Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 1242-1249
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116137

广义酉除数和函数在函数域上的均值

牛　威

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: jnzqniuwei@163.com

收稿日期：2021年5月15日；录用日期：2021年6月17日；发布日期：2021年6月24日

摘　要

对任意正整数n，若$d|n$且$(d,n/d)=1$，就称d是n的酉除数。本文考虑了函数域上的广义酉除数和函数$\sigma_k^*(f)=\sum\limits_{\substack{g|f\\(g,f/g)=1}}\|g\|^k$的均值，得到其渐近公式。

关键词

函数域，广义酉除数和函数，均值

The Average Value of Generalized Unitary Divisor Sum Function in Function Fields

Wei Niu

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: jnzqniuwei@163.com

Received: May 15th, 2021; accepted: Jun. 17th, 2021; published: Jun. 24th, 2021

Abstract

For any positive integer n, we say d is a unitary divisor of n, if $d|n$ and $(d,n/d)=1$. In this paper, we consider the average value of the generalized unitary divisor sum function $\sigma_k^*(f)=\sum\limits_{\substack{g|f\\(g,f/g)=1}}\|g\|^k$ in function fields, and obtain its asymptotic formula.

文章引用: 牛威. 广义酉除数和函数在函数域上的均值[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 1242-1249.
DOI: 10.12677/pm.2021.116137

Keywords

Function Fields, Generalized Unitary Divisor Sum Function, Average Value

1. 引言

对任意正整数n，若$d|n$且$(d,n/d)=1$，我们就称d是n的酉除数(unitary divisor)，其基本性质可见[1]。用$\sigma^*(n)$表示n的所有酉除数的和，即：

$$\sigma^*(n)=\sum_{\substack{d|n\\(d,n/d)=1}} d.$$

函数$\sigma^*(n)$是可乘的，对任意的正整数n，有：

$$\sigma^*(n)=\prod_{p^\alpha\|n}(1+p^\alpha)，\quad p\text{ 为素数。}$$

1977 年，A. Ivic [2]证明当$n\ge 31$时，有：

$$\sigma^*(n)\le\frac{28}{15}n\log\log n.$$

2008 年，A. Derbal [3]证明当$n>17$时，

$$\frac{\sigma(n)}{\sigma^*(n)(\log\log n)}<e^\gamma，\text{其中 }\gamma\text{ 为 Euler 常数。}$$

2013 年，T. Trudgian [4]改进 A. Ivic [2]的结果，证明当$n\ge 570571$时，有：

$$\sigma^*(n)\le 1.3007n\log\log n.$$

E. Cohen [5]和 P. J. McCarthy [6]分别给出酉除数和函数$\sigma^*(n)$在长区间的渐近公式：

$$\sum_{n\le x}\sigma^*(n)=\frac{\pi^2x^2}{12\zeta(3)}+O\left(x(\log x)^{5/3}\right).$$

K. Nageswara 在[7]中定义有理数域上的广义除数和函数：

$$\sigma_k^*(n)=\sum_{\substack{d|n\\(d,n/d)=1}} d^k，\quad k\text{ 是非负整数；}$$

并证明如下卷积形式：

$$\sum_{\substack{d|n\\(d,n/d)=1}}\Phi_k^*\left(\frac{n}{d}\right)\tau^*(d)=\sigma_k^*(n).$$

本文研究函数域$F_q(T)$上的广义酉除数和函数，令M为$F_q[T]$上的所有首一多项式构成的集合，定义：

$$\sigma_k^*(f)=\sum_{\substack{g\mid f\\(g,f/g)=1}}\|g\|^k,$$

其中，$f,g\in M$，k 是非负整数。函数 $\sigma_k^*(f)$ 在 M 上是可乘的，对 M 上的任意一个多项式 f，有：

$$\sigma_k^*(f)=\prod_{P^\alpha\|f}\left(1+\|P\|^{\alpha k}\right)$$

其中 P 为 M 上的不可约多项式。

本文计算 $\sigma_k^*(f)$ 的均值，结果如下：

定理 1.1 在函数域 $F_q(T)$ 中，k 是非负整数，对任意的 $0<\varepsilon<1/4$ 和给定的正整数 n，M_n 是 M 中所有次数为 n 的多项式构成的集合，有：

$$\frac{1}{q^n}\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)=\begin{cases}q^{nk}+O_\varepsilon\left(q^{nk-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right), & \text{如果}k\geq 1\\ n+1+O_\varepsilon\left((n+1)q^{-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right), & \text{如果}k=0\end{cases}$$

