\mathrm{d}x\le\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u|^{q_n(x)}\,\mathrm{d}x=L, \tag{1.13}$$

令 $b:=\frac{\nabla u}{|\nabla u|}q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}$，这里 $u\wedge v:=\min\{u,v\}$，即 $|\nabla u|_k:=|\nabla u|\wedge k=\min\{|\nabla u|,k\}$，

代入上式

$$\int_\Omega\left(\nabla u\cdot b-\frac{|b|^{q'(x)}}{q'(x)q(x)^{\frac{q'(x)}{q(x)}}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\left(\nabla u\cdot\frac{\nabla u}{|\nabla u|}q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}-\frac{\left|\frac{\nabla u}{|\nabla u|}q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}\right|}{q'(x)q(x)^{\frac{q'(x)}{q(x)}}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\left(|\nabla u|q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}-|\nabla u|_k^{\frac{q'(x)}{q'(x)-1}}\frac{q(x)}{q'(x)}\right)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_\Omega\left(|\nabla u|q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}-|\nabla u|_k^{\frac{q'(x)}{q'(x)-1}}\frac{q(x)}{q'(x)}\right)\mathrm{d}x\le L,$$

当 $|\nabla u|\ge k$ 时，

$$|\nabla u|_k\,q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}=k^{1+\frac{1}{q'(x)-1}}q(x)<\nabla u\cdot q(x)k^{\frac{1}{q'(x)-1}}=\nabla u\cdot q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}},$$

当 $|\nabla u|\le k$ 时，

$$|\nabla u|_k\,q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}=|\nabla u|q(x)|\nabla u|^{\frac{1}{q'(x)-1}}<|\nabla u|q(x)|\nabla u|^{\frac{1}{q'(x)-1}}=\nabla u\cdot q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}},$$

所以，得到

$$|\nabla u|_k\,q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}\le\nabla u\cdot q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}},$$

故

$$\int_\Omega\left(|\nabla u|_k\,q(x)|\nabla u|_k^{\frac{1}{q'(x)-1}}-|\nabla u|_k^{\frac{q'(x)}{q'(x)-1}}\frac{q(x)}{q'(x)}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\left(|\nabla u|_k^{1+\frac{1}{q'(x)-1}}q(x)-|\nabla u|_k^{\frac{q'(x)}{q'(x)-1}}\frac{q(x)}{q'(x)}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\left[|\nabla u|_k^{\frac{q'(x)}{q'(x)-1}}\left(q(x)-\frac{q(x)}{q'(x)}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega|\nabla u|_k^{\frac{q'(x)}{q'(x)-1}}\mathrm{d}x=\int_\Omega|\nabla u|_k^{q(x)}\mathrm{d}x\le L,$$

令 $k\to\infty$，则

$$\int_\Omega|\nabla u|^{q(x)}\mathrm{d}x\le\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega|\nabla u|^{q_n(x)}\mathrm{d}x,$$

由 iv)，得 $\left\| |\nabla u_n|^{q_n(x)} \right\|_1 \le C$，即

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{q_n(x)}\,\mathrm{d}x \le C,$$

继而得到

$$\int_\Omega |\nabla u|^{q(x)}\,\mathrm{d}x \le C.$$

2. 局部问题解的存在性

2.1. 引言

本章研究在 $(p(u),q(u))$ 为局部情况时，如下变量指数椭圆方程：

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u\right) - div\left(|\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u\right) = f(x), & x\in\Omega, \\ u = 0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^d\ (d\ge 2)$ 是一个光滑有界区域，$f(x)$ 是给定的函数并且 $p,q:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$ 为变量指数函数。利用奇异摄动技术和 Schauder 不动点定理证明了局部问题(2.1)的弱解的存在性。

2.2. 准备知识

首先定义方程(2.1)弱解的集合如下：

$$W_0^{1,p(u)}(\Omega) := \left\{u\in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\nabla u|^{p(u)}\,\mathrm{d}x < \infty\right\}.$$

若 $1<p(u)<\infty$，对所有的 $u\in\mathbb{R}$，则这个集合为 Banach 空间。
范数 $\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)}$ 定义为：

$$\|u\|_{W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)} := \|u\|_1 + \|u\|_{p(\cdot)}.$$

