Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(4), 565-571
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.124063

Hans汉斯

Gorenstein MF-投射模

周彩霞

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年3月10日；录用日期：2022年4月14日；发布日期：2022年4月21日

摘 要

本文引入了Gorenstein MF-投射模的概念，讨论了这类模的基本同调性质，给出了R是半单环时，任意R-模都是Gorenstein MF-投射模的等价刻画，证明了Gorenstein MF-投射维数有限的R-模G都存在特殊的Gorenstein MF-投射预覆盖。

关键词

MF-投射模，Gorenstein MF-投射模，预覆盖

Gorenstein MF-Projective Modules

Caixia Zhou

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 10th, 2022; accepted: Apr. 14th, 2022; published: Apr. 21st, 2022

Abstract

In this paper, Gorenstein MF-Projective modules are introduced. We discuss the homological properties of Gorenstein MF-projective modules, give that R is semi-simple ring, and any R-module is a Gorenstein MF-projective module, and prove that any R-module G with finite Gorenstein MF-projective dimension exists special Gorenstein MF-projective precover.

Keywords

MF-Projective Module, Gorenstein MF-Projective Module, Precover

文章引用: 周彩霞. Gorenstein MF-投射模[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 565-571.
DOI: 10.12677/pm.2022.124063

1. 引言

上世纪九十年代，Enochs 等引入了 Gorenstein 投(内)射模和 Gorenstein 平坦模，这三类模及其维数理论构成了 Gorenstein 同调代数的理论核心([1] [2] [3])。随着 Gorenstein 同调理论的深入发展，出现了许多重要的研究成果，2010 年，Y. Xiang 在文献[4]中引入了极大平坦模，证明了在左凝聚环上，每一个左 R-模存在极大平坦预覆盖。2021 年，Yusuf Alagöz 在文献[5]中引入了 MF-投射模，研究了 MF-投射模的同调性质以及半单环上 MF-投射模的等价刻画。

受以上结论的启发，我们引入 Gorenstein MF-投射模，讨论了这类模的同调性质，证明了 Gorenstein MF-投射维数有限的 R-模 G 都存在特殊的 Gorenstein MF-投射预覆盖。

本文所提到的环均指有单位元的结合环。模均指酉模，除非特别说明，模指左 R-模，$P(R)$表示投射模类、$GP(R)$表示 Gorenstein 投射模类，$pd_R M$ 表示 R-模 M 的投射维数。称 M 是 Gorenstein 投射模，如果存在投射模的正合列 $\eta=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $M\cong Ker\left(P^0\to P^1\right)$，即对任意投射模 $P\in P(R)$，序列 $Hom_R(\eta,P)$ 是正合列。设 $\mathcal{X}$ 是一左 R-模类，模 M 的左(右) $\mathcal{X}$-分解是指正合列 $\mathcal{X}=\cdots\to X_1\to X_0\to M\to 0$ ($\mathcal{X}=0\to M\to X^0\to X^1\to\cdots$)，其中 $X_i\in\mathcal{X},i=0,1,2,\cdots$。称模类 $\mathcal{X}$ 是投射可解类[6]，如果它包含投射模类，并且在任意短正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 中，若 $C\in\mathcal{X}$，则 $A\in\mathcal{X}$ 当且仅当 $B\in\mathcal{X}$。设 $\mathcal{A}$ 是任意 Abel 范畴，$\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 中对像的类。称 $\mathcal{A}$ 中的态射 $\varphi:B\to A$ 是对象 A 的 $\mathcal{B}$-预覆盖[7]，如果 $B\in\mathcal{B}$ 且对任意 $B'\in\mathcal{B}$ 和任意态射 $f:B'\to A$，其中 $B'\in\mathcal{B}$，存在态射 $g:B'\to B$，使得 $\varphi g=f$。

2. Gorenstein MF-投射模

首先，引入 Gorenstein MF-投射模，讨论这类模的基本同调性质。

定义 1.1 称右 R-模 M 是 MF-投射模，如果对任意极大平坦模 N，$Ext_R^1(M,N)=0$。我们将 MF-投射模类记为 $MF-P(R)$。称右 R-模 M 是强 MF-投射模，如果对任意极大平坦模 N，及任意整数 $i\geq 1$，$Ext_R^i(M,N)=0$。我们将强 MF-投射模类记为 $SMF-P(R)$。

定义 1.2 称右 R-模 M 是 Gorenstein MF-投射模，如果存在投射右 R-模的正合列

$$\eta=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$$

使得 $M\cong Ker\left(P^0\to P^1\right)$，即对任意 MF-投射模 N，序列 $Hom_R(\eta,N)$ 是正合列。

我们将 Gorenstein MF-投射模类记为 $GMF-P(R)$。

注记 1) $P(R)\subseteq GMF-P(R)\subseteq GP(R)$；

2) $GMF-P(R)$ 关于直和封闭；

3) 由文献[5]知，当 R 是左极大遗传环[8]或 SF-环时，MF-投射模是 Gorenstein MF-投射模；

4) 由对称性，定义 1.2 正合列 η 中所有同态的核、像、余核都是 Gorenstein MF-投射模。

命题 1.1 设 R 是环，则以下等价：

1) $M\in GMF-P(R)$；

2) 对任意正整数 i，及任意 MF-投射模 N，$Ext_R^i(M,N)=0$，并且存在 $Hom(-,N)$ 正合的正合序列 $0\to M\to P^0\to P^1\to\cdots,P^i\in P(R)$；

