

基于加权Schatten- $\frac{1}{2}$ 范数的低秩矩阵 近似算法

王素¹, 顾颖菁², 袁泉^{1,3}

¹南京航空航天大学理学院数学系, 江苏 南京

²南京晓庄学院商学院, 江苏 南京

³飞行器数学建模与高性能计算工业和信息化部重点实验室(南京航空航天大学), 江苏 南京
Email: wsq06272020@163.com

收稿日期: 2021年4月28日; 录用日期: 2021年5月31日; 发布日期: 2021年6月8日

摘要

本文提出加权的Schatten- $\frac{1}{2}$ 拟范数求解低秩矩阵近似问题, 该模型以加权的Schatten- $\frac{1}{2}$ 拟范数为目标函数, 观测矩阵为约束。通过基于阈值的加权不动点迭代算法求解。该方法通过分配不同权值体现奇异值的重要性可更好地近似原来的低秩假设。另一方面, 针对奇异值计算量大的问题引入约化奇异值分解。数值实验结果表明, 该方法具有较快的收敛速度。

关键词

加权Schatten- $\frac{1}{2}$ 拟范数, 低秩矩阵近似, 不动点迭代算法, 约化奇异值分解, 非凸正则化

Weighted Schatten- $\frac{1}{2}$ Norm Minimization for Low-Rank Matrix Approximation

Su Wang¹, Yingjing Gu², Quan Yuan^{1,3}

¹Department of Mathematics, College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu

²Business College, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing Jiangsu

³Key Laboratory of Mathematical Modelling and High Performance Computing of Air Vehicles (NUAA), MIIT,

文章引用: 王素, 顾颖菁, 袁泉. 基于加权 Schatten- $\frac{1}{2}$ 范数的低秩矩阵近似算法[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 998-1009.

DOI: 10.12677/pm.2021.116114

Nanjing Jiangsu
Email: wsq06272020@163.com

Received: Apr. 28th, 2021; accepted: May 31st, 2021; published: Jun. 8th, 2021

Abstract

In this paper, the low-rank matrix approximation problem is discussed with a weighted Schatten quasi-norm as the objective function, constrained by partial obtained data. The weights are introduced to measure the importance of different rank components. A weighted fixed point iterative thresholding algorithm is proposed based on the fixed point representation theory. The convergence analysis of the algorithm is provided. Numerical examples illustrate the efficiency of our method.

Keywords

The Weighted Schatten- $\frac{1}{2}$ Norm, Low-Rank Matrix Approximation, Fixed Point Iterative Algorithm, Reduced Singular Value Decomposition, Non-Convex Regularization

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

低秩矩阵近似的目的是提取关键信息代替或恢复原始数据。随着其在大数据处理中的明显优势以及理论的深入研究,低秩矩阵近似技术已广泛地应用于解决图像恢复[1]、遥感技术[2]、推荐系统[3]等各类实际问题。例如,在图像恢复中,灰度图像可以用低秩矩阵或近似低秩矩阵表示。但某些特殊情况可能导致图像的一些灰度值丢失,如破损照片中的划痕和污迹,图像中的文字覆盖等。因此有必要对丢失的灰度值进行还原,以恢复原始图像。Candès [4]将低秩矩阵近似问题描述为以下优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{rank}(X) \\ \text{s.t.} \quad & X_{i,j} = M_{i,j}, \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

$X \in R^{m \times n}$, Ω 表示待恢复矩阵 M 中可观测元素下标的集合。Candès 分析了问题(1.1)的计算复杂度并证明其为 NP-hard 问题。随后,作为 rank 函数的凸包络,核范数被提出用来逼近问题(1.1)的目标函数

$$\begin{aligned} \min \quad & \|X\|_* \\ \text{s.t.} \quad & X_{i,j} = M_{i,j}, \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 $\|X\|_* = \sum_k \sigma_k$, σ_k 为 X 的奇异值, $k = 1, \dots, r$, $r = \min\{m, n\}$ 。相关理论分析表明[4],相比于问题(1.1),凸优化问题(1.2)更容易解决。

针对问题(1.2)出现了一些突破性的方法和成果[5] [6] [7] [8],然而,核范数需要最小化所有奇异值的和,使得近似效果不太理想[9] [10] [11]。一般来说,较大的奇异值包含了数据矩阵的主要信息。图像灰

度矩阵的较大奇异值包含了主要的边缘和纹理信息，因此处理奇异值时应小幅度收缩较大的奇异值，同时尽可能多的收缩较小的奇异值[12]。为了更合理地度量不同奇异值的重要性，Gu [13]提出了加权核范数模型解决问题(1.2)。加权核范数定义为 $\|X\|_{W,*} = |\sum_k \omega_k \sigma_k|$ ，其中 $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r)^T$ ， $\omega_k \geq 0$ 为奇异值 σ_k 的非负权值， $k = 1, 2, \dots, r$ 。

在实际应用中，测量噪声普遍存在，以上方法的优化性能会下降，甚至会严重偏离初始问题(1.1)。为了更准确地逼近，非凸函数方法如 Schatten- p ($0 < p < 1$) (S_p) 拟范数被用来近似问题(1.1)中的目标函数

$$\begin{aligned} \min_X \quad & \|X\|_p^p \\ \text{s.t.} \quad & X_{i,j} = M_{i,j}, \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned} \tag{1.3}$$