同时，若 $p(u)\in C(\bar{\Omega})$，则范数等同于 $\|u\|_{p(u)}$。另外，若对于常数 α，满足 $p\ge\alpha>1$，p 连续，则由方程(1.8)可知，$W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ 是 $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ 的闭子集，且 $W_0^{1,p(u)}(\Omega)$ 是可分的和自反的。

另外，对 $1<\gamma<\infty$，定义 $W^{-1,\gamma'}(\Omega)$ 为 $W_0^{1,\gamma}(\Omega)$ 的对偶空间。

2.3. 主要结论

这一部分，简述本章的主要结论。

定义 2.3.1 假设方程(2.1)中的 p,q 连续，且满足对任意 $u\in\mathbb{R}$，α 和 β 为常数，有

$$1<\alpha\le q(u)<p(u)\le\beta<\infty,$$

且 f 满足 $f\in W^{-1,\alpha'}(\Omega)$。若 u 满足

$$\begin{cases} u\in\left(W_0^{1,p(u)}(\Omega)\cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right), \\ \int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x = \langle f,v\rangle, \quad \forall v\in\left(W_0^{1,p(u)}(\Omega)\cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right), \end{cases}$$

则 $u\in\left(W_0^{1,p(u)}(\Omega)\cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right)$ 为方程(2.1)的弱解。

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\left(W_0^{1,p(u)}(\Omega)\cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right)'$ 与 $\left(W_0^{1,p(u)}(\Omega)\cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right)$ 的内积。

定理 2.3.2 令 $\Omega \subset \mathbb{R}^d\ (d \geq 2)$ 为有界区域，且边界 $\partial\Omega$ 满足 Lipschitz 连续。同时，假设 $p,q:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 Lipschitz 连续函数，对任意 $u \in \mathbb{R}$，有

$$d < \alpha \leq q(u) < p(u) \leq \beta < \infty, \tag{2.2}$$

且 f 满足 $f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega)$，则方程(2.1)至少有一个弱解。

2.4. 局部问题解的存在性

首先，考虑以下方程：对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$\begin{cases} -div\left(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u\right) - div\left(|\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u\right) - \varepsilon div\left(|\nabla u|^{\beta-2}\nabla u\right) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

这里 β 为方程(2.2)的常数。接下来，我们给出方程(2.3)弱解的定义。

定义 2.4.1 假设 $p,q:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 Lipschitz 连续函数，且满足方程(2.2)，若 u 满足对任意的 $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$，有

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,\beta}(\Omega) \\ \int_\Omega |\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_\Omega |\nabla u|^{q(u)-2}\nabla u \cdot \nabla v dx + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u|^{\beta-2}\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \langle f, v\rangle, \end{cases}$$

则 u 为方程(2.3)的弱解。

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $W^{-1,\alpha'}(\Omega)$ 和 $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ 的内积。

引理 2.4.1 假设 $p,q:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 Lipschitz 连续函数，且满足方程(2.2)，f 满足 $f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega)$，则方程(2.3)存在一个弱解 u_ε。

证明： 给定 $\omega \in L^2(\Omega)$。由方程(2.2)及 f 的假设条件，可得对几乎处处的 $x \in \Omega$，有

$$d < \alpha \leq q(\omega) \leq p(\omega) \leq \beta < \infty, \tag{2.4}$$

且

$$f \in W^{-1,\alpha'}(\Omega) \subset W^{-1,\beta'}(\Omega).$$

因此固定 $\omega \in L^2(\Omega)$，由算子的单调性，可知方程对任意的 $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,\beta}(\Omega), \\ \int_\Omega |\nabla u|^{p(\omega)-2}\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^{q(\omega)-2}\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u|^{\beta-2}\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \langle f, v\rangle, \end{cases} \tag{2.5}$$

存在唯一弱解 $u = u_\omega$。将 $v = u$ 代入上式，利用 Holder 不等式，得

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(\omega)}\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^{p(\omega)}\mathrm{d}x + \varepsilon\int_\Omega |\nabla u|^{\beta}\mathrm{d}x \leq \|f\|_{-1,\alpha'}\|\nabla u\|_\alpha \leq C\|\nabla u\|_\beta,$$