符号

$A=F_q[T]$：有限域 F_q 上的多项式环，其中 $q=p^t$，p 为素数，t 为正整数。

$M:A$ 中所有首一多项式的集合。

$M_n:M$ 中所有次数为 n 的多项式构成的集合。

$\|g\|=q^{degg}$。

$\mathrm{Re}(s)$：复数 s 的实部。

$\zeta_A(s)=\sum_{f\in M}\frac{1}{\|f\|^s}$，$\mathrm{Re}(s)>1$。

$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$，$\mathrm{Re}(s)>1$。

2. 预备知识和引理

下文中的出现的 q 与 $F_q[T]$ 中的 q 一致：$q=p^t$，p 为素数，t 为正整数；k 与 $\sigma_k^*(f)$ 中的 k 一致，是非负整数。

2.1. 函数域上的 zeta 函数 $\zeta_A(s)$ 和函数 $\sigma_k^*(f)$

由文献[8]，给出函数域 $F_q(T)$ 上的 zeta 函数：

$$\zeta_A(s)=\sum_{f\in M}\frac{1}{\|f\|^s},\ \mathrm{Re}(s)>1.$$

有以下引理：

引理 2.1.1 当 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时，有 $\zeta_A(s)=\prod_{\substack{P\in M\\P\text{不可约}}}\left(1-\frac{1}{\|P\|^s}\right)^{-1}=\frac{1}{1-q^{1-s}}$.

其中 $\zeta_A(s)=\frac{1}{1-q^{1-s}}$ 是函数 $\zeta_A(s)$ 在复平面除 $s=1$ 点外的解析延拓。

关于函数域 $F_q(T)$ 上的广义酉除数和函数 $\sigma_k^*(f)$，对任意 M 上的不可约多项式 P 及非负整数 α，有

$\sigma_k^*\left(P^\alpha\right)=1+\|P\|^{\alpha k}$，且有以下引理：

引理 2.1.2 函数$\sigma_k^*\left(f\right)$在M上是可乘的，即若$f,g\in M$，$\left(f,g\right)=1$，有$\sigma_k^*\left(fg\right)=\sigma_k^*\left(f\right)\sigma_k^*\left(g\right)$。

证明：对任意两个不相等的M中的不可约多项式P_1,P_2，有：

$$\sigma_k^*\left(P_1^{\alpha_1}\right)=1+\|P_1\|^{\alpha_1 k}，\ \alpha_1\text{是非负整数。}$$

$$\sigma_k^*\left(P_2^{\alpha_2}\right)=1+\|P_2\|^{\alpha_2 k}，\ \alpha_2\text{是非负整数。}$$

$$\sigma_k^*\left(P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\right)=1+\|P_1\|^{\alpha_1 k}+\|P_2\|^{\alpha_2 k}+\|P_1\|^{\alpha_1 k}\|P_2\|^{\alpha_2 k}=\sigma_k^*\left(P_1^{\alpha_1}\right)\sigma_k^*\left(P_2^{\alpha_2}\right).$$

由此可知，引理成立。

2.2. 其他所需引理

令

$$G\left(s\right)=\prod_{\substack{P\in M\\ P\text{不可约}}}\left(1-\frac{1}{\|P\|^{2s-k}}\right),\ \operatorname{Re}\left(s\right)>\frac{k+1}{2}.$$

其中k是非负整数，我们可以得到以下引理：

引理 2.2.1 对任意的$\varepsilon>0$，当$\operatorname{Re}\left(s\right)\geq\frac{k+1}{2}+\varepsilon$时，存在与$\varepsilon$有关的常数$C\left(\varepsilon\right)>0$，使得$\left|G\left(s\right)\right|\leq C\left(\varepsilon\right)$。