$\|X\|_p = (\sum_k \sigma_k^p)^{\frac{1}{p}}$ 。问题(1.3)可由 MM (Majorization-Minimization) 迭代算法[14]计算数值解。然而，由于目标函数非凸、非光滑、非 Lipschitz 连续的性质，使得解析解难以求解[13] [15] [16] [17] [18]。另一方面，参数 p 的变化也会对问题(1.3)产生很大影响。文献[19]指出当 $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ ，近似结果相对理想，当 $p \in [0, \frac{1}{2})$ 时，结果基本不具参考性。Ding [14]提出了问题(1.3)的一阶必要性条件，并通过解析阈值的不动点算法求解其迭代式。

基于加权核范数模型和 S_p 拟范数，本文主要研究低秩矩阵近似模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \|X\|_{W,S_p}^p \\ \text{s.t.} \quad & X_{i,j} = M_{i,j}, \forall (i,j) \in \Omega \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中 $\|X\|_{W,S_p}^p = \sum_k \omega_k \sigma_k^p$ 。当 $\omega_i = 1$ 且 $p = 1$ 时，问题(1.4)退化为问题(1.2)。

论文的其他部分安排如下。在第 2 部分中，根据奇异值的重要性，构造相对应的权值以更好的逼近 rank 函数。同时指出权值对不动点迭代算法效果的影响，即当权值越小，算法的综合性能越好。第 3 节使用约化的 SVD(singular value decomposition)以减少奇异值计算量大的问题，并给出了基于阈值的不动点迭代算法及其收敛性。第 4 节，对比实验验证了算法的有效性。

下面给出本文的符号说明。不失一般性，假设 $m \geq n$ 。对于给定的矩阵 $X, Y \in R^{m \times n}$ ， $\langle X, Y \rangle = \text{trace}(Y^T X)$ ， $\text{trace}(X) = \sum_i X_{i,i}$ ， $\|X\|_F = (\sum_{i,j} X_{i,j}^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}$ 。向量 $x, y \in R^n$ ， $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ ， $\langle x, y \rangle = x^T y$ 。

2. 全局必要最优条件

为更好地刻画矩阵的低秩结构，文献[19]指出 $S_{\frac{1}{2}}$ 拟范数正则化具有低秩无偏理论的特点。在本节中，取 $p = \frac{1}{2}$ ，给出加权 $S_{\frac{1}{2}}$ 拟范数正则化模型和相应的不动点迭代算法。

阈值和加权处理

假设 $M \in R^{m \times n}$ 是一个秩为 r 的实数矩阵， $Y \in R^{m \times n}$ 是由 M 的可观测元素构成的矩阵，问题(1.4)的目的是找到最小秩矩阵 $X \in R^{m \times n}$ 近似 M 。Ding [19]通过引入 Tikhonov 正则项，将问题(1.4)描述为以下形式

$$\min_X \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(Y)\|_F^2 + \|X\|_{W,S_{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

其中 $\|X\|_{W, S_{\frac{1}{2}}}^2 = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \omega_i \delta_i$, ω_i 为权值, δ_i 为奇异值, $P_{\Omega}(\bullet)$ 为集合 Ω 的投影。

问题(2.1)的非凸和非光滑性使得问题不易求解。利用以下结论可以将问题(2.1)转化为可分离的问题进行求解。

引理 1 [20] 假设 $A, B \in R^{m \times n}$, $\sigma(A) = [\sigma_1(A), \dots, \sigma_r(A)]^T$, $\sigma(B) = [\sigma_1(B), \dots, \sigma_r(B)]^T$ 分别为矩阵 A, B 的奇异值, 并且 $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_r(A)$, $\sigma_1(B) \geq \dots \geq \sigma_r(B)$, $r = \min\{m, n\}$ 。

则不等式 $tr(A^T B) \leq tr(\sigma(A)^T \sigma(B))$ 成立当且仅当存在正交矩阵 $U \in R^{m \times r}$, $V \in R^{n \times r}$, 使得

$$A = U \Sigma_A V, B = U \Sigma_B V \quad (2.2)$$

Σ_A, Σ_B 分别为矩阵 A, B 的奇异值矩阵。

引理 2 [21] 假设 $Y \in R^{m \times n}$, 且有 $Y = U \Sigma V^T$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$, $r = \min\{m, n\}$ 。问题(2.1)最优解的 SVD 为 $X = U \Delta V^T$, 其中 $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_r)$, $\delta_i \geq \delta_j$, $i \geq j$ 。 δ_i 是如下优化问题的解

$$\begin{aligned} \min_{\delta_1, \dots, \delta_r} \sum_{i=1}^r [(\delta_i - \sigma_i)^2 + \omega_i \delta_i^{\frac{1}{2}}] \\ \text{s.t. } \delta_i \geq 0, \delta_i \geq \delta_j, i \leq j, i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (2.3)$$

引理 1 和引理 2 表明问题(2.1)可以转化为可分离问题(2.3)求解。对于问题(2.3), 讨论其一般项的求解。为文章的完整性起见, 将文献[19]的证明整理如下。