其中正常数 $C = C(\alpha,\beta,\Omega,f)$。因此，若对 $\varepsilon > 0$，β 为方程(2.2)中的上常数，则得到

$$\|\nabla u\|_\beta \leq C, \tag{2.6}$$

其中正常数 $C = C(\alpha,\beta,\Omega,\varepsilon,f)$，与 w 无关。

并且，由 $\beta > d \geq 2$，可知 $W_0^{1,\beta}(\Omega)$ 紧嵌入 $L^2(\Omega)$ 中，即得 $\|u\|_2 = \|u_w\|_2 \leq C$，其中正常数 $C = C(\alpha,\beta,\Omega,\varepsilon,f,d)$ 与 w 无关。因此，考虑映射 $B: w \mapsto u_w \in T$，其中 $w \in T$ 及 $T := \left\{v \in L^2(\Omega): \|v\|_2 \leq C\right\}$，下面证明映射 B 是连续的：

事实上，假设 $\{w_n\}$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的序列，使得

在 $L^2(\Omega)$ 中，当 $n\to\infty$，有

$$w_n \to w, \tag{2.7}$$

当 $n\to\infty$ 时，在 Ω 中几乎处处有

$$w_n \to w, \tag{2.8}$$

对 $n\in\mathbb{N}$，令 $\{u_n\}$ 为方程组(2.5)的解，且令 $w=w_n$，也就是满足对任意 $v\in W_0^{1,\beta}(\Omega)$，

$$\begin{cases} u_n\in W_0^{1,\beta}(\Omega), \\ \int_\Omega |\nabla u_n|^{p(w_n)-2}\nabla u_n\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_\Omega |\nabla u_n|^{q(w_n)-2}\nabla u_n\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega |\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\cdot\nabla v\mathrm{d}x=\langle f,v\rangle, \end{cases} \tag{2.9}$$

结合方程(2.6)，可得到 $\|\nabla u_n\|_\beta\le C$，其中 C 不依赖于 n。

因此，由 $W_0^{1,\beta}(\Omega)$ 的自反性，这里我们将序列记作 $\{u_n\}$，可知存在 $u\in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ 使得在 $W_0^{1,\beta}(\Omega)$ 中，当 $n\to\infty$ 时，有

$$u_n \xrightarrow{w} u, \tag{2.10}$$

在 $L^2(\Omega)$ 中，当 $n\to\infty$ 时，有

$$u_n \to u, \tag{2.11}$$

考虑到方程组(2.9)的第二行，可得对任意的 $v\in W_0^{1,\beta}(\Omega)$

$$\int_\Omega\left(|\nabla u_n|^{p(w_n)-2}\nabla u_n+|\nabla u_n|^{q(w_n)-2}\nabla u_n+\varepsilon|\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right)\cdot\nabla v\mathrm{d}x=\langle f,v\rangle, \tag{2.12}$$

由单调性，可得对任意的 $v\in W_0^{1,\beta}(\Omega)$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(|\nabla u_n|^{p(w_n)-2}\nabla u_n+|\nabla u_n|^{q(w_n)-2}\nabla u_n+\varepsilon|\nabla u_n|^{\beta-2}\nabla u_n\right)\cdot\nabla(u_n-v)\mathrm{d}x\\&-\int_\Omega\left(|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v+|\nabla v|^{q(w_n)-2}\nabla v+\varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_n-v)\mathrm{d}x\ge 0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

将 $v=u_n-v$ 代入方程(2.12)，并且利用方程(2.13)，可知对 $\forall v\in W_0^{1,\beta}(\Omega)$，有

$$\langle f,u_n-v\rangle-\int_\Omega\left(|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v+|\nabla v|^{q(w_n)-2}\nabla v+\varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u_n-v)\mathrm{d}x\ge 0, \tag{2.14}$$

