Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 767-775
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115091

$\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模和Frobenius 双模

王小妹

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州
Email: 1696184261@qq.com

收稿日期：2021年4月10日；录用日期：2021年5月11日；发布日期：2021年5月18日

摘 要

本文主要研究 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射模和 Frobenius 双模之间的关系. 设环 R 和 S 都是有单位元的结合环, ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模且 M_R 是生成子.证明了 (1) R^{op}-模 X 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射模当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, X)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模; (2) R-模 Y 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射模当且仅当 $M \otimes_R Y$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 S-模。

关键词

$\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射模，Frobenius 双模，生成子

$\mathcal{Y}$-Gorenstein Injective Module and Frobenius Bimodules

Xiaomei Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: 1696184261@qq.com

Received: Apr. 10^{th}, 2021; accepted: May 11^{th}, 2021; published: May 18^{th}, 2021

Abstract

In this paper, we mainly study the relationship between $\mathcal{Y}$-Gorenstein injective module and Frobenius bimodules. Let R and S be associative rings with an identity, ${}_SM_R$ be

文章引用: 王小妹. $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模和Frobenius 双模[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 767-775.
DOI: 10.12677/pm.2021.115091

Frobenius bimodule with M_R a generator. We proved that (1) R^{op}-module X is $\mathcal{Y}$-Gorenstein injective module if and only if $\mathrm{Hom}_{R^{op}}(M,X)$ is $\mathcal{Y}$-Gorenstein injective S^{op}-module; (2) R-module Y is $\mathcal{Y}$-Gorenstein injective module if and only if $M\otimes_R Y$ is $\mathcal{Y}$-Gorenstein injective S-module.

Keywords

$\mathcal{Y}$-Gorenstein Injective Module, Frobenius Bimodules, Generator

1. 引言

作为有限生成投射模的推广, Auslander 等人在文献 [1] 中研究了双边 Noether 环上 G-维数为零的有限生成模. 1995 年, Enochs 等人在文献 [2] 中引入了Gorenstein内射模和投射模的概念. 2008 年, Mao 等人在文献 [3] 中定义了Gorenstein FP- 内射模并研究了其同调性质. 2009 年, Ding 等人在 [4] 中定义了强 Gorenstein 平坦模. 2010 年, Gillespie 在 [5] 中将强 Gorenstein 平坦模称为 Ding-投射模, 将 Gorenstein FP-内射模称为 Ding-内射模. 同年, Bennis 等人在 [6] 中引入了 $\mathcal{X}$-Gorenstein投射模. 2011 年, Meng 等人在 [7] 中引入了 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射模并研究了其同调性质.

1954 年, Kasch 等人在 [8] 中以 Frobenius 代数为基础, 引入了 Frobenius 扩张的概念. 在 [9, 10] 中, Nakayama, Tsuzuku 和 Morita 作了进一步的研究. 1999 年, Kadison 在 [11] 中更深层次地研究了 Frobenius 扩张, 并且提出了 Frobenius 双模的概念. 2018-2019 年, Ren 在 [12–14] 中研究了 Frobenius 扩张上的 Gorenstein 投射(内射,平坦)模及其维数. 2020 年, Hu 等人在 [15] 中研究了 Frobenius 函子和 Gorenstein 平坦模性质之间的关系. 设 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模且 M_R 是生成子.证明了 R-模 X 是 Gorenstein 平坦模当且仅当 $M\otimes_R X$ 是 Gorenstein平坦 S-模.

受以上工作的启发,本文主要研究 Frobenius 双模与 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射模, $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模之间的关系.

2. 预备知识

在本文中, 环 R 和 S 都是有单位元的结合环, 模均指酉模. 所有的左 R-模(或者左 S-模)表示为 R-模(S-模), 所有右 R-模(或者右 S-模)表示为 R^{op}-模(S^{op}-模), 对任意环 R, ${}_R\mathcal{M}$ 表示所有 R-模的范畴且 $\mathcal{M}_R$ 表示所有 R^{op}-模的范畴, ${}_SM_R$ 表示 M 是 (S,R)-双模. 我们用 $\mathcal{P}(R)$ 和 $\mathcal{I}(R)$ 分别表示投射 R-模类和内射 R- 模类.

本节给出一些用到的符号和基本概念.

