

图与其导出子图的双罗马控制数的研究

刘慧灵^{1*}, 边红^{1#}, 于海征², 魏丽娜¹

¹新疆师范大学, 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆大学, 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2021年12月4日; 录用日期: 2022年1月11日; 发布日期: 2022年1月18日

摘要

令图 $G=(V,E)$ 是简单连通图, V 和 E 分别为图 G 的顶点集和边集。若函数 $f:V \rightarrow \{0,1,2,3\}$ 满足条件: i) 对任意一点 $v \in V$, 若 $f(v)=0$, 存在 $v_1, v_2 \in N(v)$, 使得 $f(v_1)=f(v_2)=2$, 或存在 $\omega \in N(v)$, 使得 $f(\omega)=3$; ii) 对任意一点 $v \in V$, 若 $f(v)=1$, 存在 $\omega \in N(v)$, 使得 $f(\omega) \geq 2$, 则称函数 f 为图 G 的双罗马控制函数。图 G 的双罗马控制函数的权值 $f(V)$ 是图 G 中各点权值之和, 图 G 的双罗马控制数是图 G 双罗马控制函数的最小权值, 用 $\gamma_{dr}(G)$ 表示。本文主要通过构造的方法证明了, 对于任意的正整数 a 和 b , 都存在一类图 G 及其导出子图 H , 使得 $\gamma_{dr}(G)=a$ 且 $\gamma_{dr}(H)=b$ 。这个结果表明了一个图的双罗马控制数与其导出子图的双罗马控制数之间没有关系。

关键词

双罗马控制, 双罗马控制数, 双罗马控制数函数

Research on the Double Roman Domination Numbers of Graph and Its Induced Subgraphs

Huilin Liu^{1*}, Hong Bian^{1#}, Haizheng Yu², Lina Wei¹

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

²College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

*第一作者。

#通讯作者。

Abstract

Let $G=(V,E)$ be a connected simple graph with vertex set V and edge set E . If a function $f:V \rightarrow \{0,1,2,3\}$ satisfies with the following conditions: i) for $\forall v \in V$, if $f(v)=0$, then there exist $v_1, v_2 \in N(v)$ such that $f(v_1)=f(v_2)=2$ or there exist $\omega \in N(v)$ such that $f(\omega)=3$; ii) for $\forall v \in V$, if $f(v)=1$, then there exist $\omega \in N(v)$ such that $f(\omega) \geq 2$, the function f is called a double Roman dominating function. The weight $f(V)$ of a double Roman dominating function on G is the sum of the weights of all vertices in G , and the minimum weight of a double Roman dominating function on G is the double Roman domination number, denoted by $\gamma_{dr}(G)$. In this paper, for any two positive integers a and b , by using the method of constructing, we show that there exist a class of graph G and its induced subgraph H such that $\gamma_{dr}(G)=a$ and $\gamma_{dr}(H)=b$. This result shows that there is no relation between the double Roman domination numbers of a graph and its induced subgraphs.

Keywords

Double Roman Domination, Double Roman Domination Number, Double Roman Dominating Function

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设图 $G=(V,E)$ 是一个简单无向图, V 和 E 分别为图 G 的顶点集和边集. 若图 G 满足以下情形, 则称函数 $f:V \rightarrow \{0,1,2,3\}$ 为图 G 的双罗马控制函数, 简称为 DRDF. 在函数 f 下, 赋值为 i 的点的集合用 $V_i, i=0,1,2,3$ 表示, 且满足如下两个条件:

- i) 若 $v \in V_0$, 则点 v 至少有两个邻点在 V_2 中或至少有一个邻点在 V_3 中;
- ii) 若 $v \in V_1$, 则点 v 至少有一个邻点在 $V_2 \cup V_3$ 中.

双罗马控制函数的权 $f(V)$ 是图 G 中各点权值之和, 即 $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$, 图 G 的双罗马控制数是图 G 双罗马控制函数的最小权值, 用 $\gamma_{dr}(G)$ 表示.

罗马控制函数的研究起源于 I. Stewart [1] 在 1999 年发表的一篇文章, 这一研究是将公元四世纪的古罗马帝国所采取的安全防御措施转化成了一个数学问题, 即罗马控制问题: 把罗马帝国的一个地区看作我们所研究的图中的一个顶点, 把连接各地区的路线看作图中对应顶点间关联的边. 若一个地区有军团驻扎则该地区就是安全的, 否则就是不安全的, 安全地区的军团可被派遣至相邻的不安全地区, 但只有一个军团的地区不能将其向外派遣, 因为调出军团后, 原地区将不被保护. 最高统治者想用尽可能少的军团达到理想的安全防御状态. M. A. Henning [2] 等在 2003 年提出了一个能达到给养军团费用最节约, 且仍能够防御罗马帝国的新策略, 将罗马控制问题转化成数学问题, 从而引入了弱罗马控制的概念, 并

