Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1020-1030
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116116

Hans汉斯

一类Finsler子流形的研究

晏　文

西南交通大学数学学院，四川 成都
Email: yanwen20200922@163.com

收稿日期：2021年5月1日；录用日期：2021年6月2日；发布日期：2021年6月10日

摘　要

本文主要利用一个自然恒等式并且考虑一类特殊(α,β)-流形$(\tilde{M},\tilde{F})$，$\tilde{F}=\tilde{\alpha}\phi(\tilde{\beta}/\tilde{\alpha})$且$\phi(0)=1$，其中$\tilde{\alpha}$是Riemann度量，$\tilde{\beta}$是一个1-形式。旨在利用自然恒等式研究一类特殊$(\alpha,\beta)$-流形在一定条件下不存在闭的可定向的*BH*-极小子流形和闭的可定向的*HT*-极小曲面。

关键词

自然恒等式，(α,β)-流形，极小子流形

The Study of a Class of Finsler Submanifolds

Wen Yan

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
Email: yanwen20200922@163.com

Received: May 1st, 2021; accepted: Jun. 2nd, 2021; published: Jun. 10th, 2021

Abstract

In this paper, we mainly use a natural identity and consider a class of special manifolds $(\tilde{M},\tilde{F})$ with an (α,β)-metric $\tilde{F}=\tilde{\alpha}\phi(\tilde{\beta}/\tilde{\alpha})$ and $\phi(0)=1$, in which $\tilde{\alpha}$ is the Riemannian metric, and $\tilde{\beta}$ is a one-form. We aim to study a class of special manifolds by using the natural identity. Under certain conditions, there are no closed orientable *BH*-minimal submanifolds and closed orientable *HT*-minimal surfaces.

文章引用: 晏文. 一类 Finsler 子流形的研究[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1020-1030.
DOI: 10.12677/pm.2021.116116

Keywords

A Natural Identity, (α,β)-Manifold, Minimal Submanifold

1. 引言

1972 年，M. Matsumoto [1]推广了 Randers 度量的概念，得到了(α,β)-度量。(α,β)-度量 $F=\alpha\phi(\beta/\alpha)$是由 Riemann 度量$\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$和 1-形式$\beta=b_i(x)y^i$构成的一类重要的 Finsler 度量，其中$\phi(s)$是定义在开区间$(-b_0,b_0)$上的光滑正函数，并满足$\phi(0)=1$使得$F$为正定的 Finsler 度量。不难看出，这类$(\alpha,\beta)$-度量包含了所有的 Riemann 度量($\phi=1$或者$\beta=0$)，这是 Finsler 几何中一类重要的度量，它们已经被应用到物理、生物等学科[2] [3]。因此，人们对这类特殊的度量进行了深入研究。当$\phi=1+s$时，(α,β)-度量$F=\alpha+\beta$称为 Randers [4]度量，它是最简单 Finsler 度量，著名的 Funk 度量就是射影平坦且旗曲率为$K=-\frac{1}{4}$的 Randers 度量；当$\phi(s)=(1+s)^2$，那么$F=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$称为 Square 度量，它是由 L. Berwald [5]构造的二次平方度量，其旗曲率为$K=0$。而当$\phi(s)=\frac{1}{1-s}$，那么$F=\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}$称为 Matsumoto 度量。它是由日本数学家 M.Matsumoto 在研究山路的斜坡问题时抽象出来的度量，其中α是地球引力，β是高度。

近年来，受到 Riemann 子流形研究的影响，Finsler 子流形的研究越来越受到人们的重视。1998 年，在没有借助任何联络的情况下，文献[6]研究了在 Busemann-Hausdorff-体积形式下 Finsler 子流形几何。之后，文献[7]考虑了 Minkowski Randers 空间的(超)曲面，得到了极小曲面的 Bernstein 型定理。2006 年，文献[8]和文献[9]提出了另一种集中于 Holmes-Thompson 测度的方法，引入了法曲率以及 Holmes-Thompson 平均曲率的概念并给出了具体的表达式。而文献[10]首次引入了体积比函数

$$\Phi_b(t):=2\sigma'(t)(b^2-t)+\sigma(t),\ t\in[0,b^2]$$

目的是为了简化平均曲率公式并使它们适用于 Busemann-Hausdorff 测度和 Holmes-Thompson 测度下(α,β)-空间中的浸入曲面。

本文考虑一般(α,β)-流形$(\tilde{M}^{n+p},\tilde{F})$，其中$\tilde{F}=\tilde{\alpha}\phi\left(\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2,\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}\right)$，$\tilde{\alpha}$是一个 Riemann 度量，$\tilde{\beta}$是 1-阶微分形式，$b:=\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2$是$\tilde{\beta}$在度量$\tilde{\alpha}$的长度，$\phi(b,s)$在条件$|s|\le b<b_0$下是一个 2-变量光滑正函数，且满足式(8)使得$\tilde{F}$是正定的 Finsler 度量。我们将引用文献[11]中一个涉及了σ-平均曲率向量和一个向量场切分量相关的散度项的自然恒等式(定理 1.3)。选择一类特殊的(α,β)-度量

$$F=\alpha\phi(s),\ s=\frac{\beta}{\alpha}$$

其中ϕ是定义在某区间$(-b_0,b_0)$上的光滑正函数且$\phi(0)=1$。本文旨在利用自然恒等式研究在 Busemann-Hausdorff 测度和 Holmes-Thompson 测度下一类特殊(α,β)-流形在一定条件下不存在闭的可定向的极小子流形和极小曲面。