引理 3 假设 $y \in R^n$, $\lambda > 0$, 令 $f_{\lambda}(x) := (x - y)^2 + \lambda x^{\frac{1}{2}}$ 。问题

$$h_{\lambda}(y) = \arg \min_{x \geq 0} \{f_{\lambda}(x)\} \quad (2.4)$$

的解可以表示为

$$h_{\lambda}(y) = \begin{cases} h_{\lambda}(y), & y > \frac{3}{4} \lambda^{\frac{2}{3}} \\ 0, & y > \frac{3}{4} \lambda^{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad (2.5)$$

其中

$$h_{\lambda}(y) = \frac{2}{3} y \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3} \Phi_{\lambda}(y) \right) \right) \quad (2.6)$$

$$\Phi_{\lambda}(y) = \arccos \left(\frac{\lambda}{8} \left(\frac{y}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \quad (2.7)$$

证明: $\forall y \in R^n$, $\|y\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ 是连续可微的。令 $f_{\lambda}(x)$ 的一阶导数为零

$$y_i - x_i + \lambda \frac{\text{sign}(y_i)}{4\sqrt{|y_i|}} = 0 \quad (2.8)$$

当且仅当 $x > 0$ 时, (2.8) 有非负解, $x \leq 0$ 时, $f_{\lambda}(x)$ 有唯一解 $x = 0$ 。因此, 仅考虑 $x > 0$ 的情况。

令 $\sqrt{|y_i|} = \eta$, $y_i = \eta^2$ 。当 $x_i > \frac{3}{4} \lambda^{\frac{2}{3}}$ 时, 有

$$\eta^3 - x_i \eta + \frac{\lambda}{4} = 0 \tag{2.9}$$

假设 $r = \sqrt{\frac{|x_i|}{3}}$, $q = \frac{\lambda}{8}$, $\Phi = \arccos\left(\frac{q}{3}\right)$, (2.9)的三个解可以表示为: $\eta_1 = -2r \cos\left(\frac{\Phi}{3}\right)$, $\eta_2 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Phi}{3}\right)$, $\eta_3 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\Phi}{3}\right)$ [11]。经验证, $\eta_3 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\Phi}{3}\right)$ 是问题(2.4)的最优解, 且解的形式为

$$y_i = \frac{2}{3} x_i \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3} \lambda \Phi_\lambda(x_i)\right) \right) \tag{2.10}$$

当 $x_i > \frac{3}{4} \lambda^{\frac{2}{3}}$ 时, 证明与上述类似。

定义 1 $\forall \lambda > 0$, 向量阈值函数定义为

$$H_\lambda(x) := (h_\lambda(x_1), h_\lambda(x_2), \dots, h_\lambda(x_n)), \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \tag{2.11}$$

$h_\lambda(x)$ 的形式如(2.5)所示。

假设秩为 r 的矩阵 $Y \in R^{m \times n}$ 的 SVD 为 $Y = U \Sigma V^T$, $U \in R^{m \times r}$, $V \in R^{n \times r}$ 均为列正交矩阵, $\Sigma \in R^{r \times r}$ 为奇异值非增的对角矩阵。

对 $\forall \lambda > 0$, 由向量阈值函数可以定义矩阵阈值函数

$$H_\lambda(Y) := U \sum_{H_\lambda} V^T \tag{2.12}$$

$\Sigma_{H_\lambda} = \text{diag}(H_\lambda(\sigma_1), \dots, H_\lambda(\sigma_r))$ 。因此, 问题(2.1)可以由矩阵阈值函数求解。本节的后续内容将会介绍由(2.12)表示的问题(2.1)解的形式以及权重对奇异值的影响。

引理 3 给出了当矩阵维数为 1 时的解的情况, 现在考虑矩阵 $Y \in R^{m \times n}$ 。

定理 1 当且仅当权重满足 $0 \leq \omega_1 \leq \dots \leq \omega_r$ 时, 问题(2.1)最优解的奇异值满足 $\delta_1 \geq \dots \geq \delta_r$ 。

证明: 由引理 2 和引理 3, 问题(2.1)可分离出子问题

$$f_\delta(x) := (\sigma - \delta)^2 + \omega \delta^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

文献[19]指出, $f_\delta(x)$ 有唯一解 $h_\omega(\delta)$ 。

首先, 证明当 $\omega_i < \omega_j$ 时, 有 $h_{\omega_i} \geq h_{\omega_j}$ 。

当 $y < \frac{3}{4} \omega_i^{\frac{2}{3}}$ 且 $y < \frac{3}{4} \omega_j^{\frac{2}{3}}$ 时, 由(2.5), 有 $h_{\omega_i} = h_{\omega_j} = 0$ 。结论 $h_{\omega_i} \geq h_{\omega_j}$ 成立。

当 $y > \frac{3}{4} \omega_i^{\frac{2}{3}}$ 且 $y < \frac{3}{4} \omega_j^{\frac{2}{3}}$ 时, 显然有 $h_{\omega_j} = 0$ 。另一方面, 由引理 3 的证明, 当 $y > 0$ 时有 $h_{\omega_i} > 0$ 。因此, 结论 $h_{\omega_i} \geq h_{\omega_j}$ 成立。