研究了其相应的性质。在 2004 年, E. J. Cockayne [3] 等提出了罗马控制函数的定义, 一个权值为 $\gamma_R(G)$ 的罗马控制函数对应着一个最优的军团驻扎方案。为了找到更安全的防御措施, 王彤歌[4] 等人在 2007 年把图 G 的罗马控制推广为图 G 的 k -罗马控制问题, 并得到了一些 3-罗马控制函数的性质。2016 年 M. Chellali [5] 等人首次提出了罗马{2}-控制函数的概念, 若图 G 的一个罗马{2}-控制函数 f 满足 $V_1 \cup V_2$ 是一个独立集, 则称 f 为图 G 的一个独立罗马{2}-控制函数。同一年 Beeler [6] 等人提出了双罗马控制的概念, 这一防御策略使罗马帝国某一地区遭受袭击时, 能够得到至少两个军团的支援, 起到了双倍保护的作用。2018 年, V. Anu 和 S. A. Lakshmanan [7] 用双罗马控制数给出了双罗马控制数在 Mycielskian 图上的一个界, 并且分析了增加一条边之后对图的双罗马控制数所产生的影响。

2. 基本概念

对于图上 G 的一点 v , 若 v 与图 G 中其余所有点相邻, 则 v 点叫做图 G 的 universal 点, 若 v 仅与图 G 中其余任意一点相邻, 则 v 点叫做图 G 的悬挂点。一条有 n 个点的路记为 P_n , 其顶点集为 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 其中 v_i 与 v_{i+1} 相邻 ($i=1, 2, \dots, n-1$)。若在上述情形下满足 v_n 与 v_1 相邻 ($n \geq 3$), 则称其为 n 长圈, 用 C_n 表示。若一个图的顶点集可分为两个互不相交的非空子集 X 和 Y , 使得每条边都有一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 满足这种分类条件的图称为二部图; 若在一个二部图中 X 中的每个顶点都与 Y 中的每个顶点相邻, 这样的图称为完全二部图; 若 $|X|=p$ 而 $|Y|=q$, 则这样的完全二部图记为 $K_{p,q}$ 。一个没有边的图被称为完全不连通图。仅通过删除图 G 上的一些顶点得到的子图 H 称为图 G 的导出子图, 图 G 称为其导出子图 H 的母图。

引理 1 [8] 对于 $n \geq 1$,

$$\gamma_{dR}(P_n) = \begin{cases} n, & \text{若 } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ n+1, & \text{若 } n \equiv 1, 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

引理 2 [8] 对于 $n \geq 3$,

$$\gamma_{dR}(C_n) = \begin{cases} n, & \text{若 } n \equiv 0, 2, 3, 4 \pmod{6}, \\ n+1, & \text{若 } n \equiv 1, 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

引理 3 [9] 在权值为 $\gamma_{dR}(G)$ 的双罗马控制函数中, 没有点赋值为 1。

在不失一般性的情况下, 当确定 $\gamma_{dR}(G)$ 的值时, 对于所考虑的双罗马控制函数可假设 $V_1 = \emptyset$ 。以下是已经得出的一些结论:

- 1) 对于一个至少有两个点的图 G , 若 $\gamma_{dR}(G) = 3$, 当且仅当图 G 有一个 universal 点;
- 2) 若图 G 是一个阶为 n 的完全不连通图, 则 $\gamma_{dR}(G) = 2n$;
- 3) 对于完全二部图 $K_{p,q}$, 若 $p, q \geq 3$, 则 $\gamma_{dR}(G) = 6$, 对于两种特殊情况的图, $\gamma_{dR}(K_{1,q}) = 3$; $\gamma_{dR}(K_{2,q}) = 4$ 。

3. 主要结果

由于不存在双罗马控制数等于 1 的图, 并且对于任意一个图 G , 若 $\gamma_{dR}(G) = 2$, 当且仅当 G 是 K_1 。因此在下面的定理中, 只考虑 $\gamma_{dR}(G) \geq 3$ 的情况。

定理 1 对于任意两个正整数 $a \geq 3, b \geq 3$, 存在一个图 G 及其导出子图 H , 使得 $\gamma_{dR}(G) = a$ 且 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。

证明 通过构造的方法证明。根据 a 和 b 的大小关系分以下两种情形:

情形 1 $b \leq a$ 。

子情形 1 $a = 6k, b = 3l$ 。按以下方法构造图 G : 令 $C_{a-3} : v_1 v_2 \cdots v_{a-3}$, 令 $X = \{u_1, u_2\}$ 和 $Y = \{\omega_1, \omega_2\}$ 为完全二部图 $K_{2,2}$ 的两个顶点集, 在 $v_{a-3} \in C_{a-3}$ 与 $u_1 \in K_{2,2}$ 之间加一条边, 另外再添加一个顶点 x , 并使其与 $K_{2,2}$ 的四个顶点相邻。为了找到图 G 的双罗马控制函数的最小权值, 可根据定理 1.2 为 C_{a-3} 上的各点赋值, 对点 $u_1, u_2, \omega_1, \omega_2$ 均赋值为 0, 对点 x 赋值为 3, 这样即可得出 $\gamma_{dr}(G) = a - 3 + 3 = a$ 。令导出子图 H 为 $G - \{v_1, v_2, \dots, v_{b-3}\}$, 则图 H 是由 P_{b-3} 及其悬挂点 v_{b-3} 与 $K_{2,2}$ 中的 u_1 相邻, 和一点 x 与 $K_{2,2}$ 的四个顶点相邻这几部分构成的(如图 1 所示)。因为 $b - 3 \equiv 0 \pmod{3}$, 所以 $\gamma_{dr}(H) = b - 3 + 3 = b$ 。