2. 预备知识

本节主要介绍后面所用到的一些概念和记号。在整个文章中，也使用 Einstein 求和约定。简称 Busemann-Hausdorff 体积形式为 *BH*-体积形式，Holmes-Thompson 体积形式为 *HT*-体积形式。

定义 1 用 $\mathcal{L}_{\tilde{X}}$ 表示 $\tilde{M}$ 上的一个 Lie 导数算子。因为 $\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{g}$ 是一个对称协变(0,2)-张量，所以可以定义一个(1,1)-张量(仍然用 $\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{g}$ 表示)。对任意 $\tilde{M}$ 上的向量场 $\tilde{Y}$ 和 $\tilde{Z}$，我们有

$$\left\langle\left(\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{g}\right)\left(\tilde{Y}\right),\tilde{Z}\right\rangle_{\tilde{g}}:=\left(\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{g}\right)\left(\tilde{Y},\tilde{Z}\right)=\left\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X},\tilde{Z}\right\rangle_{\tilde{g}}+\left\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{X},\tilde{Y}\right\rangle_{\tilde{g}} \tag{1}$$

定义 2 如果对 $\tilde{M}$ 上的一个光滑函数 c，使得 $\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{g}=2c\tilde{g}$，即

$$\left(\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{g}\right)\left(\tilde{Y},\tilde{Z}\right)=\left\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X},\tilde{Z}\right\rangle_{\tilde{g}}+\left\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{X},\tilde{Y}\right\rangle_{\tilde{g}}=2c\left\langle\tilde{Y},\tilde{Z}\right\rangle_{\tilde{g}} \tag{2}$$

其中 $\tilde{Y}$ 和 $\tilde{Z}$ 是 $\tilde{M}$ 上的任意两个向量场，那么向量场 $\tilde{X}$ 称为 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的共形向量场。特别地，如果 $c=0$，则 $\tilde{X}$ 称为 Killing 向量场。

3. 一个自然恒等式

在文献[11]中，通过运用子流形的理论知识进行大量计算，自然引入了体积比函数

$$\Phi\left(p,b,t\right):=2\sigma_t\left(p,b,t\right)\left(b-t\right)+\sigma\left(p,b,t\right) \tag{3}$$

这样的一个函数是在计算过程中自然出现的，目的是为了简化 σ -平均曲率向量和自然恒等式。其中 $\sigma=\sigma\left(p,b,t\right)$ 是一个任意 3-变量光滑正函数，在没有特别提醒的情况下，我们用 $\sigma_t:=\sigma_t\left(p,b,t\right)$ 表示 σ 关于 t 的偏导数，那么 $\sigma_b,\sigma_{pt},\sigma_{bt}$ 和 σ_{tt} 等也是表示关于 p,b,t 求偏导数。对于任意的向量场 $\tilde{X}$，用 $\tilde{X}^{\perp}$ 表示其法向分支。

引理 1 [11] 设 $\left(\tilde{M}^{n+p},\tilde{g}\right)$ 是一个 $n+p$ 维的 Riemann 流形且具有向量场 $\tilde{X}$， M^n 是 $\tilde{M}$ 的一个子流形，用 $\tilde{\nabla}$ 表示度量 $\tilde{g}$ 的一个 *Levi-Civita* 联络，取 $\tilde{M}$ 一个局部正交标架 $\left(\varepsilon_i,\varepsilon_\alpha\right)$，使得 $\left(\varepsilon_i\right)$ 与 M 相切。则对 M 上的切向量 $X=\tilde{X}^{\mathrm{T}}$，总有

$$\begin{aligned} div_M\left(\Phi X\right)&=n\left\langle\vec{H}_\sigma,\tilde{X}\right\rangle_{\tilde{g}}+\sigma_p\tilde{X}\left(f\right)+\left(\sigma_b+\sigma_t\right)\tilde{X}\left(\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^2\right)\\ &+\sigma\left[div_{\tilde{M}}\tilde{X}-\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\left\langle\tilde{\nabla}_{\varepsilon_\alpha}\tilde{X},\varepsilon_\alpha\right\rangle_{\tilde{g}}\right]-2\sigma_t\left\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{X}^{\perp}}\tilde{X},\tilde{X}^{\perp}\right\rangle_{\tilde{g}}. \end{aligned} \tag{4}$$