证明：对$G\left(s\right)$取模，有：

$$\left|G\left(s\right)\right|\leq\prod_{\substack{P\in M\\ P\text{不可约}}}\left(1+\left|\frac{1}{\|P\|^{2s-k}}\right|\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\prod_{\substack{P\in M_n\\ P\text{不可约}}}\left(1+\left|\frac{1}{\|P\|^{2s-k}}\right|\right).$$

由于$\operatorname{Re}\left(s\right)\geq\frac{k+1}{2}+\varepsilon$，

$$\left|G\left(s\right)\right|\leq\prod_{n=1}^{+\infty}\prod_{\substack{P\in M_n\\ P\text{不可约}}}\left(1+\left|\frac{1}{\|P\|^{1+2\varepsilon}}\right|\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\prod_{\substack{P\in M_n\\ P\text{不可约}}}\left(1+\frac{1}{q^{n(1+2\varepsilon)}}\right).$$

令a_n是M_n中不可约多项式的个数，有：

$$\left|G\left(s\right)\right|\leq\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{q^{n(1+2\varepsilon)}}\right)^{a_n}.$$

由文献[8]的定理 2.2，知存在常数$c>0$，使得$a_n\leq c\frac{q^n}{n}$，则：

$$\left|G\left(s\right)\right|\leq\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{q^{n(1+2\varepsilon)}}\right)^{c\frac{q^n}{n}}.$$

对$\left(1+\frac{1}{q^{n(1+2\varepsilon)}}\right)^{c\frac{q^n}{n}}$关于$\frac{1}{q^{n(1+2\varepsilon)}}$做 Taylor 展开，有：

$$\left(1+\frac{1}{q^{n(1+2\varepsilon)}}\right)^{c\frac{q^n}{n}}=1+\frac{c}{nq^{2n\varepsilon}}+O\left(\frac{1}{q^{2n(1+2\varepsilon)}}\right)$$

因此，

$$\left|G(s)\right| \le \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{c}{nq^{2n\varepsilon}}+O\left(\frac{1}{q^{2n(1+2\varepsilon)}}\right)\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{nq^{2n\varepsilon}}\right)\right).$$

由

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{nq^{2n\varepsilon}}\right) \le \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{q^{2n\varepsilon}}\right)=\frac{1}{q^{2\varepsilon}-1}$$

知 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{nq^{2n\varepsilon}}\right)$ 是绝对收敛的。因此 $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{nq^{2n\varepsilon}}\right)\right)$ 是收敛的。(参考文献[9]，第二章，定理 1)

令

$$C(\varepsilon)=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+O\left(\frac{1}{nq^{2n\varepsilon}}\right)\right) \tag{2.1}$$

有 $\left|G(s)\right| \le C(\varepsilon)$。引理得证。

由 $\left|G(s)\right|$ 在 $\operatorname{Re}(s)>\frac{k+1}{2}$ 时收敛，可将 $G(s)$ 写成：

$$G(s)=\sum_{f\in M}\frac{h(f)}{\|f\|^{s}}=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{f\in M_l}h(f)q^{-ls},$$

其中 $h(f)$ 是 M 上的可乘函数。取 $u=q^{-s}$，令：

$$h_l=\sum_{f\in M_l}h(f) \tag{2.2}$$

可得：

$$G(s)=\tilde{G}(u)=\sum_{l=0}^{+\infty}h_l u^l \tag{2.3}$$

其中 $|u|<q^{-\frac{k+1}{2}}$。

关于 h_l 有下面引理：

引理 2.2.2 取 $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$，$C(\varepsilon)$ 和 h_l 别由式(2.1)、式(2.2)给出，有：

$$\left|h_l\right| \le C(\varepsilon)q^{l\left(\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}.$$

证明：取围道 Γ：$|u|=q^{-\left(\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}$。

由 Laurent 定理([10])，有：

$$h_l=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{\tilde{G}(u)}{u^{l+1}}\mathrm{d}u.$$