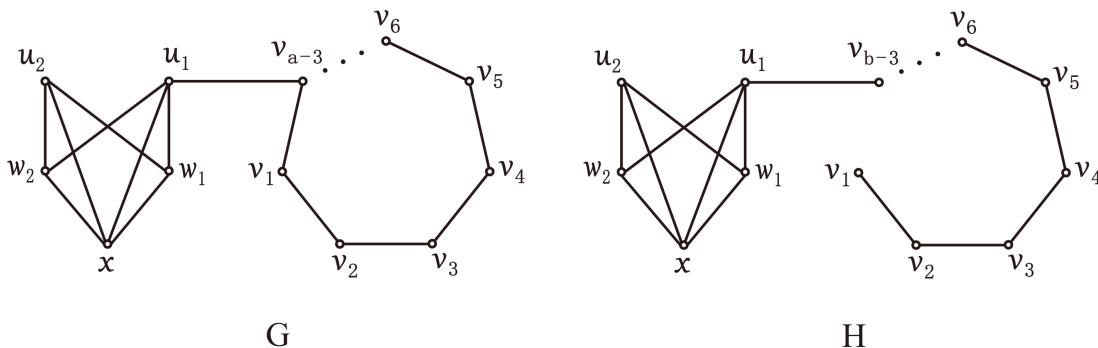


Figure 1. The constructed graph G in subcase 1 of case 1 and its induced subgraph H
图 1. 情形 1 的子情形 1 中构造的图 G 与其导出子图 H

子情形 2 $a = 6k, b = 3l + 1$ 。图 G 的构造方法与情形 1 中的子情形 1 相同。令导出子图 H 为 $G - \{v_1, v_2, \dots, v_{b-4}, x\}$ 。则 H 是由 P_{b-4} 及其悬挂点 v_{b-4} 与 $K_{2,2}$ 中的 u_1 相邻构成的(如图 2 所示)。因为 $b - 4 \equiv 0 \pmod{3}$ 且 $\gamma_{dr}(K_{2,2}) = 4$, 所以 $\gamma_{dr}(H) = b - 4 + 4 = b$ 。

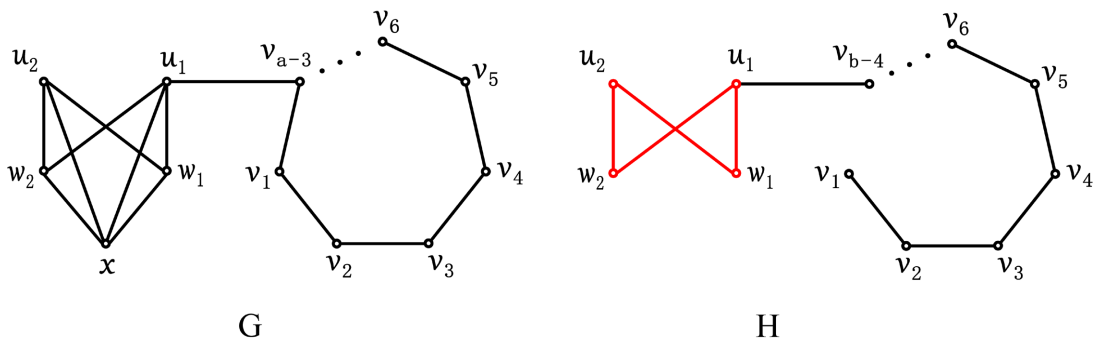


Figure 2. The constructed graph G in subcase 2 of case 1 and its induced subgraph H
图 2. 情形 1 的子情形 2 中构造的图 G 与其导出子图 H

子情形 3 $a = 6k, b = 3l + 2$ 。令 $G = C_a$, 则 $\gamma_{dr}(G) = a$, 令 $H = P_{b-1}$, 则 $\gamma_{dr}(H) = b - 1 + 1 = b$ 。

子情形 4 $a = 6k + 1, b = 3l$ 。按以下方法构造图 G , 令 $C_{a-4} : v_1 v_2 \cdots v_{a-4}$, 令 $X = \{u_1, u_2\}$ 和 $Y = \{\omega_1, \omega_2\}$ 为完全二部图 $K_{2,2}$ 的两个顶点集。在 $v_{a-4} \in C_{a-4}$ 与 $u_1 \in K_{2,2}$ 之间加一条边(如图 3 所示)。由于 $a - 4 \equiv 3 \pmod{6}$ 且 $\gamma_{dr}(K_{2,2}) = 4$, 可以得出 $\gamma_{dr}(G) = a - 4 + 4 = a$ 。若 $l < k$, 则取路 $P_b : v_1 v_2 \cdots v_b$ 作为导出子图 H , 那么 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。若 $l = 2k$, 那么 $b = a - 1$ 。令路 $P_{a-2} : v_2 v_3 \cdots v_{a-4} u_1 \omega_1 u_2$ 作为导出子图 H , 因为 $a - 2 = b - 1$ 且 $b - 1 \equiv 2 \pmod{3}$, 那么 $\gamma_{dr}(H) = b - 1 + 1 = b$ 。