其中 σ 和 Φ 是由式(3)给出， $f:\tilde{M}\to R$ 是一个任意的光滑函数， div_M 是关于流形 M 在诱导度量 g 下的散度算子， $\vec{H}_\sigma$ 称为流形 M 的 σ −平均曲率向量，即

$$\begin{aligned} n\vec{H}_\sigma:=&\,n\vec{H}\sigma+2n\left\langle\vec{H},\tilde{X}\right\rangle_{\tilde{g}}\sigma_t\tilde{X}^{\perp}-2\left[2\sigma_{tt}\left\langle\nabla_{\tilde{X}}^{\perp}\tilde{X}^{\perp},\tilde{X}^{\perp}\right\rangle_{\tilde{g}}\tilde{X}^{\perp}-\sigma_t\nabla_{\tilde{X}}^{\perp}\tilde{X}^{\perp}\right]\\ &+2\sigma_{pt}X\left(f\right)\tilde{X}^{\perp}-\sigma_p\nabla^{\perp}f-\sigma_b\nabla^{\perp}\left(\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^2\right)-2\sigma_t\left[\left[\left(\mathcal{L}_{\tilde{X}}\tilde{g}\right)\left(X\right)\right]^{\perp}-\left(\tilde{\nabla}_X\tilde{X}\right)^{\perp}\right]\\ &+2\left(\sigma_{bt}+\sigma_{tt}\right)X\left(\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^2\right)\tilde{X}^{\perp}+2\sigma_t\left[div_{\tilde{M}}\tilde{X}-\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\left\langle\tilde{\nabla}_{\varepsilon_\alpha}\tilde{X},\varepsilon_\alpha\right\rangle_{\tilde{g}}\right]\tilde{X}^{\perp}. \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\vec{h}\left(\varepsilon_i,\varepsilon_i\right)$ 称为流形 M 的第二基本形式， $\vec{H}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{h}\left(\varepsilon_i,\varepsilon_i\right)$ 表示 M 在流形 $\left(\tilde{M},\tilde{g}\right)$ 的 Riemann 平均曲

率向量，$\mathcal{L}_{\tilde{X}}$ 由式(1)给出。$\nabla^{\perp} f := \left(\tilde{\nabla} f\right)^{\perp}$，$\nabla^{\perp}\left(\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^{2}\right)$ 是梯度向量场 $\tilde{\nabla} f$，$\tilde{\nabla}\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^{2}$ 的法向分支。

注记 1 假设引理 1 中同样的条件。特别地，如果 $\sigma=\sigma(b,t)$，那么 $\sigma_p=0$，则式(4)可以简化为

$$div_M(\Phi X)=n\left\langle \vec{H}_\sigma,\tilde{X}\right\rangle_{\tilde{g}}+(\sigma_b+\sigma_t)\tilde{X}\left(\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^2\right)$$

$$+\sigma div_{\tilde{M}}\tilde{X}-\sigma\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\langle\tilde{\nabla}_{\varepsilon_\alpha}\tilde{X},\varepsilon_\alpha\rangle_{\tilde{g}}-2\sigma_t\left\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{X}^\perp}\tilde{X},\tilde{X}^\perp\right\rangle_{\tilde{g}}.$$

进一步来说，若 $\sigma=\sigma(b,t)$ 且 $\tilde{X}$ 是共形向量场(2)，则 $\tilde{X}\left(\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^2\right)=2\left\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{X},\tilde{X}\right\rangle_{\tilde{g}}=2c\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^2$，$div_{\tilde{M}}\tilde{X}=\sum_{\alpha=1}^{n+p}\left\langle\tilde{\nabla}_{\varepsilon_\alpha}\tilde{X},\varepsilon_\alpha\right\rangle_{\tilde{g}}=(n+p)c$，$\left\langle\tilde{\nabla}_{\tilde{X}^\perp}\tilde{X},\tilde{X}^\perp\right\rangle_{\tilde{g}}=c\left\|\tilde{X}^\perp\right\|_{\tilde{g}}^2=c\left(\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^2-\left\|X\right\|_{\tilde{g}}^2\right)$。在这里令 $b=\left\|\tilde{X}\right\|_{\tilde{g}}^2, t=\left\|X\right\|_{\tilde{g}}^2$，我们有

$$\begin{aligned}div_M(\Phi X)&=n\left\langle\vec{H}_\sigma,\tilde{X}\right\rangle_{\tilde{g}}+c\left[2(\sigma_b+\sigma_t)b+n\sigma-2\sigma_t(b-t)\right]\\&=n\left\langle\vec{H}_\sigma,\tilde{X}\right\rangle_{\tilde{g}}+c\left[2(b\sigma_b+t\sigma_t)+n\sigma\right].\end{aligned}\tag{6}$$

因此就得到了一个自然恒等式(6)，它是涉及了一个 σ −平均曲率向量和一个向量场切分量相关的散度项，我们将在第 5 节给出其具体的应用。

4. 一般(α,β)−度量体积元

一般(α,β)-度量中的 Finsler 度量是近十年来重要的研究内容。我们知道，赋予 Finsler 度量 F 的 n 维微分流形 M 称为 Finsler 流形(M,F)。其中光滑流形 M 上的一个 Finsler 度量 F 是定义在切从 TM 上的连续函数 $F:TM\to[0,+\infty)$，它满足以下条件：i) F 在 $TM\setminus\{0\}$ 上是光滑的；ii) 对于任意的实数 λ 和 $(x,y)\in TM$，$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$；iii) 定义在 $TM\setminus\{0\}$ 的基本张量 $g^F:=g_{ij}^F dx^i\otimes dx^j$ 是正定的，其中在 TM 上的一个局部坐标系下(x^i,y^i)，$g_{ij}^F:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2F^2}{\partial y^i\partial y^j}\right)$。而在 Finsler 度量中，那里有一系列更广泛的度量称为一般(α,β)-度量，它是由文献[12]提出的。