当 $y > \frac{3}{4} \omega_i^{\frac{2}{3}}$ 且 $y > \frac{3}{4} \omega_j^{\frac{2}{3}}$ 时, 通过函数 $h_\omega(\delta)$ 的单调性证明结论。因为 $y > \frac{3}{4} \omega^{\frac{2}{3}}$, 且 $\frac{\omega}{8} \left(\frac{x}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \in (0, 1)$,

则由(2.7)可得 $\Phi_\omega(y) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 由此可得函数 $\cos\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \Phi_\omega(y)\right)$ 单调递减。因此, $h_{\omega_i} \geq h_{\omega_j}$ 成立。

然后, 对给定 $\omega > 0$, 以下不等式显然成立

$$\frac{2}{3}y_i \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3}\Phi \right) \right) > \frac{2}{3}y_j \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3}\Phi \right) \right), \forall y_i > y_j.$$

综合两方面的证明, 可以得到结论

$$h_{\omega_i}(y_i) \geq h_{\omega_j}(y_j), \forall \omega_i < \omega_j, y_i > y_j.$$

证毕。

文献[14] [22]将矩阵问题转化为易于求解的向量问题, 同时表明非凸问题可以用阈值法解决。

引理 4 [14] 令 $\lambda > 0$, 假设秩为 r 的矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 的 SVD 为 $Y = U \sum_Y V^T$, 对应的矩阵阈值函数为

$$H_\lambda(Y) := U \sum_{H_\lambda(\sigma)} V^T \tag{2.14}$$

则

$$H_\lambda(Y) := \arg \min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \left\{ \|X - Y\|_F^2 + \lambda \|X\|_{\frac{1}{2}} \right\} \tag{2.15}$$

3. 最优算法及其收敛性分析

本节将给出非凸、非光滑和非 Lipschitz 连续的 $S_{\frac{1}{2}}$ 拟范数正则化问题全局最优解的不动点表示理论。
 $\forall \mu > 0, Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 定义

$$\begin{aligned} C_W(X) &:= \|P_\Omega(X) - P_\Omega(Y)\|_F^2 + \|X\|_{W, \frac{1}{2}}^2 \\ C_{W, \mu} &:= \mu \left(C_W(X) - \|P_\Omega(X) - P_\Omega(Z)\|_F^2 \right) + \|X - Z\|_F^2. \\ B_\mu(Z) &:= Z + \mu \left(P_\Omega(Y) - P_\Omega(X^*) \right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

定理 2 对 $\forall \omega_i, \mu > 0$, 假设正则化模型(2.1)的最优解为 X^* 。令

$$B_\mu(X^*) := X^* + \mu \left(P_\Omega(Y) - P_\Omega(X^*) \right)$$

且 $B_\mu(X^*)$ 的 SVD 为

$$U^* \sum_{B_\mu(X^*)} (V^*)^T$$

则

$$X^* \in H_W(B_\mu(X^*)) \tag{3.2}$$

因此, 最优解的第 i 个奇异值为

$$\sigma_i(X^*) = \begin{cases} h_{\omega_i \mu^{\frac{1}{2}}}(\sigma_i(B_\mu(X^*))), & \sigma_i(B_\mu(X^*)) > \frac{\sqrt[3]{54}}{4}(\omega_i \mu)^{\frac{2}{3}} \\ 0, & \sigma_i(B_\mu(X^*)) \leq \frac{\sqrt[3]{54}}{4}(\omega_i \mu)^{\frac{2}{3}} \end{cases} \tag{3.3}$$

其中

$$h_{\omega_i}(y) = \begin{cases} h_{\omega_i \mu^{\frac{1}{2}}}(y), & y > \frac{\sqrt[3]{54}}{4}(\omega_i \mu)^{\frac{2}{3}} \\ 0, & y \leq \frac{\sqrt[3]{54}}{4}(\omega_i \mu)^{\frac{2}{3}} \end{cases} \tag{3.4}$$

$$h_{\omega_i, \frac{1}{2}}(\sigma_i) = \frac{2}{3} y \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2}{3} \Phi_{\omega_i} \right) \right) \tag{3.5}$$

$$\Phi_{\omega_i}(y) = \arccos \left(\frac{\omega_i \mu}{8} \left(\frac{y}{\sqrt[3]{54}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \tag{3.6}$$

证明:

$$\begin{aligned} C_{W, \mu}(X, Z) &:= \mu \left(C_W(X) - \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(Z)\|_F^2 \right) + \|X - Z\|_F^2 \\ &= \|X\|^2 - 2 \langle X, Z + \mu(P_{\Omega}(Y) - P_{\Omega}(Z)) \rangle + \mu \|X\|_{W, S_{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \|Z\|^2 + \mu \|P_{\Omega}(Y)\|_F^2 - \mu \|P_{\Omega}(Z)\|_F^2 \\ &= \|X\|^2 - 2 \langle X, B_{\mu}(Z) \rangle + \mu \|X\|_{W, S_{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \|Z\|^2 + \mu \|P_{\Omega}(Y)\|_F^2 - \mu \|P_{\Omega}(Z)\|_F^2 \\ &= \|X - B_{\mu}(Z)\|_F^2 + \mu \|X\|_{W, S_{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} + \|Z\|^2 \\ &\quad + \mu \|P_{\Omega}(Y)\|_F^2 - \mu \|P_{\Omega}(Z)\|_F^2 - \|B_{\mu}(Z)\|_F^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.7)的最后一个等式表明, 最小化 $C_{W, \mu}(X, Z)$ 相当于求解问题