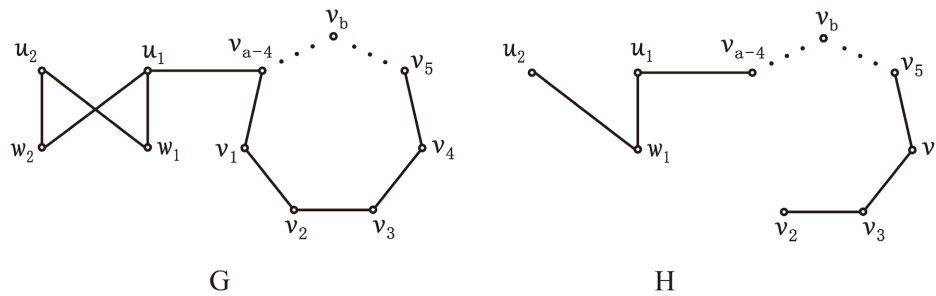


Figure 3. The constructed graph G in subcase 4 of case 1 and its induced subgraph H
图 3. 情形 1 的子情形 4 中构造的图 G 与其导出子图 H

子情形 5 $a = 6k + 1$, $b = 3l + 1$ 。图 G 的构造方法与情形 1 中的子情形 4 相同。令导出子图 H 为 $G - \{v_1, v_2, \dots, v_{a-b}\}$, 则 H 是由 P_{b-4} 及其悬挂点 v_{a-4} 与 $K_{2,2}$ 中的 u_1 相邻构成的。因此 $\gamma_{dr}(H) = b - 4 + 4 = b$ 。(注意, 如果 $l = 2k$, 那么 H 就是 G 本身。)

子情形 6 $a = 6k + 1$, $b = 3l + 2$ 。图 G 的构造方法与情形 1 中的子情形 4 相同。取路 $P_{b-1} : v_1 v_2 \dots v_{b-1}$ 作为导出子图 H , 则 $\gamma_{dr}(H) = b - 1 + 1 = b$ 。

子情形 7 $a = 6k + 2$, $b = 3l$ 。令 $G = C_a$, 则 $\gamma_{dr}(G) = a$, 令导出子图 $H = P_b$, 则 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 8 $a = 6k + 2$, $b = 3l + 1$ 。图 G 的构造方法与情形 1 中的子情形 4 相同。导出子图 H 的构造方法与情形 1 中的子情形 5 相同。那么 $\gamma_{dr}(G) = a$ 且 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 9 $a = 6k + 2$, $b = 3l + 2$ 。令 $G = C_a$, 则 $\gamma_{dr}(G) = a$, 令导出子图 $H = P_{b-1}$, 则 $\gamma_{dr}(H) = b - 1 + 1 = b$ 。

子情形 10 $a = 6k + 3$, $b = 3l$ 。令 $G = C_a$, 则 $\gamma_{dr}(G) = a$, 令导出子图 $H = P_b$, 则 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 11 $a = 6k + 3$, $b = 3l + 1$ 。图 G 的构造方法与情形 1 中的子情形 1 相同。导出子图 H 的构造方法与情形 1 中的子情形 2 相同。因为 $a - 3 \equiv 0 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 3 + 3 = a$ 且 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 12 $a = 6k + 3$, $b = 3l + 2$ 。令 $G = C_a$, 则 $\gamma_{dr}(G) = a$, 令导出子图 $H = P_{b-1}$, 则 $\gamma_{dr}(H) = b - 1 + 1 = b$ 。

子情形 13 $a = 6k + 4$, $b = 3l$ 。令 $G = C_a$, 则 $\gamma_{dr}(G) = a$, 令导出子图 $H = P_b$, 则 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 14 $a = 6k + 4$, $b = 3l + 1$ 。图 G 的构造方法与情形 1 中的子情形 4 相同。导出子图 H 的构造方法与情形 1 中的子情形 5 相同。因为 $a - 4 \equiv 0 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 4 + 4 = a$, $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 15 $a = 6k + 4$, $b = 3l + 2$ 。令 $G = C_a$, 则 $\gamma_{dr}(G) = a$, 令导出子图 $H = P_{b-1}$, 则 $\gamma_{dr}(H) = b - 1 + 1 = b$ 。

子情形 16 $a = 6k + 5$, $b = 3l$ 。按以下方法构造图 G , 令 $C_{a-3} : v_1 v_2 \dots v_{a-3}$, 令 $X = \{u\}$ 和 $Y = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 为完全二部图 $K_{1,3}$ 的两个顶点集, 在 $v_{a-3} \in C_{a-3}$ 与 $u \in K_{1,3}$ 之间加一条边(如图 4 所示)。因为 $a - 3 \equiv 2 \pmod{6}$ 且 $\gamma_{dr}(K_{1,3}) = 3$, 可以得出 $\gamma_{dr}(G) = a - 3 + 3 = a$ 。取 H 为 $G - \{v_1, v_2, \dots, v_{a-b}\}$, 则导出子图 H 是由 P_{b-3} 与 $K_{1,3}$ 及点 v_{b-3} 与 u 之间连一条边这几部分构成的。因为 $b - 3 \equiv 0 \pmod{3}$, 所以 $\gamma_{dr}(H) = b - 3 + 3 = b$ 。