设(M,F)是一般(α,β)-流形且具有一般(α,β)-度量，若对任意 $x\in M$，$s:=\beta/\alpha$，则有

$$F=\alpha\phi(x,s)\tag{7}$$

其中 $\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ 是一个 Riemann 度量，$\beta=b_i(x)y^i$ 是一个 1-次微分形式且 $\|\beta\|_\alpha<b_0$。$\phi(b,s)$ 是一个 2-变量光滑正函数(参看文献[12]命题 3.3)满足：

$$\phi-s\phi_s>0,\ \phi-s\phi_s+\left(b^2-s^2\right)\phi_{ss}>0\tag{8}$$

$n\geq3$ 或者

$$\phi-s\phi_s+\left(b^2-s^2\right)\phi_{ss}>0$$

当 $n=2$，其中 b 和 s 是任意实数且满足 $|s|\leq b<b_0$。

在文献[13]中，一般(α,β)-流形(M,F)的 Busemann-Hausdorff 测度和 Holmes-Thompson 测度已经被计算出来，它的证明方法类似于文献[14]和文献[15]。对任意 $x\in M$ 和一个实数 $t\geq0$，我们定义

$$\sigma(x,t):=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta}{\phi\left(x,t^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right)^{n}}\mathrm{d}\theta\right]^{-1} & BH-\text{情况},\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\displaystyle\int_0^{\pi}Q\left(x,t^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right)\sin^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta & HT-\text{情况}.\end{cases} \tag{9}$$

其中

$$Q(x,s):=\phi(\phi-s\phi_s)^{n-2}\left[\phi-s\phi_s+\left(t-s^2\right)\phi_{ss}\right],\ s=t^{\frac{1}{2}}\cos\theta\ 。$$

$\Gamma(t)=\int_0^{\infty}x^{t-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 是一个 Euler 函数且满足递推公式 $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$，$\Gamma(1)=1$，$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ 。

引理 2 [13] 对于具有度量(7)的一般 (α,β) -流形 (M^n,F)，关于在度量 F 下的 *BH*-体积形式和 *HT*-体积形式为 $\mathrm{d}V_F(x)=\sigma\left(x,\|\beta\|_{\alpha}^2\right)\mathrm{d}V_{\alpha}$，其中 $x\in M$，σ 是由式(9)给出。

在本节中，我们考虑一个一般 (α,β) -流形中定向等距浸入的子流形 $f:M^n\to\left(\tilde{M}^{n+p},\tilde{F}\right)$，其中 $\tilde{F}=\tilde{\alpha}\phi\left(\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2,\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}\right)$。那么在流形 M 上的诱导度量 $F:=f^*\tilde{F}$ $\tilde{F}=\tilde{\alpha}\phi\left(\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2,\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}\right)$ 是一个一般 (α,β) -度量 $F=\alpha\phi\left(\|\beta\|_{\tilde{\alpha}}^2,\beta/\alpha\right)$，其中 $\alpha:=f^*\tilde{\alpha}$ 是诱导的 Riemann 度量，$\beta:=f^*\tilde{\beta}$ 是诱导的 1-形式。$\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2$ 可以看作是限制在 M 上的函数，而流形 M 上 $\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2$ 一般是不等同于 $\|\beta\|_{\alpha}^2$ 且具有如下关系:

$$\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2=\|\beta\|_{\alpha}^2+\sum_{\alpha=n+1}^{n+p}\left\langle\tilde{\beta}^{\#},e_{\alpha}\right\rangle_{\tilde{\alpha}}^2,$$

其中 $\{e_{n+1},\cdots,e_{n+p}\}$ 是关于法从在度量 $\tilde{\alpha}$ 下的单位正交标架。通过引理 2 可以知道，(M,F) 的 *BH*-体积形式和 *HT*-体积形式具有形式

$$\mathrm{d}V_F(x)=\sigma\left(\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2,\|\beta\|_{\alpha}^2\right)\mathrm{d}V_{\alpha},\ x\in M$$

那么根据式(9)，函数 σ 可以为

$$\sigma(b,t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta}{\phi\left(b,t^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right)^{n}}\mathrm{d}\theta\right]^{-1} & BH-\text{情况},\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\displaystyle\int_0^{\pi}Q\left(b,t,t^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right)\sin^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta & HT-\text{情况}.\end{cases} \tag{10}$$

其中

$$Q(b,t,s):=\phi(\phi-s\phi_s)^{n-2}\left[\phi-s\phi_s+\left(t-s^2\right)\phi_{ss}\right],\ s=t^{\frac{1}{2}}\cos\theta \tag{11}$$

且 $b:=\left\|\tilde{\beta}\right\|_{\tilde{\alpha}}^{2}$，$t:=\left\|\beta\right\|_{\alpha}^{2}$。因为 $\phi=\phi(b,s)$，所以 Q 是一个关于变量 (b,t,s) 函数。

5. Busemann-Hausdorff 和 Holmes-Thompson 测度下的子流形

在 Finsler 几何中，*BH*-体积形式和 *HT*-体积形式是两个重要的体积形式。根据式(10)，对任意维度的一般 (α,β)-流形，函数 σ 均不能表示为初等函数，但我们仍然可以对它进行研究。因此在本小节，我们将深入研究一类特殊 (α,β)-流形在 *BH*-测度和 *HT*-测度下的极小子流形和极小曲面的不存在性。