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{m \times n}} \left\{ \|X - B_{\mu}(Z)\|_F^2 + \mu \|X\|_{W, S_{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}} \right\}. \tag{3.8}$$

假设 X^* 是 $C_W(X)$ 的全局最优解, 由文献[11]可知, X^* 也是 $C_{W, \mu}(X, X^*)$ 的全局最优解。显然(3.2)成立。

类似于问题(2.3)的求解方法, 问题(3.8)可分离的求解

$$\min \left\{ x_i^2 - 2x_i [B_{\mu}(Z)]_i + \mu \omega_i |x_i|^{\frac{1}{2}} \right\} \tag{3.9}$$

令(3.9)函数的一阶导数为 0

$$x_i^2 - [B_{\mu}(Z)]_i + \mu \omega_i \frac{\text{sign}(x_i)}{4\sqrt{|x_i|}} = 0 \tag{3.10}$$

由引理 3 的证明, $[B_{\mu}(Z)]_i$ 满足不等式 $[B_{\mu}(Z)]_i > \frac{3}{4}(\omega_i \mu)^{\frac{2}{3}}$ 。文献[11]表明只需比较 $f_{\omega_i} \left(h_{\omega_i, \frac{1}{2}} \right)$ 和 $f_{\omega_i}(0)$ 即可得到原问题的最优解。经验证, 当且仅当 $[B_{\mu}(Z)]_i \leq \frac{\sqrt[3]{54}}{4}(\omega_i \mu)^{\frac{2}{3}}$ 时有 $f_{\omega_i} \left(h_{\omega_i, \frac{1}{2}} \right) \leq f_{\omega_i}(0)$ 。后续证明与引理 3 类似。

证毕。

定理 2 给出了问题(1.4)最优解的形式。以上证明表示可以用阈值不动点迭代算法求解非凸、非光滑、非 Lipschitz 问题(1.4)。不动点算法的基本框架描述如下。

算法 1 $S_{\frac{1}{2}}$ 范数阈值不动点迭代算法

1. 给定矩阵 $M \in R^{m \times n}$; $X_0 = P_{\Omega}(M)$
2. $i = 0$
3. while $\frac{\|X_{k+1} - X_k\|_F}{\max\{1, \|X_k\|_F\}} \geq \text{xtol}$, $i \leq \text{maxiter}$
4. $X_{k+1} = H_{\mu W}(X_k - \mu(P_{\Omega}(X_k) - P_{\Omega}(Y)))$
5. $i = i + 1$
6. end while
7. 令 $X = X_{k+1}$
8. 输出 X

优化问题的结果取决于正则化参数的选择，即权重向量。将第 k 次迭代的 ω_k 取为

$$\omega_k = \frac{\sqrt{96}}{9\mu_0} \left([\sigma(X_k)]_{r_k} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.11)$$

r_k 表示矩阵 X_k 的秩。为延续 ω_k 的取值，将向量 ω_k 更新为

$$\omega_{k+1} = \max \left\{ \bar{\lambda}, \min \left\{ \eta \omega_k, \frac{\sqrt{96}}{9\mu_0} \left([\sigma(X_k)]_{r_k} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \right\} \quad (3.12)$$

其中 $\eta \in (0, 1)$ 为常数， $\bar{\lambda}$ 为足够小的正实数。显然序列 $\{\omega_k\}$ 单调减小且收敛。采用延续技术改进的不动点算法如算法 2 所示。

算法 2 修正的 $S_{\frac{1}{2}}$ 范数阈值不动点迭代算法

1. 给定矩阵 $M \in R^{m \times n}$; $X_0 = P_{\Omega}(M)$, $\omega_i > 0$, $\mu \in (0, 1]$, I_m , $\bar{\omega}_k$
2. for $j = 1 : \text{maxiter}$
3. $\omega = \omega_j$, $i = 0$
4. while $\frac{\|X_{k+1} - X_k\|_F}{\max\{1, \|X_k\|_F\}} \geq \text{xtol}$, $i \leq \text{maxiter}$
5. $B = X_i + \mu(P_{\Omega}(X_k) - P_{\Omega}(Y))$, $B = U \sum V^T$
6. $X_i = U \sum_{H_{\mu, W}} V^T$, $i = i + 1$
7. end while
8. 输出 $r_k = \text{rank}(X_i)$, σ_k , X_i
9. $\omega_{i+1} = \max \left\{ \bar{\omega}_i, \min \left\{ \eta \omega_i, \frac{\sqrt{96}}{9\mu_0} \left([\sigma(X_i)]_{r_i} \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \right\}$
10. 若 $\omega = \bar{\omega}_j$
11. 令 $X = X_{k+1}$
12. 输出 X

在算法 2 中，主要的计算量来自奇异值分解。Drineas [23] 提出了一种近似的 SVD 算法代替传统的 SVD 以减少计算成本，完整的阈值不动点迭代算法如算法 3 所示。