根据 p,q 的假设及勒贝格定理可知对任意的 $v\in W_0^{1,\beta}(\Omega)$
在 $L^{\beta'}(\Omega)^d$ 中，当 $n\to\infty$ 时，有

$$|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v\to|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v, \tag{2.15}$$

在 $L^{\beta'}(\Omega)^d$ 中，当 $n\to\infty$ 时，有 $|\nabla v|^{q(w_n)-2}\nabla v\to|\nabla v|^{q(w_n)-2}\nabla v$。

利用方程(2.10)和方程(2.15)，在方程(2.14)中取极限，即 $n\to\infty$，则对任意的 $v\in W_0^{1,\beta}(\Omega)$，有

$$\langle f,u-v\rangle-\int_\Omega\left(|\nabla v|^{p(w_n)-2}\nabla v+|\nabla v|^{q(w_n)-2}\nabla v+\varepsilon|\nabla v|^{\beta-2}\nabla v\right)\cdot\nabla(u-v)\mathrm{d}x\ge 0, \tag{2.16}$$

令 $v=u\mp\delta z$，其中 $z\in W_0^{1,\beta}(\Omega)$，$\delta>0$。由方程(2.16)，可得

$$\pm\left[\langle f,z\rangle-\int_\Omega\left(|\nabla(u\mp\delta z)|^{p(w)-2}\nabla(u\mp\delta z)+|\nabla(u\mp\delta z)|^{q(w)-2}\nabla(u\mp\delta z)+\varepsilon|\nabla(u\mp\delta z)|^{\beta-2}\nabla(u\mp\delta z)\right)\cdot\nabla z\mathrm{d}x\right]\ge 0.$$

即

$$\langle f,z\rangle-\int_\Omega\left(|\nabla(u\mp\delta z)|^{p(w)-2}\nabla(u\mp\delta z)+|\nabla(u\mp\delta z)|^{q(w)-2}\nabla(u\mp\delta z)+\varepsilon|\nabla(u\mp\delta z)|^{\beta-2}\nabla(u\mp\delta z)\right)\cdot\nabla z\mathrm{d}x=0$$

上式中，令 $\delta \to 0$，则容易得到任意的 $z \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$，有

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(w)-2} \nabla u + |\nabla u|^{q(w)-2} \nabla u + \varepsilon |\nabla u|^{\beta-2} \nabla u\right) \cdot \nabla z \mathrm{d}x = \langle f, z \rangle,$$

即由唯一性可知 $u = u_w$。故由方程(2.11)可知，在 $L^2(\Omega)$，当 $n \to \infty$ 时，$u_{w_n} \to u$。

由极限的唯一性可得，在 $L^2(\Omega)$，当 $n \to \infty$ 时，$u_{w_n} \to u_w$。

所以 $w \in T \mapsto u_w \in T$ 是连续的。

因此，有 Schauder 不动点定理，映射 B 有唯一的不动点，故引理 2.4.1 成立。

定理 2.3.2 的证明。由引理 2.4.1，可得对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $u_\varepsilon \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$，有任意的 $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \varepsilon \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{\beta-2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \langle f, v \rangle, \tag{2.17}$$

且对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 几乎处处的 $x \in \Omega$，有

$$d < \alpha \le q(u_\varepsilon) < p(u_\varepsilon) \le \beta.$$

令 $v = u_\varepsilon$ 代入方程(2.17)，得

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta = \langle f, u_\varepsilon \rangle, \tag{2.18}$$

根据方程(1.6)，得

$$\|u\|_{h(\cdot)} \le \left(\rho_{h(\cdot)}(u) + 1\right)^{\frac{1}{h_-}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^{h(\cdot)} \mathrm{d}x + 1\right)^{\frac{1}{h_-}},$$

因此由 Holder 不等式(1.7)得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^\alpha \mathrm{d}x &= \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^\alpha \cdot 1 \mathrm{d}x \le C \left\| |\nabla u_\varepsilon|^\alpha \right\|_{\frac{p(u_\varepsilon)}{\alpha}} \\
&\le C \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + 1\right)^{\frac{1}{\left(\frac{p(u_\varepsilon)}{\alpha}\right)_-}} \\
&\le C \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + 1\right),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