定义 1.1 [11, 定义 2.1] 称 (S,R)-双模 M 是 Frobenius 双模, 如果满足以下条件:

(1) 模 ${}_SM$ 和 M_R 都是有限生成投射模;

(2) 存在 (R,S)-双模的同构: ${}^*M :=_R \mathrm{Hom_S}(M,S)_S \backsimeq_R \mathrm{Hom_{R^{op}}}(M,R)_S =: M^*$.

根据文献 [9], 称 $S\subseteq R$ 是 Frobenius 扩张, 如果 ${}_SR$ 是有限生成投射 S-模, 且 ${}_RR_S \backsimeq \mathrm{Hom_S}({}_SR,{}_SS)$. 此定义等价于 R_S 是有限生成投射 S^{op}-模,且 ${}_SR_R \backsimeq \mathrm{Hom_{S^{op}}}(R_S,S_S)$. 在这种情况下, ${}_SR_R$ 和 ${}_RR_S$ 均是 Frobenius 双模.

定义 1.2 [7, 定义 2.1] 设 $\mathcal{Y}$ 是 R^{op}-模类且包含所有内射模. 称 R^{op}-模 M 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模, 如果存在内射 R^{op}-模的正合列

$$\mathbb{E} = \cdots \to E^{-2} \to E^{-1} \to E^0 \to E^1 \to \cdots$$

使得 $M \cong Ker(E^0 \to E^1)$, 且对任意的 $H \in \mathcal{Y}$, $\mathrm{Hom}_R(H,\mathbb{E})$ 正合.

我们用 $\mathcal{Y}-\mathcal{GI}(R)$ 表示 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模类.

定义 1.3 (1)由定义知, $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模是 Gorenstein 内射模.

(2)如果 $\mathcal{Y}$ 是内射 R^{op}-模, 那么 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 R^{op}-模就是 Gorenstein 内射 R^{op}-模.

(3)如果 $\mathcal{Y}$是 FP-内射 R^{op}-模, 那么 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 R^{op}-模就是Gorenstein FP-内射 R^{op}- 模.

(4)如果 $\mathcal{Y}$是 Gorenstein 内射 R^{op}-模, 那么 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 R^{op}-模就是内射模.

定义 1.4 [6, 定义 2.1] 设 $\mathcal{X}$ 是 R-模类且包含所有投射模. 称 R- 模 M 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein投射模, 如果存在投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P} = \cdots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to P^1 \to \cdots$$

使得 $M \cong Ker(P^0 \to P^1)$, 且对任意的 $F \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{P},F)$ 正合.

我们用 $\mathcal{X}-\mathcal{GP}(R)$ 表示 $\mathcal{X}$-Gorenstein投射模类.

注记 1.5 (1)由定义知, $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模是 Gorenstein 投射模.

(2)如果 $\mathcal{X}$ 是投射 R-模, 那么 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模就是 Gorenstein 投射 R-模.

(3)如果 $\mathcal{X}$ 是平坦 R-模, 那么 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模就是 Ding 投射 R- 模.

(4)如果 $\mathcal{X}$ 是Gorenstein 投射 R-模, 那么 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模就是投射模.

3. $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模和Frobenius双模

本节主要研究 Frobenius 双模和 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模性质之间的关系.

引理 2.1 [11, 第 2 章][16, 第 2.1 节] 设 R 和 S 是环, ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模, 令 $N := {}^*M$. 则以下叙述成立:

(1) ${}_RN_S$ 是 Frobenius 双模.

(2) $M\otimes_R - \cong \mathrm{Hom}_R(N,-):\ {}_R\mathcal{M}\to\ {}_S\mathcal{M}$, $N\otimes_S - \cong \mathrm{Hom}_S(M,-):\ {}_S\mathcal{M}\to\ {}_R\mathcal{M}$.

(3) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,-)\cong -\otimes_R N:\mathcal{M}_R\to\mathcal{M}_S$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S^{op}}}(N,-)\cong -\otimes_S M:\mathcal{M}_S\to\mathcal{M}_R$.

(4) 若 X 是投射(内射,平坦)R-模, 则 $M\otimes_R X$ 是投射(内射,平坦)S-模.

(5) 若 Y 是投射(内射,平坦)S-模, 则 $\mathrm{Hom}_S(M,Y)$ 是投射(内射,平坦)R-模.