算法 3 修正的 $S_{\frac{1}{2}}$ 范数阈值不动点迭代算法(WHFPA)

1. 给定矩阵 $M \in R^{m \times n}$; $X_0 = P_{\Omega}(M)$, $\omega_1 > 0$, $\mu \in (0,1]$, I_m , $\bar{\omega}_k$
2. for $j = 1$:maxiter
3. $\omega = \omega_j$, $i = 0$
4. while $\frac{\|X_{k+1} - X_k\|_F}{\max\{1, \|X_k\|_F\}} \geq xtol$, $i \leq \text{maxiter}$
5. $B = X_i + \mu(P_{\Omega}(X_k) - P_{\Omega}(Y))$, $B = U \sum V^T$ (约化的 SVD)
6. $X_i = U \sum_{\mu, \omega} V^T$, $i = i + 1$
7. end while
8. 输出 $r_k = \text{rank}(X_i)$, σ_k , X_i
9. $\omega_{i+1} = \max\left\{\bar{\omega}_i, \min\left\{\eta\omega_i, \frac{\sqrt{96}}{9\mu_0} \left([\sigma(X_i)]_{r_i}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\right\}$
10. 若 $\omega = \bar{\omega}_j$
11. 令 $X = X_{k+1}$
12. return X

下面给出算法 3 的收敛性分析。

- 引理 5 [19]** 给定 $\lambda > 0$, $\mu \in (0,1]$, $\{X_k\}$ 为(3.2)生成的序列, 则
- (1) 假设 X^* 为 $\{X_k\}$ 的任一聚点, 则 $C_{\lambda}(X_k)$ 单调递减收敛于 $C_{\lambda}(X^*)$,
 - (2) X_k 是渐进正则的, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|X_{k+1} - X_k\| = 0$,
 - (3) $\{X_k\}$ 的任一聚点均为问题(1.4)的全局最优解。

4. 实验结果与分析

在本节中, WHFPA 的有效性将通过一些实验来说明。

在 WHFPA 和 HFPA (基于阈值的不动点迭代算法)中, 终止准则取为

$$\frac{\|X_{k+1} - X_k\|_F}{\max\{1, \|X_k\|_F\}} < xtol,$$

评估 WHFPA 和 HFPA 结果 X 与原始矩阵 M 之间的接近度

$$rel := \frac{\|M - \bar{X}\|_F}{\|M\|_F}.$$

在约化 SVD 算法中, 设置样本 cs 的个数随矩阵的秩而变化。另外, 初始矩阵 X_0 由矩阵可观测元素组成, 初始权值 W_0 设为初始矩阵 X_0 的奇异值。生成随机矩阵的方法如下。随机生成秩为 r 的矩阵 $M_L \in R^{m \times r}$, $M_R \in R^{n \times r}$, 则 $M = M_L M_R^T$ 。 $SR = \frac{P}{mn}$ 为采样比, p 是采样数。此外, 对于矩阵类型的定义[19]

如下。一个矩阵称为“简单”的满足: $\frac{P}{r(m+n-r)} \times SR > 0.5$, $\frac{P}{r(m+n-r)} > 2.6$, “复杂”矩阵定义为

$$\frac{P}{r(m+n-r)} \times SR \leq 0.5, \quad \frac{P}{r(m+n-r)} \leq 2.6。$$

由于 S_1 阈值不动点迭代算法比 SVP (Singular Value Projection) [24], MSS (Muti-Schatten p norm Surrogate) [25], SVT [26] (Singular Vaule Thresholding)等方法更有效[19], 其中 SVT 解决的是秩最小化问题, SVP 用于 Tikhonov 正则化问题, MSS 用于解决 Schatten-p 正则化问题。本文只比较 HFPA 和 WHFPA

两种方法, 与其他方法的比较不再赘述。在相同的测试环境下, 算法时间越短, 准确率越高, 效果越好。给出了各矩阵在维数、秩和抽样比上结果的差异。

4.1. 相同的尺寸, 不同的抽样比和等级

取 $m = n = 100$, 设 $xtol = 10^{-6}$, 矩阵 M 的秩 r 从 8 增加到 20, 抽样比 SR 分别为 0.307、0.451、0.589、0.720。

对于每个子问题, 随机生成 100 个矩阵进行测试, 结果如表 1 所示。在约化 SVD 算法中设置 $cs = 35$, $\mu = 0.9$ 。实验结果表明, HFPA 和 WHFPA 的精度相似, 在 10^{-6} 左右。在时间上, WHFPA 将会比 HFPA 整体短一些。一般来说, 两种方法相比, 在维数小且矩阵为“困难”的情况下, WHFPA 比 HFPA 更有效。

Table 1. Comparison of HFPA and WHFPA for randomly created small but hard matrices ($m = n = 100$, $r = 8:4:20$, $xtol = 10^{-6}$)

表 1. HFPA 和 WHFPA 关于随机矩阵的比较 ($m = n = 100$, $r = 8:4:20$, $xtol = 10^{-6}$)

r	SR	solver	time	rel	cs	μ
8	0.307	HFPA	0.6036	6.2431e-5	35	0.9
		WHFPA	0.4715	1.2672e-5	35	0.9
12	0.4451	HFPA	0.7113	7.2465e-6	35	0.9
		WHFPA	0.5980	6.9496e-6	35	0.9
16	0.589	HFPA	0.7417	2.7190e-6	35	0.9
		WHFPA	0.6434	3.2415e-6	35	0.9
20	0.720	HFPA	0.7437	8.4472e-6	35	0.9
		WHFPA	0.6528	6.7380e-6	35	0.9