因此，由引理 2.2.1 有：

$$\left|h_l\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma}\frac{\left|\tilde{G}(u)\right|}{\left|u^{l+1}\right|}\left|\mathrm{d}u\right| \le \frac{1}{2\pi}C(\varepsilon)q^{(l+1)\left(\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}2\pi q^{-\left(\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}=C(\varepsilon)q^{l\left(\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}.$$

引理得证。

引理 2.2.3 取 $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$，$h_l$ 由式(2.2)给出，对任意的非负整数 t、k，有：

$$\sum_{l=0}^{t}\frac{h_l}{q^{l(k+1)}}=1+O_{\varepsilon}\left(q^{-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right).$$

证明：由 $h(f)$ 是 M 上的可乘函数，知 $h_0=h(1)=1$。因此，

$$\sum_{l=0}^{t}\frac{h_l}{q^{l(k+1)}}=1+\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{l(k+1)}}. \tag{2.4}$$

下面估计 $\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{l(k+1)}}$，由引理 2.2.2 有：

$$\left|\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{l(k+1)}}\right|\le\sum_{l=1}^{t}\frac{|h_l|}{q^{l(k+1)}}\le C(\varepsilon)\sum_{l=1}^{t}q^{l\left(-\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}.$$

因此，

$$\left|\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{l(k+1)}}\right|\le C(\varepsilon)q^{\left(-\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}\sum_{l=0}^{t-1}q^{l\left(-\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}.$$

由 $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$，知：

$$\sum_{l=0}^{t-1}q^{l\left(-\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}\le\sum_{l=0}^{+\infty}q^{l\left(-\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}=\frac{1}{1-q^{\left(-\frac{k+1}{2}+\varepsilon\right)}}\le\frac{1}{1-2^{-\frac{1}{4}}}$$

由此可得：

$$\sum_{l=1}^{t}\frac{h_l}{q^{l(k+1)}}=O_{\varepsilon}\left(q^{-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right).$$

再由式(2.4)，引理得证。

3. 定理 1.1 的证明

广义酉除数和函数 $\sigma_k^*(f)$ 在函数域 $F_q(T)$ 上的 Dirichlet 级数如下：

$$F(s)=\sum_{f\in M}\frac{\sigma_k^*(f)}{\|f\|^s}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)q^{-ns} \tag{3.1}$$

由引理 2.1.2 知可对 $F(s)$ 做 Euler 乘积，即：

$$\begin{aligned}F(s)&=\prod_{\substack{P\in M\\ P\text{不可约}}}\left(1+\frac{\sigma_k^*(P)}{\|P\|^s}+\frac{\sigma_k^*(P^2)}{\|P\|^{2s}}+\cdots\right)\\&=\prod_{\substack{P\in M\\ P\text{不可约}}}\left(1+\frac{1+\|P\|^k}{\|P\|^s}+\frac{1+\|P\|^{2k}}{\|P\|^{2s}}+\cdots\right).\end{aligned}$$

再由引理 2.1.1，有：

$$\zeta_A^{-1}(s)\zeta_A^{-1}(s-k)F(s)=\prod_{\substack{P\in M\\ P\text{不可约}}}\left(1-\frac{1}{\|P\|^{2s-k}}\right)=G(s).$$

即：

$$F(s)=\zeta_A(s)\zeta_A(s-k)G(s). \tag{3.2}$$

由引理 2.1.1，知：

$$\zeta_A(s)=\frac{1}{1-q^{1-s}} \text{ 和 } \zeta_A(s-k)=\frac{1}{1-q^{1+k-s}}$$

对其做 Taylor 展开，并取 $u=q^{-s}$，有：

$$\zeta_A(s)=\sum_{m=0}^{+\infty}q^m u^m \text{ 和 } \zeta_A(s-k)=\sum_{h=0}^{+\infty}q^{h(k+1)}u^h$$

将此及式(2.3)代入式(3.2)，有：

$$F(s)=\sum_{m=0}^{+\infty}q^m u^m\sum_{h=0}^{+\infty}q^{h(k+1)}u^h\sum_{l=0}^{+\infty}h_l u^l. \tag{3.3}$$