子情形 17 $a = 6k + 5$, $b = 3l + 1$ 。图 G 的构造方法与情形 1 中的子情形 1 相同。导出子图 H 的构造方法与情形 1 中的子情形 2 相同。因为 $a - 3 \equiv 2 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 3 + 3 = a$, $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 18 $a = 6k + 5$, $b = 3l + 2$ 。图 G 的构造方法与情形 1 中的子情形 16 相同。取 H 为 $G - \{v_1, v_2, \dots, v_{a-b+1}\}$, 则导出子图 H 是由 P_{b-4} 与 $K_{1,3}$ 及点 v_{b-4} 与 u 之间连一条边这几部分构成的。因为 $b - 4 \equiv 2 \pmod{3}$ 且 $\gamma_{dr}(K_{1,3}) = 3$, 所以 $\gamma_{dr}(H) = b - 4 + 1 + 3 = b$ 。

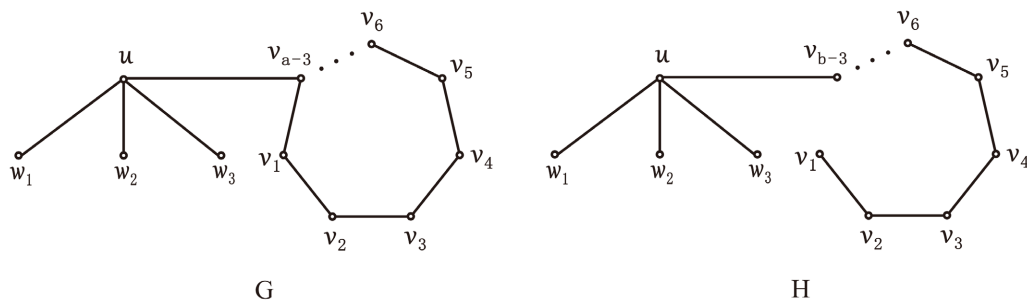


Figure 4. The constructed graph G in subcase 16 of case 1 and its induced subgraph H
图 4. 情形 1 的子情形 16 中构造的图 G 与其导出子图 H

情形 2 $b > a$ 。

子情形 1 $a = 6k$, $b = 3l$ 。取 $H = P_b : v_1 v_2 \cdots v_{a-4} v_{a-3} v_{a-2} v_{a-1} v_a v_{a+1} \cdots v_b$, 则 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。按以下方法构造 H 的母图 G : 加一个孤立点 u , 使其与点 $v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, \dots, v_b$ 相邻, 再加一点 v_0 , 使其与点 v_1 和点 v_{a-4} 相邻(如图 5 所示)。在图 G 中, 对点 $v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, \dots, v_b$ 赋值为 0, 对 u 赋值为 3。对点 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{a-3}, v_{a-4}$ 可根据定理 1.2 为 C_{a-3} 上的各点赋值, 因此可得 $\gamma_{dR}(G) = a - 3 + 3 = a$ 。

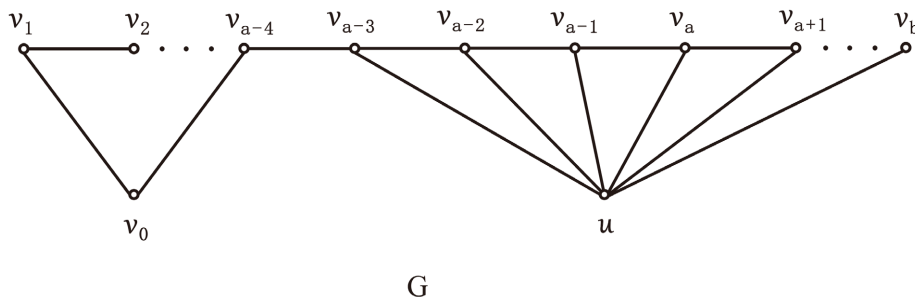


Figure 5. The constructed super graph G in subcase 1 of case 2
图 5. 情形 2 的子情形 1 中构造的母图 G

子情形 2 $a = 6k + 1$, $b = 3l$ 。取 $H = P_b : v_1 v_2 \cdots v_{a-5} v_{a-4} v_{a-3} v_{a-2} v_{a-1} v_a \cdots v_b$, 则 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。按以下方法构造图 H 的母图 G : 加两个孤立点 u 和 w , 使这两点均与点 $v_{a-4}, v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, \dots, v_b$ 相邻, 再加一点 v_0 , 使其与点 v_1 和点 v_{a-5} 相邻(如图 6 所示)。在图 G 中, 对点 $v_{a-4}, v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, \dots, v_b$ 赋值为 0, 对 u 和 w 均赋值为 2。对点 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{a-4}, v_{a-5}$ 可根据定理 1.2 为 C_{a-4} 上的各点赋值, 因此可得 $\gamma_{dR}(G) = a - 4 + 4 = a$ 。