(6) 对任意的 $i\geq 0$, 及任意的S-模 X 和R-模 Y,

$$\mathrm{Ext}_S^i(X,M\otimes_R Y)\cong \mathrm{Ext}_R^i(\mathrm{Hom}_S(M,X),Y),$$

$$\mathrm{Ext}_R^i(Y,N\otimes_S X)\cong \mathrm{Ext}_S^i(\mathrm{Hom}_R(N,Y),X)$$

(7) 对任意的 $i\geq 0$, 任意的R^{op}-模 X 和R-模 Y,

$$\mathrm{Tor}_i^R(\mathrm{Hom}_{R^{op}}(M,X)\otimes_S M,Y)\cong \mathrm{Tor}_i^S(\mathrm{Hom}_{R^{op}}(M,X),M\otimes_R Y)$$

引理 2.2 [15, 定理 2.2]设 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模, 令 $N:={}^*M$且 $\mathbf{F}:=M\otimes_R-:\ {}_R\mathcal{M}\to\ {}_S\mathcal{M}$ 是 Frobenius 函子. 则以下叙述成立:

(1) $\mathbf{F}$ 是忠实函子;

(2) ${}_RN$ 是生成子;

(3) M_R 是生成子;

(4) M_R 是忠实的;

(5) 对任意的 R-模 X, 映射 $\varphi_X:X\to \mathrm{Hom_S}(M,M\otimes_R X)(\varphi_X(x)(m)=m\otimes_R x))$ 是单同态, 其中 $x\in X$ 且 $m\in M$;

(6) 对任意的 R^{op}-模 Y, 映射 $\psi_Y:\mathrm{Hom_{R^{op}}}(M,Y)\otimes_S M\to Y(\psi_Y(f\otimes_S m)=f(m))$ 是满同态, 其中 $f\in\mathrm{Hom_{R^{op}}}(M,Y)$ 且 $m\in M$;

(7)对任意的 R-模 $P\in\mathcal{P}(R)$, 映射 $\phi_P:N\otimes_S\mathrm{Hom_R}(M,P)\to P(\phi_P(n\otimes_S f)=f(n))$ 是满同态, 其中 $f\in\mathrm{Hom_R}(M,P)$ 且 $n\in N$;

(8) R^{op}-模 $E\in\mathcal{I}(R^{op})$, 映射 $\theta_E:E\to\mathrm{Hom_{S^{op}}}(N,E\otimes_R N)(\theta_E(x)(n)=x\otimes_R n)$ 是单同态, 其中 $x\in E$ 且 $n\in N$.

引理 2.3 [15, 推论 2.3] 设 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模且 M_R 是生成子.

(1)任意投射 R-模 P 是 $\mathrm{Hom_S}(M,M\otimes_R P)$ 的直和项;

(2)任意 R^{op}-模 E 是 $\mathrm{Hom_{R^{op}}}(M,E)\otimes_S M$ 的直和项.

引理 2.4 设 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模.

(1) 若 X 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 R^{op}-模, 则 $\mathrm{Hom_{R^{op}}}(M,X)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 S^{op}-模.

(2) 若 Y 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 S^{op}-模, 则 $Y\otimes_S M$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 R^{op}-模.

证明 (1) 因为 X 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 R^{op}-模, 所以存在内射 R^{op}-模的正合列

$$\mathbb{E}=\cdots\to E_1\to E_0\to E_{-1}\to E_{-2}\to\cdots,$$

DOI: 10.12677/pm.2021.115091

使得 $X \cong \mathrm{Ker}(E_{-1} \to E_{-2})$, 并且对任意的 $I \in \mathcal{Y}$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(I, \mathbb{E})$ 正合. 因 E_i 是内射 R^{op}-模. 所以 $\mathrm{Hom}_{R^{op}}(M, E_i)$ 是内射 S^{op}-模. 因此 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, \mathbb{E})$ 是内射 S^{op}-模的正合列, 且 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, X) \cong Ker(\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E_{-1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E_{-2}))$.

设 Q 是内射 S^{op}-模, 则 $Q \otimes_S M$ 是内射 R^{op}-模, 故 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(Q \otimes_S M, \mathbb{E})$ 正合. 由同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(Q \otimes_S M, \mathbb{E}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{S^{op}}}(Q, \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, \mathbb{E}))$$

知, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S^{op}}}(Q, \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, \mathbb{E}))$ 正合. 因此 $\mathrm{Hom}_{R^{op}}(M, X)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模.