下面分两步计算 $\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)$：

第一步：令

$$\sum_{t=0}^{+\infty}T_t u^t=\zeta_A(s-k)G(s)=\sum_{h=0}^{+\infty}q^{h(k+1)}u^h\sum_{l=0}^{+\infty}h_l u^l.$$

则：

$$T_t=\sum_{h+l=t}q^{h(k+1)}h_l=q^{t(k+1)}\sum_{l=0}^{t}\frac{h_l}{q^{l(k+1)}}.$$

由引理 2.2.3，可得：

$$T_t=q^{t(k+1)}+O_\varepsilon\left(q^{t(k+1)-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right).$$

第二步，计算均值：

比较式(3.1)和式(3.3)的系数，可得：

$$\frac{1}{q^n}\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)=\frac{1}{q^n}\sum_{m+t=n}q^m T_t=\sum_{t=0}^{n}\frac{T_t}{q^t}.$$

由第一步结果可知：

$$\sum_{t=0}^{n}\frac{T_t}{q^t}=\sum_{t=0}^{n}q^{tk}+O_\varepsilon\left(\sum_{t=0}^{n}q^{tk-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right).$$

当 $k=0$ 时，

$$\frac{1}{q^n}\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)=n+1+O_\varepsilon\left((n+1)q^{-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right).$$

当 $k\geq 1$ 时，

$$\frac{1}{q^n}\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)=\frac{q^{(n+1)k}-1}{q^k-1}+O_\varepsilon\left(q^{-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\frac{q^{(n+1)k}-1}{q^k-1}\right).$$

又

$$\frac{q^{(n+1)k}-1}{q^k-1}=\frac{q^k}{q^k-1}q^{nk}-\frac{1}{q^k-1},$$

且$1<\frac{q^k}{q^k-1}<2$，因此，

$$\frac{1}{q^n}\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)=\frac{q^k}{q^k-1}q^{nk}+O_\varepsilon\left(q^{nk-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right).$$

对$\frac{1}{1-q^{-k}}$作 Taylor 展开，有：

$$\frac{1}{1-q^{-k}}=1+O\left(\frac{1}{q^k}\right).$$

因此，

$$\frac{1}{q^n}\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)=q^{nk}+O\left(q^{nk-k}\right)+O_\varepsilon\left(q^{nk-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right).$$

又知$(n-1)k\le nk-\frac{k+1}{2}+\varepsilon$，

故：

$$\frac{1}{q^n}\sum_{f\in M_n}\sigma_k^*(f)=q^{nk}+O_\varepsilon\left(q^{nk-\frac{k+1}{2}+\varepsilon}\right).$$

定理得证。

参考文献

[1] Hansen, R.T. and Swanson, L.G. (1979) Unitary Divisors. *Mathematics Magazine*, **52**, 217-222. https://doi.org/10.1080/0025570X.1979.11976785

[2] Ivic, A. (1977) Two Inequalities for the Sum of Divisors Functions. *Zb. Rad., Prir.-Mat. Fak., Univ. Novom Sadu.*, **7**, 17-22.

[3] Derbal, A. (2008) Grandes valeurs de la function σ(n)/σ*(n). *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, **346**, 125-128. https://doi.org/10.1016/j.crma.2007.11.011

[4] Trudgian, T. (2013) The Sum of the Unitary Divisor Function. *Publications de l'Institut Mathematique*, **97**, 175-180. https://doi.org/10.2298/PIM140617001T

[5] Cohen, E. (1960) Arithmetical Functions Associated with the Unitary Divisors of an Integer. *Mathematische Zeitschrift*, **74**, 66-80. https://doi.org/10.1007/BF01180473

[6] McCarthy, P.J. (1986) Introduction to Arithmetical Functions. Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo.

[7] Nageswara, K. (1966) On the Unitary Analogues of Certain Totients. *Monatshefte für Mathematik*, **70**, 149-154. https://doi.org/10.1007/BF01297269

[8] Rosen, M. (2002) Number Theory in Function Fields. Springer-Verlag, New York, 1-19. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6046-0

[9] Karatsuba, A.A. (1993) Basic Number Theory. 2nd Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 27-28.

[10] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 185-188.