这里 $C = C(\alpha, \beta, \Omega)$。因此有

$$\begin{aligned}
\langle f, u_\varepsilon \rangle &\le \|f\|_{-1,\alpha'} \|u_\varepsilon\|_{1,\alpha} \\
&= \|f\|_{-1,\alpha'} \|\nabla u_\varepsilon\|_\alpha \\
&\le C \|f\|_{-1,\alpha'} \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

由杨不等式，可知

$$\|f\|_{-1,\alpha'} \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \frac{\alpha - 1}{\alpha} \|f\|_{-1,\alpha'}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + \frac{1}{\alpha},$$

结合方程(2.18)和方程(2.20)，得到

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta \le \frac{\alpha - 1}{\alpha} \|f\|_{-1,\alpha'}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + \frac{1}{\alpha},$$

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{p(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^{q(u_\varepsilon)} \mathrm{d}x + \varepsilon \|\nabla u_\varepsilon\|_\beta^\beta \le \frac{\alpha - 1}{\alpha} \|f\|_{-1,\alpha'}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha},$$

由$1-\dfrac{1}{\alpha}<1$，得

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{p(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{q(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\varepsilon\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left\|\nabla u_{\varepsilon}\right\|_{\beta}^{\beta}\le\frac{\alpha-1}{\alpha}\left\|f\right\|_{-1,\alpha'}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha},$$

$$\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left[\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{p(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{q(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\varepsilon\left\|\nabla u_{\varepsilon}\right\|_{\beta}^{\beta}\right]\le\frac{\alpha-1}{\alpha}\left\|f\right\|_{-1,\alpha'}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha},$$

方程两边同时除以$\left(1-\dfrac{1}{\alpha}\right)$，得

$$\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{p(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{q(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\varepsilon\left\|\nabla u_{\varepsilon}\right\|_{\beta}^{\beta}\le\left\|f\right\|_{-1,\alpha'}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha-1},$$

因此，由$\left\|f\right\|_{-1,\alpha'}$的有界性，得

$$\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{p(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{q(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\varepsilon\left\|\nabla u_{\varepsilon}\right\|_{\beta}^{\beta}\le C,\tag{2.21}$$

这里常数C不依赖于ε。方程(2.19)有

$$\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{\alpha}\mathrm{d}x\le C\left(\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{p(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+1\right)\le C\left(\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{p(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{q(u_{\varepsilon})}\mathrm{d}x+\varepsilon\left\|\nabla u_{\varepsilon}\right\|_{\beta}^{\beta}+1\right)\le C$$

从而得到

$$\left\|\nabla u_{\varepsilon}\right\|_{\alpha}\le C\tag{2.22}$$

这里常数C不依赖于ε。由于$W_0^{1,\alpha}(\Omega)$紧嵌入$L^2(\Omega)$，表明对于序列$\{u_n\}$，这里存在$u\in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$，使得

在$W_0^{1,\alpha}(\Omega)$中，当$n\to\infty$时，

$$u_{\varepsilon_n}\xrightarrow{w}u,\tag{2.23}$$

在$L^{\alpha}(\Omega)^d$中，当$n\to\infty$时，

$$\nabla u_{\varepsilon_n}\xrightarrow{w}\nabla u,\tag{2.24}$$

在$L^2(\Omega)$中，当$n\to\infty$时，$u_{\varepsilon_n}\to u$。

在Ω中，当$n\to\infty$时，几乎处处有

$$u_{\varepsilon_n}\to u,\tag{2.25}$$

根据方程(2.2)和p,q的假设，得$p(u)$，$q(u)$为Holder连续。利用方程(2.25)，得到当$n\to\infty$时

$$p\left(u_{\varepsilon_n}\right)\to p(u),\tag{2.26}$$

$$q\left(u_{\varepsilon_n}\right)\to q(u),\tag{2.27}$$

和

$$d<\alpha\le q\left(u_{\varepsilon}\right)<q\left(u_{\varepsilon}\right)\le\beta<\infty,\tag{2.28}$$