在文献[11]中，通过观察式(6)的最后一项，作者计算了式(10)中 *HT*-情况下的 $2(b\sigma_b+t\sigma_t)+n\sigma$，即

$$2(b\sigma_b+t\sigma_t)+n\sigma=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\left[2(bQ_b+tQ_t)+nQ\right]\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}2(bQ_b+tQ_t)+nQ&=(2b\phi_b+s\phi_s+n\phi)(\phi-s\phi_s)^{n-2}\left(\phi-s\phi_s+(t-s^2)\phi_{ss}\right)\\&\quad+(n-2)\phi(\phi-s\phi_s)^{n-3}\left(2b(\phi_b-s\phi_{sb})-s^2\phi_{ss}\right)\left(\phi-s\phi_s+(t-s^2)\phi_{ss}\right)\\&\quad+\phi(\phi-s\phi_s)^{n-2}\left[2b(\phi_b-s\phi_{sb})+(2b\phi_{ssb}+s\phi_{sss})(t-s^2)+\phi_{ss}(2t-3s^2)\right],\end{aligned}\tag{13}$$

且 $b:=\left\|\tilde{\beta}\right\|_{\tilde{\alpha}}^{2}$，$t:=\left\|\beta\right\|_{\alpha}^{2}$。因为 $s=t^{\frac{1}{2}}\cos\theta$，所以式(11)中函数 Q 可以看作是关于 (b,t) 的函数。当给定函数 $\phi=\phi(b,s)$ 且 ϕ 满足式(8)后，那么通过一个技术上的计算就可以判断出 $2(bQ_b+tQ_t)+nQ$ 值的正负(在这里利用了 $b\ge t\ge s^2$ 关系)，因此作者证明了投影平坦 Finsler 流形 $\left(\mathrm{B}^{n+P}(r_\mu),\tilde{F}_\mu\right)$ 中不存在 *HT*-极小子流形(参看定理 5.6)。下面我们首先对在 *BH*-情况下的 $2(b\sigma_b+t\sigma_t)+n\sigma$ 进行一个技术上的计算。

引理 3 对任意两变量的函数 $\phi=\phi(b,s)$ 且满足式(8)，其中 $s=t^{\frac{1}{2}}\cos\theta$，我们有

$$2(b\sigma_b+t\sigma_t)+n\sigma=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\phi^{-n}\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta\right]^{-2}\int_0^{\pi}2n\phi^{-n-1}\left(b\phi_b+t\phi_t+\frac{1}{2}\phi\right)\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{14}$$

证明：根据式(10)中 *BH*-情况我们计算:

$$\sigma_b=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\phi^{-n}\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta\right]^{-2}\int_0^{\pi}n\phi^{-n-1}\phi_b\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

从而有

$$2b\sigma_b=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\phi^{-n}\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta\right]^{-2}\int_0^{\pi}2n\phi^{-n-1}b\phi_b\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{15}$$

同理

$$2t\sigma_t=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\phi^{-n}\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta\right]^{-2}\int_0^{\pi}2n\phi^{-n-1}t\phi_t\sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{16}$$

注意

$$\sigma(b,s)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta}{\phi(b,s)^n}\mathrm{d}\theta\right]^{-1},$$

即

$$\begin{aligned} n\sigma &= n\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-2}\theta}{\phi(b,s)^n}\mathrm{d}\theta\right]^{-1} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\phi^{-n}\sin^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta\right]^{-2}\int_0^{\pi}n\phi^{-n}\sin^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{17}$$

依据式(15)，(16)和(17)，我们有

$$2\left(b\sigma_b+t\sigma_t\right)+n\sigma=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\int_0^{\pi}\phi^{-n}\sin^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta\right]^{-2}\int_0^{\pi}2n\phi^{-n-1}\left(b\phi_b+t\phi_t+\frac{1}{2}\phi\right)\sin^{n-2}\theta\mathrm{d}\theta$$

故得到了式(14)。下面将引理 1 应用于一般(α,β)-流形中的子流形，得到以下命题。

命题 1 设M^n是一个等距浸入到一般(α,β)-流形$\left(\tilde{M}^{n+p},\tilde{F}\right)$的子流形，其中$\tilde{F}=\tilde{\alpha}\phi\left(\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2,\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}\right)$。如果$\tilde{\beta}$是共形向量场(2)，$\tilde{\beta}$是关于$\tilde{\alpha}$的共形 1-形式且共形因子$c\neq 0$，那么在 *BH*-测度和 *HT*-测度下我们有

$$div_M\left(\Phi\beta^{\#}\right)=n\left\langle\vec{H}_\sigma,\tilde{\beta}^{\#}\right\rangle_{\tilde{\alpha}}+c\left[2\left(b\sigma_b+t\sigma_t\right)+n\sigma\right] \tag{18}$$

其中$b=\|\tilde{\beta}\|_{\tilde{\alpha}}^2$，$t=\|\beta\|_{\alpha}^2$，$\sigma$由式(10)给出，$\Phi$由式(3)定义，$\vec{H}_\sigma$称为流形$M$的$\sigma$-平均曲率向量(5)，最后一项由式(12)，(13)和(14)给出。