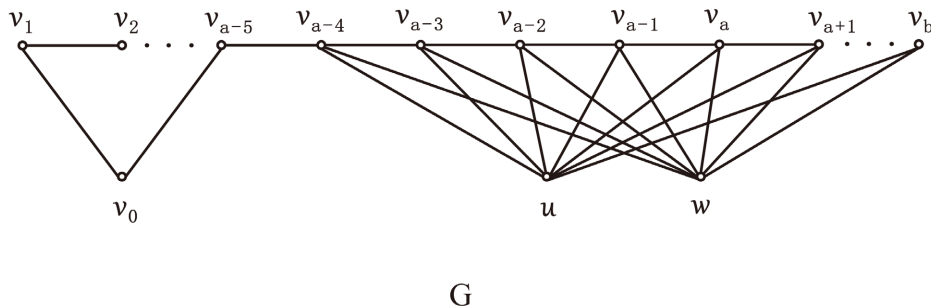


Figure 6. The constructed graph G in subcase 2 of case 2
图 6. 情形 2 的子情形 2 中构造的图 G

子情形 3 $a = 6k + 2, b = 3l$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分别与情形 2 中的子情形 2 相同。因为 $a - 4 \equiv 4 \pmod{6}$ ，所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 4 + 4 = a$ 且 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 4 $a = 6k + 3, b = 3l$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分别与情形 2 中的子情形 1 相同。因为 $a - 3 \equiv 0 \pmod{6}$ ，所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 3 + 3 = a$ 且 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 5 $a = 6k + 4, b = 3l$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分别与情形 2 中的子情形 2 相同。因为 $a - 4 \equiv 0 \pmod{6}$ ，所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 4 + 4 = a$ 且 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 6 $a = 6k + 5, b = 3l$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分别与情形 2 中的子情形 1 相同。因为 $a - 3 \equiv 2 \pmod{6}$ ，所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 3 + 3 = a$ 且 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 7 $a = 6k, b = 3l + 1$ 。按以下方法构造图 H ：取 $P_{b-4} : v_1 v_2 \cdots v_{b-4}$ ，令 $X = \{u_1, u_2\}$ 和 $Y = \{\omega_1, \omega_2\}$ 为完全二部图 $K_{2,2}$ 的两个顶点集。在 $v_{b-4} \in P_{b-4}$ 与 $u_1 \in K_{2,2}$ 之间加一条边。由此可得 $\gamma_{dr}(H) = b - 4 + 4 = b$ 。按以下方法构造图 H 的母图 G ：加一个孤立点 u ，使其与点 $v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, v_{a+1}, \dots, v_{b-4}, u_1, u_2, \omega_1, \omega_2$ 相邻，再加一点 v_0 ，使其与 v_1 和点 v_{a-4} 相邻(如图 7 所示)。在图 G 中，对点 $v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, v_{a+1}, \dots, v_{b-4}, u_1, u_2, \omega_1, \omega_2$ 赋值为 0，对点 u 赋值为 3。对点 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{a-3}, v_{a-4}$ 可根据定理 1.2 为 C_{a-3} 上的各点赋值，因为 $a - 3 \equiv 3 \pmod{6}$ ，所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 3 + 3 = a$ 。

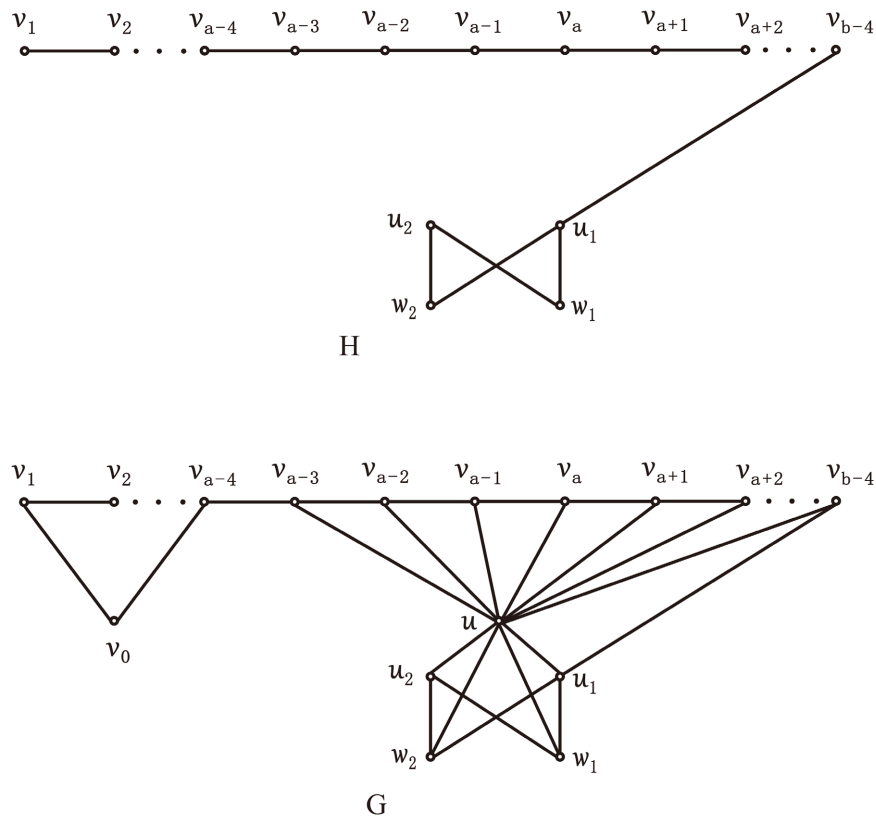


Figure 7. The constructed graph G in subcase 7 of case 2 and its induced subgraph H