(2) 设 Y 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模, 令 $N := {}^{*}M$. 因为 ${}_S M_R$ 是 Frobenius 双模, 所以 ${}_R N_S$ 是 Frobenius 双模. 因此由 (1) 知, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S^{op}}}(N, Y)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 R^{op}-模. 又因为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S^{op}}}(N, Y) \cong Y \otimes_S M$, 所以 $Y \otimes_S M$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 R^{op}-模.

引理 2.5 [7, 引理 2.8]以下叙述等价:

(1) M 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 R^{op}-模;

(2) 对任意 R^{op}-模 $H \in \mathcal{Y}$, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R}}^{\geq 1}(H, M) = 0$, 且存在内射 R^{op}-模的正合列:

$$\cdots \to E_2 \to E_1 \to E_0 \to X \to 0,$$

使得对任意的 $H \in \mathcal{Y}$, $\mathrm{Hom}_R(H, -)$ 正合;

(3) 存在短正合列 $0 \to G \to I \to M \to 0$, 其中 I 是内射模, G 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射模.

引理 2.6 [7, 引理 2.10] $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模关于扩张, 直和项和满同态的核封闭.

定理 2.7 设 ${}_S M_R$ 是 Frobenius 双模且 M_R 是生成子.

(1) R^{op}-模 X 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, X)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模.

(2) R-模 Y 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射模当且仅当 $M \otimes_R Y$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S-模.

证明 (1)$\Rightarrow$) 由命题 2.4 可得.

$\Leftarrow$) 设 X 是 R^{op}-模使得 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, X)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模. 下证 X 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 R^{op}-模.

设 E 是内射 R^{op}-模, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E)$ 是内射 S^{op}-模. 因为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, X)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模, 所以对任意的 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{S^{op}}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E), \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, X)) = 0$. 由同构

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{S^{op}}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E), \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, X)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{R^{op}}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E) \otimes_S M, X)$$

知, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R^{op}}}^{\mathrm{i}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E) \otimes_S M, X) = 0$. 又由引理 2.3(2), 内射 R^{op}-模 E 是 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E) \otimes_S M$ 的直和项, 所以对任意的 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{R^{op}}}^{\mathrm{i}}(E, X) = 0$. 下面构造 X 的 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(\mathcal{I}(R^{op}), -)$ 正合的左 $\mathcal{I}(R^{op})$-分解.

由命题 2.4 知, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E) \otimes_S M$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 R^{op}-模, 所以由引理 2.5 知, 有正合列 $0 \to L_1 \to I_0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E) \otimes_S M \to 0$, 其中 I_0 是内射 R^{op}-模, L_1 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 R^{op}-模. 因为 M_R 是生成子, 所以存在 R^{op}-模的正合列 $0 \to K \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M, E) \otimes_S M \to X \to 0$. 考虑下列推出图

DOI: 10.12677/pm.2021.115091

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & L_1 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,E)\otimes_S M \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

用 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,-)$ 作用于后, 得到

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,L_1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,L_1) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,H_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,I_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,E))\otimes_S M \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,X) \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

容易得到 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,E))\otimes_S M \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,X)$ 是可裂满同态, 所以由引理 2.6 知 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,K)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模且 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,H_1)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模. 故有正合列 $0\to H_1\to I_0\to X\to 0$, 其中 I_0 是内射 R^{op}-模, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(M,H_1)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 S^{op}-模. 因此对任意的 $i\geq 1$, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(E,H_1)=0$. 重复上述过程, 得到 R^{op}-模的正合列$\cdots\to I_2\to I_1\to I_0\to X\to 0$, 使得对任意的 R^{op}-模 $E\in\mathcal{Y}$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R^{op}}}(E,-)$ 正合. 所以 X 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射 R^{op}-模.

(2) 因为 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模且 M_R 是生成子, 所以 ${}_RN_S$ 是 Frobenius 双模且 ${}_RN$ 是生成子. 因此, R-模 Y 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein内射模当且仅当 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(N,Y)$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 S-模. 又由同构式 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(N,Y)\cong M\otimes_R Y$ 知, $M\otimes_R Y$ 是 $\mathcal{Y}$-Gorenstein 内射 S-模.

4. $\mathcal{X}$-Gorenstein投射模和Frobenius双模

本节主要研究Frobenius双模和 $\mathcal{X}$-Gorenstein投射模性质之间的关系.

命题 3.1 设 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模.

(1) 若 X 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模, 则 $M\otimes_R X$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模.