现在考虑一类特殊的(α,β)-度量(Randers 度量，Square 度量和 Matsumoto 度量)，其中度量$\tilde{F}=\tilde{\alpha}\phi(s)$，$s=\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$且$\phi(0)=1$。文献[16]已经详细计算了这类度量在满足式(8)的条件下是 Finsler 度量。下面依据式(18)研究这类特殊(α,β)-流形$\left(\tilde{M},\tilde{F}\right)$在一定条件下不存在闭的可定向的 *BH*-极小子流形和闭的可定向的 *HT*-极小曲面(这里ϕ与b无关，故$\phi_b=0$)。

定理 1 设$\left(\tilde{M},\tilde{F}\right)$是一个 Finsler 流形，其中$\tilde{F}=\tilde{\alpha}\phi(s)=\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}$，$\tilde{\beta}$是关于$\tilde{\alpha}$的共形 1-形式且共形因子$c\neq 0$。则在$0\leq b<\frac{1}{2}$的条件下，Finsler 流形$\left(\tilde{M},\tilde{F}\right)$中不存在闭的可定向的 *BH*-极小子流形，其中$b$表示$\tilde{\beta}$在 Riemann 度量$\tilde{\alpha}$下的长度。

证明： 对任意的$x\in\tilde{M}$，给定$\tilde{\beta}$在 Riemann 度量$\tilde{\alpha}$下的长度$b:=\|\tilde{\beta}_x\|_{\tilde{\alpha}}<1$，依据式(8)我们有

$$\phi-s\phi_s=1,\quad \phi-s\phi_s+\left(b^2-s^2\right)\phi_{ss}=1$$

所以$\tilde{F}$在条件$|s|\leq b<1$下是正定的 Finsler 度量。由式(14)可以有(这里$s=t^{\frac{1}{2}}\cos\theta$):

$$t\phi_t=\frac{1}{2}s,\quad t\phi_t+\frac{1}{2}\phi=\frac{1}{2}(1+2s)$$

当给定条件$|s| \le b < \frac{1}{2}$，$\phi > 0$时，则有

$$2n\phi^{-n-1}\left(b\phi_b + t\phi_t + \frac{1}{2}\phi\right) = 2n\phi^{-n-1}\left(t\phi_t + \frac{1}{2}\phi\right) = n\phi^{-n-1}(2s+1) > 0$$

那么根据命题1，若存在一个闭的可定向的子流形M，则当$c>0$且$\vec{H}_\sigma = 0$时，流形M上的积分(18)会出现一个矛盾，所以Finsler流形$(\tilde{M},\tilde{F})$在条件$0 \le b < \frac{1}{2}$下不存在闭的可定向的BH-极小子流形。

注记2 依据定理1的证明过程。设$(\tilde{M},\tilde{F})$是一个Finsler流形，其中$\tilde{F} = \frac{(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})^2}{\tilde{\alpha}}$，$\tilde{\beta}$是关于$\tilde{\alpha}$的共形1-形式且共形因子$c \ne 0$。则对任意的$x \in \tilde{M}$，$\tilde{\beta}$在Riemann度量$\tilde{\alpha}$下的长度$\|\tilde{\beta}_x\|_{\tilde{\alpha}} < 1$，对所有$|s| \le b < 1$，我们有

$$\begin{aligned}\phi - s\phi_s + (b^2 - s^2)\phi_{ss} &= (1+s)^2 - 2s(1+s) + 2(b^2 - s^2)\\ &= 1 + 2b^2 - 3s^2 \ge 1 - b^2 > 0,\end{aligned}$$

所以$\tilde{F}$在条件$|s| \le b < 1$下是正定的Finsler度量。当给定条件$|s| \le b < \frac{1}{3}$，$\phi > 0$时，由式(14)可以有

$$\begin{aligned}2n\phi^{-n-1}\left(t\phi_t + \frac{1}{2}\phi\right) &= 2n\phi^{-n-1}\left[(1+s)s + \frac{1}{2}(1+s)^2\right]\\ &= n\left(3s^2 + 4s + 1\right)\phi^{-n-1}\\ &= n(s+1)(3s+1)\phi^{-n-1} > 0.\end{aligned}$$

那么由命题1，当$c>0$且$\vec{H}_\sigma = 0$时，对式(18)进行积分会出现一个矛盾，所以Finsler流形$(\tilde{M},\tilde{F})$在条件$0 \le b < \frac{1}{3}$下不存在闭的可定向的BH-极小子流形。

注记3 同注记2的讨论方法一样。给定$\phi(s) = \frac{1}{1-s}$，则$\tilde{F} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}}$，其中$\tilde{\beta}$是关于$\tilde{\alpha}$的共形1-形式且共形因子$c \ne 0$。对任意的$x \in \tilde{M}$，$\tilde{\beta}$在Riemann度量$\tilde{\alpha}$下的长度$\|\tilde{\beta}_x\|_{\tilde{\alpha}} < 1$，依据式(8)易证明度量$\tilde{F}$在条件$|s| \le b < \frac{1}{2}$下是正定的Finsler度量。当给定条件$|s| \le b < \frac{1}{2}$，$\phi > 0$时，根据式(14)我们有

$$\begin{aligned}2n\phi^{-n-1}\left(t\phi_t + \frac{1}{2}\phi\right) &= 2n\phi^{-n-1}\left[\frac{s}{2(1-s)^2} + \frac{1}{2(1-s)}\right]\\ &= 2n\phi^{-n-1}\frac{1}{2(1-s)^2}\\ &= n\phi^{-n+1} > 0.\end{aligned}$$