图 7. 情形 2 的子情形 7 中构造的导出子图 H 与其母图 G

子情形 8 $a = 6k + 1, b = 3l + 1$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分别与情形 2 中的子情形 7 相同。因为 $a - 3 \equiv 4 \pmod{6}$ ，所以 $\gamma_{dr}(G) = a - 3 + 3 = a$ 且 $\gamma_{dr}(H) = b$ 。

子情形 9 $a = 6k + 2, b = 3l + 1$ 。对于图 H 的构造方法与情形 2 中的子情形 7 相同，则 $\gamma_{dr}(H) = b - 4 + 4 = b$ 。按以下方法构造 H 的母图 G ：加两个孤立点 u 和 w ，并使这两点均与点

$v_{a-4}, v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, \dots, v_{b-4}, u_1, u_2, \omega_1, \omega_2$ 相邻, 再加一点 v_0 , 使其与点 v_1 和点 v_{a-5} 相邻(如图 8 所示)。在图 G 中, 对点 $v_{a-4}, v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, \dots, v_{b-4}, u_1, u_2, \omega_1, \omega_2$ 赋值为 0, 对点 u 和点 w 均赋值为 2。对点 $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{a-4}, v_{a-5}$ 可根据定理 1.2 为 C_{a-4} 上的各点赋值, 因为 $a-4 \equiv 4 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dR}(G) = a-4+4 = a$ 。

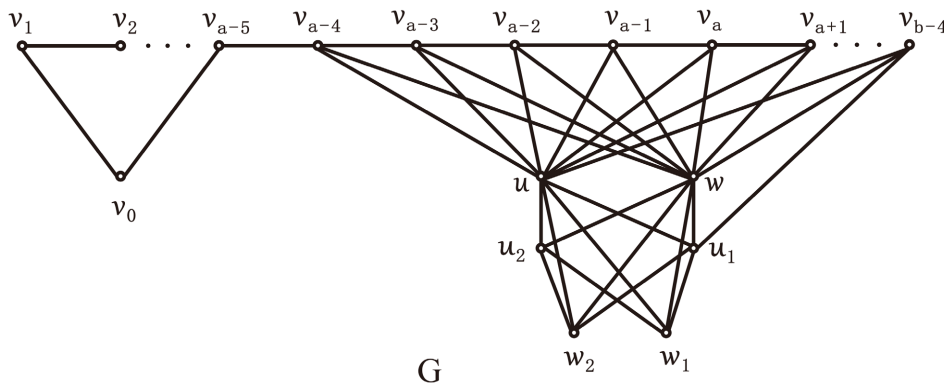


Figure 8. The constructed graph G in subcase 9 of case 2
图 8. 情形 2 的子情 9 中构造的图 G

子情形 10 $a = 6k + 3, b = 3l + 1$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分别与情形 2 中的子情形 7 相同。因为 $a-3 \equiv 0 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dR}(G) = a-3+3 = a$ 且 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。

子情形 11 $a = 6k + 4, b = 3l + 1$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分别与情形 2 中的子情形 9 相同。因为 $a-4 \equiv 0 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dR}(G) = a-4+4 = a$ 且 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。

子情形 12 $a = 6k + 5, b = 3l + 1$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分别与情形 2 中的子情形 7 相同。因为 $a-3 \equiv 2 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dR}(G) = a-3+3 = a$ 且 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。

子情形 13 $a = 6k, b = 3l + 2$ 。取 $H = P_{b-1}$, 则 $\gamma_{dR}(H) = b-1+1 = b$ 。对于图 G 的构造, 除了点 u 与点 $v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, v_{a+1}, \dots, v_{b-1}$ 相邻外, 其余方法均与情形 2 中的子情形 1 相同(如图 9 所示)。因此 $\gamma_{dR}(G) = a-3+3 = a$ 。

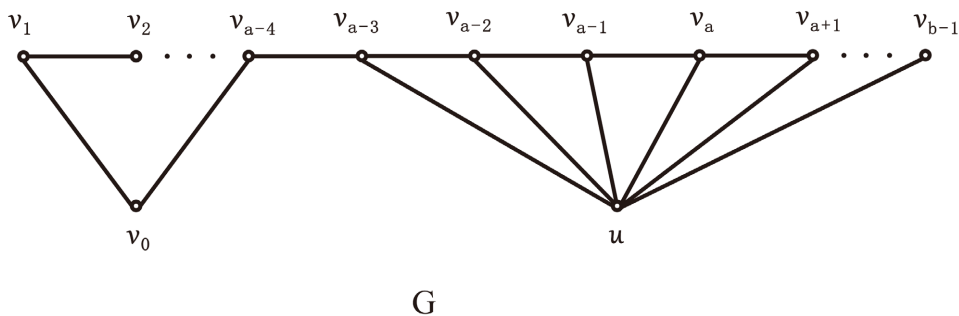


Figure 9. The constructed graph G in subcase 13 of case 2
图 9. 情形 2 的子情形 13 中构造的图 G