(2) 若 Y 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模, 则 $\mathrm{Hom_S}(M,Y)$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模.

证明 (1) 因为 X 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein投射 R-模, 所以存在投射右 R-模的正合列

$$\mathbb{P}: \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots,$$

使得 $X \cong \mathrm{Ker}(P_{-1} \to P_{-2})$, 且对任意的 $Q \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Hom_R}(\mathbb{P},Q)$ 正合. 因为 P_i 是投射 R-模, 所以 $M \otimes_R P_i$ 是投射 S-模. 故 $M \otimes_R \mathbb{P}$ 是投射 S-模的正合列, 且 $M \otimes_R X \cong \mathrm{Ker}(M \otimes_R P_{-1} \to M \otimes_R P_{-2})$.

设 A 是投射 S-模, 则 $\mathrm{Hom_S}(M,A)$ 是投射 R-模. 故 $\mathrm{Hom_R}(\mathbb{P},\mathrm{Hom_S}(M,A))$ 正合. 由同构

$$\mathrm{Hom_R}(\mathbb{P},\mathrm{Hom_S}(M,A)) \cong \mathrm{Hom_S}(M \otimes_R \mathbb{P},A)$$

知, $\mathrm{Hom_S}(M \otimes_R \mathbb{P},A)$ 正合. 因此 $M \otimes_R X$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein投射 S-模.

(2) 因为 Y 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模, 令 $N := {}^{*}M$, 因为 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模, 所以 ${}_RN_S$ 是 Frobenius 双模.因此由(1)知, $N \otimes_S Y$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模, 又由同构式$N \otimes_S Y \cong \mathrm{Hom_S}(M,Y)$ 知, 所以 $\mathrm{Hom_S}(M,Y)$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模.

引理 3.2 [6, 命题 2.2] 设 X 是 R-模, 则以下叙述等价:

(1) X 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模;

(2) 对任意 $F \in \mathcal{X}$, $i > 0$, $\mathrm{Ext^i_R}(X,F) = 0$, 且存在投射 R-模的正合列

$$0 \to X \to P^0 \to P^1 \to P^2 \to \cdots,$$

使得对任意的 $F \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Hom_R}(-,F)$ 正合;

(3) 存在短正合列 $0 \to X \to P \to L \to 0$, 其中 P 是投射模, L 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模.

引理 3.3 [6, 定理 2.3(1)] 设短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$,其中 C 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模. 则 A 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模当且仅当 B 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模.

定理 3.4 设 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模且 M_R 是生成子.

(1) R-模 X 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模当且仅当 $M \otimes_R X$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模.

(2) R^{op}-模 Y 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模当且仅当 $\mathrm{Hom_{R^{op}}}(M,Y)$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S^{op}-模.

证明 (1)$\Rightarrow$) 由命题 3.1 可得.

$\Leftarrow$) 设 X 是 R-模使得 $M \otimes_R X$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模. 下证 X 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模.

设 P 是投射 R-模, 所以 $M \otimes_R P$ 是投射 S-模. 因为 $M \otimes_R X$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模, 所以对任意的 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext^i_S}(M \otimes_R X, M \otimes_R P) = 0$. 由同构 $\mathrm{Ext^i_S}(M \otimes_R X, M \otimes_R P) \cong \mathrm{Ext^i_R}(X, \mathrm{Hom_S}(M, M \otimes_R P))$ 知, $\mathrm{Ext^i_R}(X, \mathrm{Hom_S}(M, M \otimes_R P)) = 0$. 又由引理 2.3(1), 投射 R-模 P 是 $\mathrm{Hom_S}(M, M \otimes_R P)$ 的直和项, 所以对任意的 $i \geq 1$, $\mathrm{Ext^i_R}(X,P) = 0$. 下面构造 X 的 $\mathrm{Hom_R}(-,\mathcal{P}(R))$ 正合的右 $\mathcal{P}(R)$-分解.