4.2. 相同的抽样比, 不同的维度和等级

我们将维数从 500 增加到 2000, 抽样比为 0.570, 取 $xtol = 10^{-4}$ 。

随机生成 100 个矩阵进行测试, 最终得到如下结果, 详见表 2。在表 2 中, 设置 $\mu = 0.24$, 在约化 SVD 中设置可变参数 cs 。HFPA 和 WHFPA 的精度相似, 在 10^{-4} 左右。在时间上, 维数越大, WHFPA 与 HFPA 差距越明显。两种方法相比, 在维数大且矩阵为“困难”的情况下, WHFPA 比 HFPA 更有效。

Table 2. Comparison of HFPA and WHFPA for randomly created large but hard matrices ($SR = 0.570$, $xtol = 10^{-4}$)

表 2. HFPA 和 WHFPA 关于随机矩阵的比较 ($SR = 0.570$, $xtol = 10^{-4}$)

$m = n$	r	solver	time	rel	cs	μ
500	50	HFPA	3.8010	7.5474e-4	90	0.24
		WHFPA	3.4258	8.0933e-4	90	0.24
800	80	HFPA	10.9986	6.0489e-4	120	0.24
		WHFPA	10.2138	5.8972e-4	120	0.24
1000	50	HFPA	12.5033	4.3196e-4	100	0.24
		WHFPA	11.4922	8.0777e-4	100	0.24
2000	100	HFPA	53.7574	8.7843e-4	200	0.24
		WHFPA	48.8033	9.1057e-4	200	0.24

4.3. 有噪声的随机矩阵

假设带噪声的矩阵定义为

$$B_{ij} = M_{ij} + Z_{ij}$$

其中, 矩阵 $Z \in R^{m \times n}$ 是方差为 σ , 零均值的高斯矩阵。设置 $\mu = 0.9$, 分别在方差 10^{-2} 和 10^{-1} 的噪声矩阵下进行试验, 矩阵维数设置为 $m = n = 1000$, 取 $xtol = 10^{-4}$ 。实验数据详见表 3。WHFPA 比 HFPA 的精度高, 在 10^{-4} 左右。在时间上, HFPA 是 WHFPA 的 2 倍。两种方法相比, 在有噪声的情况下, WHFPA 比 HFPA 更有效。

Table 3. Comparison of HFPA and WHFPA for randomly created noise disturbance matrices ($m = n = 1000$, $xtol = 10^{-4}$)
表 3. HFPA 和 WHFPA 关于有噪声随机矩阵的比较($m = n = 1000$, $xtol = 10^{-4}$)

noise σ	$m = n$	r	cs	μ	SR	HFPA		WHFPA	
						time	rel	time	rel
10^{-2}	1000	10	50	0.9	0.119	28.9859	2.00e-03	13.0047	1.90e-03
		50	100	0.9	0.390	44.3209	1.94e-03	20.3113	1.95e-03
		150	200	0.9	0.570	67.2349	1.52e-03	33.6021	1.51e-03
		200	300	0.9	0.555	82.6623	1.46e-03	37.6521	1.42e-03
10^{-1}	1000	10	50	0.9	0.119	26.4703	2.00e-02	11.9425	1.90e-02
		50	100	0.9	0.390	44.4525	1.87e-02	20.3280	1.89e-02
		150	200	0.9	0.570	67.2419	1.49e-02	30.7486	1.50e-02
		200	300	0.9	0.555	82.7340	1.38e-02	41.0454	1.38e-02

5. 结论

本文利用 S_1 拟范数正则化方法, 提出了一种基于奇异值贡献度的权重处理方法。针对非凸、非光滑、非 Lipschitz 优化问题, 首先给出了阈值不动点迭代算法中权值对奇异值的影响, 然后给出了经过延续处理以及约化奇异值分解的改进算法。实验结果表明, WHFPA 性能优于 HFPA, 说明了算法的有效性。

参考文献

- [1] Li, W., Zhao, L. and Lin, Z. (2015) Non-Local Image Inpainting Using Low-Rank Matrix Completion. *Computer Graphics Forum*, **34**, 111-122. <https://doi.org/10.1111/cgf.12521>
- [2] Candes, E.J. and Recht, B. (2009) Exact Matrix Completion via Convex Optimization. *Foundations of Computational Mathematics*, **9**, 717-772. <https://doi.org/10.1007/s10208-009-9045-5>
- [3] Gogna, A. and Majumdar, A. (2015) Matrix Completion Incorporating Auxiliary Information for Recommender System Design. *Expert Systems with Applications*, **42**, 5789-5799. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.04.012>
- [4] Candes, E.J. and Emmanuel, J. (2010) The Power of Convex Relaxation: Near-Optimal Matrix Completion. *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**, 2053-2080. <https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2044061>
- [5] Candes, E.J. and Recht, B. (2009) Exact Matrix Completion via Convex Optimization. *Foundations of Computational Mathematics*, **9**, 717-772. <https://doi.org/10.1007/s10208-009-9045-5>
- [6] Recht, B., Fazel, M. and Parrilo, P.A. (2010) Guaranteed Minimum-Rank Solutions of Linear Matrix Equations via Nuclear Norm Minimization. *SIAM Review*, **52**, 471-501. <https://doi.org/10.1137/070697835>
- [7] Hu, Y., Zhang, D. and Ye, J. (2013) Fast and Accurate Matrix Completion via Truncated Nuclear Norm Regularization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **35**, 2117-2130. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2012.271>