在方程(2.21)中，令$u_{\varepsilon}=u_{\varepsilon_n}$，结合方程(2.21)，(2.24)，(2.26)，(2.27)和(2.28)，由引理 1.3.1 可得$u\in W_0^{1,p(u)}(\Omega)$和$u\in W_0^{1,q(u)}(\Omega)$

因此可得

$$u \in W_0^{1,p(u)}(\Omega) \cap W_0^{1,q(u)}(\Omega) \tag{2.29}$$

在方程(2.17)中，令 $u_\varepsilon = u_{\varepsilon_n}$ 和 $v = u_{\varepsilon_n} - v$，得到对于任意的 $v \in W_0^{1,\beta}(\Omega)$，有

$$\int_\Omega \left(\left|\nabla u_{\varepsilon_n}\right|^{p(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla u_{\varepsilon_n} + \left|\nabla u_{\varepsilon_n}\right|^{q(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla u_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n \left|\nabla u_{\varepsilon_n}\right|^{\beta-2} \nabla u_{\varepsilon_n} \right) \cdot \nabla\left(u_{\varepsilon_n} - v\right) \mathrm{d}x = \left\langle f, u_{\varepsilon_n} - v \right\rangle, \tag{2.30}$$

且有单调性，可得对任意的 $v \in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\left|\nabla u_{\varepsilon_n}\right|^{p(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla u_{\varepsilon_n} + \left|\nabla u_{\varepsilon_n}\right|^{q(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla u_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n \left|\nabla u_{\varepsilon_n}\right|^{\beta-2} \nabla u_{\varepsilon_n} \right) \cdot \nabla\left(u_{\varepsilon_n} - v\right) \mathrm{d}x \\ &-\int_\Omega \left(\left|\nabla v\right|^{p(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla v + \left|\nabla v\right|^{q(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla v + \varepsilon_n \left|\nabla v\right|^{\beta-2} \nabla v \right) \cdot \nabla\left(u_{\varepsilon_n} - v\right) \mathrm{d}x \ge 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

将方程(2.30)代入方程(2.31)，得到对任意的 $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\left\langle f, u_{\varepsilon_n} - v \right\rangle - \int_\Omega \left|\nabla v\right|^{p(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla v \cdot \nabla\left(u_{\varepsilon_n} - v\right) \mathrm{d}x \\ &-\int_\Omega \left|\nabla v\right|^{q(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla v \cdot \nabla\left(u_{\varepsilon_n} - v\right) \mathrm{d}x - \varepsilon_n \int_\Omega \left|\nabla v\right|^{\beta-2} \nabla v \cdot \nabla\left(u_{\varepsilon_n} - v\right) \mathrm{d}x \ge 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

结合方程(2.15)和方程(2.25)，可得对于任意一个 v，在 $L^{\alpha'}(\Omega)^d$ 中，当 $n \to \infty$ 时，有

$$\left|\nabla v\right|^{p(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla v \to \left|\nabla v\right|^{p(u)-2} \nabla v,\ \left|\nabla v\right|^{q(u_{\varepsilon_n})-2} \nabla v \to \left|\nabla v\right|^{q(u)-2} \nabla v \tag{2.33}$$

结合方程(2.22)，(2.23)和方程(2.33)，在方程(2.32)中取极限 $n \to \infty$，得到对任意的 $v \in C_0^\infty(\Omega)$，有

$$\left\langle f, u - v \right\rangle - \int_\Omega \left|\nabla v\right|^{p(u)-2} \nabla v \cdot \nabla(u - v) \mathrm{d}x - \int_\Omega \left|\nabla v\right|^{q(u)-2} \nabla v \cdot \nabla(u - v) \mathrm{d}x \ge 0 \tag{2.34}$$

根据方程(2.2)和 p,q 的假设，$p(u)$ 和 $q(u)$ 为 Holder 连续函数，因为稠密性，得 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $\left(W_0^{1,p(u)}(\Omega) \cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right)$ 中稠密，进一步得到对 $v \in \left(W_0^{1,p(u)}(\Omega) \cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right)$

$$\left\langle f, u - v \right\rangle - \int_\Omega \left|\nabla v\right|^{p(u)-2} \nabla v \cdot \nabla(u - v) \mathrm{d}x - \int_\Omega \left|\nabla v\right|^{q(u)-2} \nabla v \cdot \nabla(u - v) \mathrm{d}x \ge 0, \tag{2.35}$$