从而根据命题1，当$c>0$且$\vec{H}_\sigma = 0$时，对式(18)进行积分会出现一个矛盾，所以在条件$0 \le b < \frac{1}{2}$下，Finsler流形$(\tilde{M},\tilde{F})$不存在闭的可定向的BH-极小子流形。

现在来观察等式(13)，因为$\phi = \phi(s)$与b无关且$\phi_b = \phi_{sb} = \phi_{ssb} = 0$，所以式(13)右边的第二项是一个负值。在这种情况下给定函数$\phi = \phi(s)$，则$2(bQ_b + tQ_t) + nQ$的计算将会变得复杂。因此为了简便计算，我们将这类特殊(α,β)-流形限制在$n=2$（曲面情况)进行讨论，那么式(13)可以简化为

$$2\left[\left(bQ_b+tQ_t\right)+Q\right]=\left(s\phi_s+2\phi\right)\left(\phi-s\phi_s+\left(t-s^2\right)\phi_{ss}\right)\\+\phi\left[s\phi_{sss}\left(t-s^2\right)+\phi_{ss}\left(2t-3s^2\right)\right]. \tag{19}$$

接下来根据式(19)，我们继续探讨这类特殊(α,β)-流形在 Holmes-Thompson 测度下极小曲面的不存在性。

定理 2 设$(\tilde{M},\tilde{F})$是一个 Finsler 流形，其中$\tilde{F}=\dfrac{\left(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}\right)^2}{\tilde{\alpha}}$，$\tilde{\beta}$是关于$\tilde{\alpha}$的共形 1-形式且共形因子$c\neq 0$。则在$0\le b<\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}$的条件下，Finsler 流形$(\tilde{M},\tilde{F})$不存在闭的可定向的 HT-极小曲面，其中b表示$\tilde{\beta}$在 Riemann 度量$\tilde{\alpha}$下的长度。

证明：对任意的$x\in\tilde{M}$，$\tilde{\beta}$在 Riemann 度量$\tilde{\alpha}$下的长度$\|\tilde{\beta}_x\|_{\tilde{\alpha}}<1$，易得到$\tilde{F}$在条件$|s|\le b<1$下是正定的 Finsler 度量。由式(19)我们有

$$\phi=(1+s)^2,\quad \phi_s=2(1+s),\quad \phi_{ss}=2,\quad \phi_{sss}=0$$

从而有

$$s\phi_s+2\phi=2(s+1)(2s+1)$$

$$\phi-s\phi_s+\left(t-s^2\right)\phi_{ss}=1+2t-3s^2$$

在这里$b,t,s=t^{\frac{1}{2}}\cos\theta$的关系是$b\ge t\ge s^2$。当给定条件$|s|\le b<\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}$时，我们有

$$\begin{aligned}2\left[\left(bQ_b+tQ_t\right)+Q\right]&=2(s+1)(2s+1)\left(1+2t-3s^2\right)+2(1+s)^2\left(2t-3s^2\right)\\&=2(s+1)\left(-9s^3-6s^2+2s+6ts+4t+1\right)\\&=2(s+1)\left[(6s+4)\left(t-s^2\right)-3s^3-2s^2+2s+1\right]\\&=2(s+1)\left[(6s+4)\left(t-s^2\right)+(s+1)\left(-3s^2+s+1\right)\right]\\&\ge 2(s+1)^2\left(-3s^2+s+1\right)>0.\end{aligned}$$

那么依据命题 1，当$c>0$且$\vec{H}_\sigma=0$时，若存在一个闭的可定向的极小曲面，则对式(18)进行积分会出现一个矛盾，所以 Finsler 流形$(\tilde{M},\tilde{F})$在条件$0\le b<\dfrac{\sqrt{13}-1}{6}$下不存在闭的可定向的 HT-极小曲面。

注记 4 给定$\phi(s)=1+s$，则$\tilde{F}=\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}$，其中$\tilde{\beta}$是关于$\tilde{\alpha}$的共形 1-形式且共形因子$c\neq 0$。对任意的$x\in\tilde{M}$，$\tilde{\beta}$在 Riemann 度量$\tilde{\alpha}$下的长度$\|\tilde{\beta}_x\|_{\tilde{\alpha}}<1$，那么度量$\tilde{F}$在条件$|s|\le b<1$下是正定的 Finsler 度量。因为$\phi-s\phi_s=1,\phi_{ss}=\phi_{sss}=0$，所以式(13)可以化简为式(19)的一般情况。因此我们讨论$n=2$是一种特殊的情况，当限制$|s|\le b<\dfrac{n}{n+1}$，根据式(13)计算可得

$$2\left(bQ_b+tQ_t\right)+nQ=\left(s\phi_s+n\phi\right)=(n+1)s+n>0$$

那么依据命题 1，当$c>0$且$\vec{H}_\sigma=0$时，对式(18)进行积分会出现一个矛盾，所以 Finsler 流形$(\tilde{M},\tilde{F})$在条件$0\le b<\dfrac{n}{n+1}$下不存在闭的可定向的 HT-极小子流形。