由命题 3.1 知, $\mathrm{Hom_S}(M, M \otimes_R X)$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模, 所以由引理 3.2 知,存在短正合列 $0 \to \mathrm{Hom_S}(M, M \otimes_R X) \to P^0 \to L^1 \to 0$, 其中 P^0 是投射 R-模, L^1 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模. 因为 M_R 是生成子, 所以存在 R-模的短正合列 $0 \to X \to \mathrm{Hom_S}(M, M \otimes_R X) \to K \to 0$. 考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom_S}(M, M\otimes_R X) \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & P^0 \arrow[r] \arrow[d] & H^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & L^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & L^1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

用 $M\otimes_R -$ 作用于推出图得到

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M\otimes_R X \arrow[r] \arrow[d, equal] & M\otimes_R \mathrm{Hom_S}(M, M\otimes_R X) \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_R K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M\otimes_R X \arrow[r] & M\otimes_R P^0 \arrow[r] \arrow[d] & M\otimes_R H^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M\otimes_R L^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & M\otimes_R L^1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

容易得到 $M\otimes_R X\to M\otimes_R \mathrm{Hom_S}(M, M\otimes_R X)$ 是可裂单同态. 由引理 3.3 知 $M\otimes_R K$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模, 且 $M\otimes_R H^1$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模. 因此有正合列 $0\to X\to P^0\to H^1\to 0$, 其中 P^0 是投射 R-模, $M\otimes_R H^1$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S-模. 因此对任意的 $i\geq 1$, $\mathrm{Ext}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{R}}(H^1, P)=0$. 重复上述过程, 得到 R-模的正合列

$$0\to X\to P^0\to P^1\to P^2\to\cdots$$

其中 $P_i\in\mathcal{P}(R)$ 使得对任意的 $Q\in\mathcal{X}$, $\mathrm{Hom_R}(-,Q)$ 正合. 所以 X 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 R-模.

(2) 因为 ${}_SM_R$ 是 Frobenius 双模且 M_R 是生成子, 令 $N:={}^*M$. 所以 ${}_RN_S$ 是 Frobenius 双模且 ${}_RN$ 是生成子. 因此 R^{op}-模 Y 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模当且仅当 $Y\otimes_R N$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S^{op}-模. 又由同构式 $Y\otimes_R N\cong \mathrm{Hom_{R^{op}}}(M,Y)$ 知, $\mathrm{Hom_{R^{op}}}(M,Y)$ 是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射 S^{op}-模.

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11561061).

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2008) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **7**, 491-506. https://doi.org/10.1142/S0219498808002953

[4] Ding, N.Q., Li, Y.L. and Mao, L.X. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/S1446788708000761

[5] Gillespie, J. (2010) Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings. *Homology, Homotopy and Applications*, **12**, 61-73. https://doi.org/10.4310/HHA.2010.v12.n1.a6

[6] Bennis, D. and Ouarghi, K. (2010) $\mathcal{X}$-Gorenstein Projective Modules. *Internation Mathematical Forum*, **5**, 487-491.

[7] Meng, F. and Pan, Q. (2011) $\mathcal{X}$-Gorenstein Projective and $\mathcal{Y}$-Gorenstein Injective modules. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **40**, 537-554.

[8] Kasch, F. (1954) Grundlagen einer theorie der Frobeniuserweiterungen. *Mathematische Annalen*, **127**, 453-474. https://doi.org/10.1007/BF01361137

[9] Nakayama, T. and Tsuzuku, T. (1960) On Frobenius Extensions I. *Nagoya Mathematical Journal*, **17**, 89-110. https://doi.org/10.1017/S0027763000002075

[10] Morita, K. (1965) Adjoint Pairs of Functors and Frobenius Extensions. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku, Section A*, **9**, 40-71. https://www.jstor.com/stable/43698658

[11] Kadison, L. (1999) New Examples of Frobenius Extensions. In: *University Lecture Series*, Vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/ulect/014

[12] Ren, W. (2018) Gorenstein Projective and Injective Dimensions over Frobenius Extensions. *Communications in Algebra*, **46**, 5348-5354. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1464173

[13] Ren, W. (2018) Gorenstein Projective Modules and Frobenius Extensions. *Science China Mathematics*, **61**, 1175-1186. https://doi.org/10.1007/s11425-017-9138-y

[14] Ren, W. (2019) Gorenstein Flat Modules and Frobenius Extensions. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, **62**, 647-652.

[15] Hu, J.S., Li, H.H., Geng, Y.X. and Zhang, D.D. (2020) Frobenius Functors and Gorenstein Flat Dimensions. *Communications in Algebra*, **48**, 1257-1265. https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1677699

[16] Xi, C.C. (2020) Frobenius Bimodules and Flat-Dominant Dimensions. *Science China Mathematics*, **64**, 33-44. https://doi.org/10.1007/s11425-018-9519-2