- [8] Zhang, D., Hu, Y. and Ye, J. (2013) Matrix Completion by Truncated Nuclear Norm Regularization. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 35, 2192-2199.
- [9] Candes, E.J. and Plan, Y. (2010) Matrix Completion with Noise. *Proceedings of the IEEE*, **98**, 925-936. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2009.2035722>
- [10] Koltchinskii, V., Lounici, K. and Tsybakov, A.B. (2011) Nuclear-Norm Penalization and Optimal Rates for Noisy Low-Rank Matrix Completion. *The Annals of Statistics*, **39**, 2302-2329. <https://doi.org/10.1214/11-AOS894>
- [11] Xu, Z., Chang, X., Xu, F. and Zhang, H. (2012) $L_{\frac{1}{2}}$ Regularization: A Thresholding Representation Theory and a Fast Solver. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **23**, 1013-1027. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2012.2197412>
- [12] Gu, S., Zhang, L. and Zuo, W. (2014) Weighted Nuclear Norm Minimization with Application to Image Denoising. *2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Vol. 1, 2862-2869. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2014.366>
- [13] Oliveira, J.P., Bioucas-Dias, J.M. and Figueiredo, M.A.T. (2009) Adaptive Total Variation Image Deblurring: A Majorization Minimization Approach. *Signal Processing*, **89**, 1683-1693. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2009.03.018>
- [14] Lu, Z., Zhang, Y. and Liu, X. (2015) Penalty Decomposition Methods for Rank Minimization. *Optimization Methods and Software*, **30**, 531-558. <https://doi.org/10.1080/10556788.2014.936438>
- [15] Lai, M., Xu, Y. and Yin, W. (2013) Improved Iteratively Reweighted Least Squares for Unconstrained Smoothed l_p Minimization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **51**, 927-957. <https://doi.org/10.1137/110840364>
- [16] Mohan, K. and Fazel, M. (2012) Iterative Reweighted Algorithms for Matrix Rank Minimization. *Journal of Machine Learning Research*, **13**, 3441-3473.
- [17] Rao, G., Peng, Y. and Xu, Z. (2013) Robust Sparse and Low-Rank Matrix Decomposition Based on the $S_{\frac{1}{2}}$ Modeling. *Science China-Information Sciences*, **43**, 733-748.
- [18] Xu, Z.B., Guo, H., Wang, Y. and Zhang, H. (2012) The Representation of $L_{\frac{1}{2}}$ Regularizer among $L_{\frac{1}{2}}(0 < q < 1)$ Regularizer: An Experimental Study Based on Phase Diagram. *Acta Automatica Sinica*, **38**, 1225-1228. <https://doi.org/10.3724/SP.J.1004.2012.01225>
- [19] Peng, D., Xiu, N. and Yu, J. (2017) $\frac{1}{2}$ Regularization Methods and Fixed Point Algorithms for Affine Rank Minimization Problems. *Computational Optimization and Applications*, **67**, 543-569. <https://doi.org/10.1007/s10589-017-9898-5>
- [20] Mirsky, L. (1975) A Trace Inequality of John von Neumann. *Monatshefte für Mathematik*, **79**, 303-306. <https://doi.org/10.1007/BF01647331>
- [21] Xie, Y., Gu, S. and Liu, Y. (2016) Weighted Schatten p-Norm Minimization for Image Denoising and Background Subtraction. *IEEE Transactions on Image Processing*, **25**, 4842-4857. <https://doi.org/10.1109/TIP.2016.2599290>
- [22] Ma, S., Goldfarb, D. and Chen, L. (2011) Fixed Point and Bregman Iterative Methods for Matrix Rank Minimization. *Mathematical Programming*, **128**, 321-353. <https://doi.org/10.1007/s10107-009-0306-5>
- [23] Drineas, P., Kannan, R. and Mahoney, M.W. (2006) Fast Monte Carlo Algorithms for Matrices q: Computing Low-Rank Approximations to a Matrix. *SIAM Journal on Computing*, **36**, 158-183. <https://doi.org/10.1137/S0097539704442696>
- [24] Jain, P., Meka, R. and Dhillon, I. (2010) Guaranteed Rank Minimization via Singular Value Projection. *Proceedings of the Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 1, 937-945.
- [25] Cai, J.F., Candes, E.J. and Shen, Z.W. (2010) A Singular Value Thresholding Algorithm for Matrix Completion. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 1956-1982. <https://doi.org/10.1137/080738970>
- [26] Xu, C., Lin, Z.C. and Zha, H.B. (2017) A Unified Convex Surrogate for the Schatten-p Norm. *Proceedings of the Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence*, Vol. 25, 926-932.