注记 5 依据定理 2 的证明过程。设$\left(\tilde{M},\tilde{F}\right)$是一个 Finsler 流形，其中$\tilde{F}=\dfrac{\tilde{\alpha}^2}{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}}$，$\tilde{\beta}$是关于$\tilde{\alpha}$的共形1-形式且共形因子$c\neq 0$。则依据式(8)易证明度量$\tilde{F}$在条件$|s|\leq b<\dfrac{1}{2}$下是正定的 Finsler 度量，那么根据式(19)可得

$$s\phi_s+2\phi=\frac{2-s}{(1-s)^2},\quad \phi-s\phi_s+\left(t-s^2\right)\phi_{ss}=\frac{1-3s+2t}{(1-s)^3},$$

$$s\phi_{sss}\left(t-s^2\right)+\phi_{ss}\left(2t-3s^2\right)=\frac{(2s+4)\left(t-s^2\right)-2s^2(1-s)}{(1-s)^4}.$$

当给定条件$|s|\leq b<\dfrac{2}{5}$，$\phi>0$且$b\geq t\geq s^2$时，我们有

$$\begin{aligned}2\left[\left(bQ_b+tQ_t\right)+Q\right]&=\frac{(2-s)(1-3s+2t)}{(1-s)^5}+\frac{(2s+4)\left(t-s^2\right)-2s^2(1-s)}{(1-s)^5}\\&=\left[(2-s)(1-3s+2t)+(2s+4)\left(t-s^2\right)-2s^2(1-s)\right]\phi^5\\&=\left(-3s^2-7s+2+8t\right)\phi^5\\&=\left[5s^2-7s+2+8\left(t-s^2\right)\right]\phi^5\geq(s-1)(5s-2)\phi^5>0.\end{aligned}$$

那么依据命题 1，当$c>0$且$\vec{H}_\sigma=0$时，对式(18)进行积分会出现一个矛盾，所以在条件$0\leq b<\dfrac{2}{5}$下，Finsler 流形$\left(\tilde{M},\tilde{F}\right)$中不存在闭的可定向的 *HT*-极小曲面。

基金项目

论文由西南交通大学基础培育项目《黎曼－芬斯勒几何若干问题研究》资助(No. 2682021ZTPY042)。

参考文献

[1] Matsumoto, M. (1992) Theory of Finsler Spaces with (*α*,*β*)-Metric. *Reports on Mathematical Physics*, **31**, 43-83. https://doi.org/10.1016/0034-4877(92)90005-L

[2] Antonelli, P.L., Ingarden, R.S. and Matsumoto, M. (1993) The Theory of Sprays and Finsler Spaces with Applications in Physics and Biology. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8194-3

[3] Bejancu, A. (1990) Finsler Geometry and Applications. Ellis Horwood Limited, Chichester.

[4] Randers, G. (1941) On an Asymmetrical Metric in the Four-Space of General Relativity. *Physical Review*, **59**, 285-290. https://doi.org/10.1103/PhysRev.59.195

[5] Berwald, L. (1929) Über Die *N*-Dimensionalen Geometrien Konstanter Krümmung, in Denen Die Geraden Die Kürzesten Sind. *Mathematische Zeitschrift*, **30**, 449-469. https://doi.org/10.1007/BF01187782

[6] Shen, Z. (1998) On Finsler Geometry of Submanifolds. *Mathematische Annalen*, **311**, 549-576. https://doi.org/10.1007/s002080050200

[7] Souza, M., Spruck, J. and Tenenblat, K. (2004) A Bernstein Type Theorem on a Randers Space. *Mathematische Annalen*, **329**, 291-305. https://doi.org/10.1007/s00208-003-0500-3

[8] He, Q. and Shen, Y.B. (2006) On the Mean Curvature of Finsler Submanifolds. *Chinese Annals of Mathematics*, **27**, 663-674.

[9] He, Q. and Shen, Y.B. (2006) On Bernstein Type Theorem in Finsler Geometry with Volume Form Induced from Sphere Bundle. *Proceedings American Mathmatical Society*, **134**, 871-880. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-05-08017-2

[10] Cui, N. and Shen, Y.B. (2009) Bernstein Type Theorems for Minimal Surfaces in (*α*,*β*)-Space. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, **74**, 383-400.

[11] Cui, N. and Zhou, L.F. (2021) The Variation of a Functional on the Riemannian Submanifold and Its Applications.

(Preprint)

[12] Yu, C. and Zhu, H. (2011) On a New Class of Finsler Metrics. *Differential Geometry and Its Applications*, **29**, 244-254. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2010.12.009

[13] Yin, S., He, Q. and Xie, D. (2013) Minimal Submanifolds in General (α,β)-Spaces. *Annales Polonici Mathematici*, **108**, 43-59. https://doi.org/10.4064/ap108-1-4

[14] Cheng, X. and Shen, Z. (2009) A Class of Finsler Metrics with Isotropic S-Curvature. *Israel Journal of Mathematics*, **169**, 317-340. https://doi.org/10.1007/s11856-009-0013-1

[15] 崔宁伟. 关于(α,β)-度量的 S-曲率[J]. 数学物理学报, 2006, 26(6): 1047-1056.

[16] Overath, P. (2014) Minimal Immersions in Finsler Spaces. PhD Thesis, RWTH Aachen University, Aachen.