子情形 14 $a = 6k + 1, b = 3l + 2$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法均与情形 2 中的子情形 13 相同。因为 $a-3 \equiv 2 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dR}(G) = a-3+3 = a$ 且 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。

子情形 15 $a = 6k + 2, b = 3l + 2$ 。取 $H = P_{b-1}$, 则 $\gamma_{dR}(H) = b-1+1 = b$ 。对于图 G 的构造, 除了两孤立点 u 和 ω 均与点 $v_{a-4}, v_{a-3}, v_{a-2}, v_{a-1}, v_a, v_{a+1}, \dots, v_{b-1}$ 相邻外, 其余方法均与情形 2 中的子情形 2 相同(如

图 10 所示)。因此 $\gamma_{dR}(G) = a - 4 + 4 = a$ 。

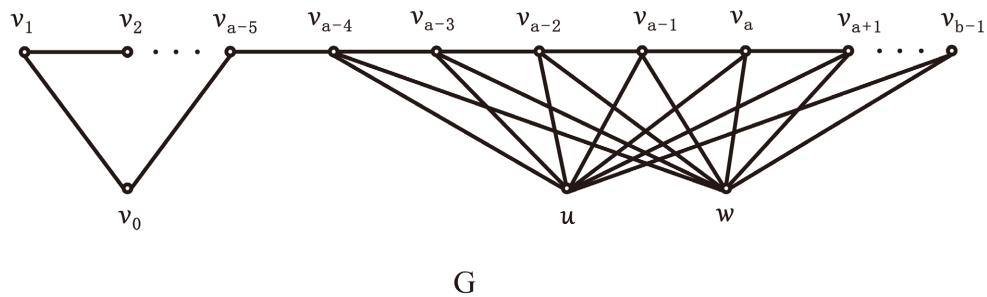


Figure 10. The constructed graph G in subcase 15 of case 2
图 10. 情形 2 的子情形 15 中构造的图 G

子情形 16 $a = 6k + 3$, $b = 3l + 2$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法均与情形 2 中的子情形 13 相同。因为 $a - 3 \equiv 3 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dR}(G) = a$ 且 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。

子情形 17 $a = 6k + 4$, $b = 3l + 2$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分均情形 2 中的子情形 15 相同。因为 $a - 4 \equiv 0 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dR}(G) = a$ 且 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。

子情形 18 $a = 6k + 5$, $b = 3l + 2$ 。对于图 G 和图 H 的构造方法分均情形 2 中的子情形 13 相同。因为 $a - 3 \equiv 2 \pmod{6}$, 所以 $\gamma_{dR}(G) = a$ 且 $\gamma_{dR}(H) = b$ 。

4. 结论

从上述定理证明可以得出, 一个图的双罗马控制数与其导出子图的双罗马控制数之间没有关系。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2021 年新疆维吾尔自治区自然基金联合项目(2021D01C078); 2020 年新疆师范大学一流专业、一流课程项目资助。

参考文献

- [1] Stewart, I. (1999) Defend the Roman Empire. *Scientific American*, **281**, C136-C139. <https://doi.org/10.1038/scientificamerican1299-136>
- [2] Henning, M.A. and Hedetniemi, S.T. (2003) Defending the Roman Empire: A New Strategy. *Discrete Mathematics*, **266**, 239-251. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(02\)00811-7](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(02)00811-7)
- [3] Cockayne, E.J., Dreyer, P.A., Hedetniemi Jr., S.M., et al. (2004) Roman Domination in Graphs. *Discrete Mathematics*, **278**, 11-22. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.06.004>
- [4] 王彤歌, 李瑞娟, 乔会娟. 关于图的 3-罗马控制[J]. 伊犁师范学院学报, 2007(12): 543-546.
- [5] Chellali, M., Haynes, T.W., Hedetniemi, S.T. and Mcrae, A.A. (2016) Roman $\{2\}$ -Domination. *Discrete Applied Mathematics*, **204**, 22-28. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.11.013>
- [6] Beeler, R.A., Haynes, T.W. and Hedetniemi, S.T. (2016) Double Roman Domination. *Discrete Applied Mathematics*, **211**, 23-29. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.03.017>
- [7] Anu, V. and Aparna Lakshmanan, S. (2018) Double Roman Domination Number. *Discrete Applied Mathematics*, **244**, 198-204. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.03.026>
- [8] Abdollahzadeh Ahangar, H., Chellali, M. and Sheikholeslami, S.M. (2017) On the Double Roman Domination in Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **232**, 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2017.06.014>
- [9] Beeler, R.A., Haynes, T.W. and Hedetniemi, S.T. (2016) Double Roman Domination. *Discrete Applied Mathematics*, **211**, 23-29. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.03.017>