此外在方程(2.35)中令 $v = u \mp \delta z$，这里 $z \in \left(W_0^{1,p(u)}(\Omega) \cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right)$，$\delta > 0$，得

$$\pm\left(\left\langle f, z \right\rangle - \int_\Omega \left|\nabla u\right|^{p(u)-2} \nabla u \cdot \nabla z \mathrm{d}x - \int_\Omega \left|\nabla u\right|^{q(u)-2} \nabla u \cdot \nabla z \mathrm{d}x \right) \ge 0,$$

因此

$$\int_\Omega \left|\nabla u\right|^{p(u)-2} \nabla u \cdot \nabla z \mathrm{d}x + \int_\Omega \left|\nabla u\right|^{q(u)-2} \nabla u \cdot \nabla z \mathrm{d}x = \left\langle f, z \right\rangle,\quad \forall z \in \left(W_0^{1,p(u)}(\Omega) \cap W_0^{1,q(u)}(\Omega)\right),$$

结合方程(2.29)可知，定理 2.3.2 成立。

参考文献

[1] Xiang, M., Wang, F. and Zhang, B. (2017) Existence and Multiplicity of Solutions for $p(x)$-Curl Systems Arising Electromagnetism. *JMAA*, **15**, 1600-1617. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.11.086

[2] Xiang, M., Zhang, B. and Rdulescu, V. (2020) Superlinear Schrödinger-Krirchhoff Type Problems Involving the Fractional p-Laplacian and Critical Exponent. *Advances in Nonlinear Analysis*, **9**, 690-709. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0021

[3] Zhang, B.L., Fiscella, A. and Liang, S.H. (2019) Infinitely Many Solutions for Critical Degenerate Kirchhoff Type Equations Involving the Fractional p-Laplacian. *Applied Mathematics & Optimization*, **80**, 63-80. https://doi.org/10.1007/s00245-017-9458-5

[4] Blomgren, P., Chan, T., Mulet, P. and Wong, C. (1997) Total Variation Image Restoration: Numerical Methods and Extensions. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*. IEEE Computer Society Press,

Piscataway, Vol. 3, 384-387.

[5] Bollt, E., Chartrand, R., Esedoglu, S., Schultz, P. and Vixie, K. (2007) Graduated, Adaptive Image Denoising: Local Compromise between Total-Variation and Isotropic Diffusion. *Advances in Computational Mathematics*, **31**, 61-85. https://doi.org/10.1007/s10444-008-9082-7

[6] Türola, J. (2017) Image Denoising Using Directional Adaptive Variable Exponents Model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **57**, 56-74. https://doi.org/10.1007/s10851-016-0666-4

[7] Andreianov, B., Bendahmane, M. and Ouaro, S. (2010) Structural Stability for Variable Exponent Elliptic Problems. II. The $p(u)$-Laplacian and Coupled Problem. *Nonlinear Analysis*, **72**, 4649-4660. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.02.044

[8] Chipot, M. and de Oliveira, H.B. (2019) Some Results on the $p(u)$-Laplacian Problem. *Mathematische Annalen*, **375**, 283-306. https://doi.org/10.1007/s00208-019-01803-w

[9] Zhikov, V.V. (1986) Averaging of Functionals of the Calculus of Variations and Elasticity Theory (Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat*, **504**, 675-710.

[10] Antontsev, S. and Shmarev, S. (2015) Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions. Existence, Uniqueness, Localization, Blow-Up. Atlantis Press, Paris. https://doi.org/10.2991/978-94-6239-112-3

[11] Diening, L., Harjulehto, P., Hästo, P. and Ružicka, M. (2011) Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18363-8

[12] Cruz-Uribe, D. and Fiorenza, A. (2013) Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0548-3

[13] Zhikov, V.V. (2009) On the Technique for Passing to the Limit in Nonlinear Elliptic Equations. *Functional Analysis and Its Applications*, **43**, 96-112. https://doi.org/10.1007/s10688-009-0014-1