3) 存在右 R-模的短正合列 $0\to M\to P\to Q\to 0$，其中 $P\in P(R)$，$Q\in GMF-P(R)$。

证明(1) $\Leftrightarrow$ (2)，(1) $\Rightarrow$ (3)显然。

(3) $\Rightarrow$ (1)存在 R-模的正合列 $0\to M\to P\to Q\to 0$，其中 $P\in P(R)$，$Q\in GMF-P(R)$，对任意 MF-投射模 N 及整数 $i\geq 1$，存在 $Hom(-,N)$ 正合的 R-模的正合列

$$0 \to Q \to P^0 \to P^1 \to \cdots, P^i \in P(R) \quad ①$$

将 $Hom(-,N)$ 作用在短正合列 $0 \to M \to P \to Q \to 0$ 上，对任意正整数 i，存在正合序列

$$\cdots \to Ext_R^i(P,N) \to Ext_R^i(M,N) \to Ext_R^{i+1}(Q,N) \to Ext_R^{i+1}(P,N) \to \cdots$$

于是由(1)、(2)，$Ext_R^i(M,N) \cong Ext_R^{i+1}(Q,N) = 0$。

下面考虑 R-模 M 的投射分解

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0, P_i \in P(R) \quad ②$$

令 $K_i = Ker(P_i \to P_{i-1})$，$i \geq 1$，$K_0 = Ker(P_0 \to M)$，有 $Ext_R^1(K_i,N) \cong Ext_R^{i+1}(M,N) = 0$，由此可得序列②是 $Hom(-,N)$ 正合的，将正合列 $0 \to M \to P \to Q \to 0$ 与序列①和②首尾相接得 $Hom(-,N)$ 正合的投射模的正合列

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to P \to P^0 \to P^1 \to \cdots$$

且 $M \cong Ker(P \to P^0)$，故 $M \in GMF-P(R)$。

推论 1.1 设 M 是 Gorenstein MF-投射模，则对任意 MF-投射维数有限的 R-模 L，及任意整数 $i \geq 1$，$Ext_R^i(M,L) = 0$。

证明 由于 $M \in GMF-P(R)$，故存在 $Hom(-,\mathcal{MF})$ 正合的正合列 $0 \to M \to P^0 \to P^1 \to \cdots$，$P^i \in P(R)$，$i \geq 1$，并且对任意 MF-投射模 N 及任意整数 $i \geq 1$，$Ext_R^i(M,N) = 0$。设 $MF-pd(L) = n$，则存在正合列 $0 \to L_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to L \to 0$，其中 $P_j \in P(R)$，$j = 0,\cdots,n-1$，$L_n \in MF-P(R)$，由维数转移可得，对 $\forall i \geq 1$，$Ext_R^i(M,L) \cong Ext_R^{n+i}(M,L_n) = 0$。

引理 1.1 设 M 是 Gorenstein MF-投射模，则以下成立：

1) 对任意 MF-投射模 N 及任意整数 $i \geq 1$，$Ext_R^1(M,N) = 0$。

2) $Pd_R M = 0$ 或 $Pd_R M = \infty$。

证明 1) 因为 M 是 Gorenstein MF-投射模，所以存在一个 $Hom(-,MF-P(R))$ 正合的正合序列 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$，其中 $P_i \in P(R)$，则由维数转移可知，对任意 MF-投射模 N 及正整数 i，$Ext_R^i(M,N) = 0$。

2) 设 $pd(M) = m < \infty$，则存在正合序列 $0 \to P_m \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$，其中 $P_i \in P(R)$，令 $K = Ker(P_0 \to M)$，则 $MF-pd(K) \leq m-1$，故 $Ext_R^1(M,K) = 0$，正合列 $0 \to K \to P_0 \to M \to 0$ 可裂，从而 M 是投射模。

命题 1.2 设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是左 R-模的正合列

1) 若 A、C 是 Gorenstein MF-投射模，则 B 是 Gorenstein MF-投射模；

2) 若 B、C 是 Gorenstein MF-投射模，则 A 是 Gorenstein MF-投射模。

证明 1) 由于 A、C 是 Gorenstein MF-投射模，故存在 $Hom(-,N)$ 正合的正合列

$$0 \to A \to P_0' \to P_1' \to \cdots$$

和

$$0 \to C \to P_0'' \to P_1'' \to \cdots$$

其中 $P_i', P_i'' \in P(R)$，对任意 MF-投射模 N 及整数 $i \geq 1$，$Ext_R^i(A,N) = 0$，$Ext_R^i(C,N) = 0$，令 $K' = \mathrm{Im}(A \to P_0')$、$K'' = \mathrm{Im}(C \to P_0'')$，由命题 1.1 知，$K', K''$ 是 Gorenstein MF-投射模，于是有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d] & P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

且 $0 \to K' \to K \to K'' \to 0$ 与 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 有相同的性质，故由马掌引理存在 $Hom(-,N)$ 正合的正合列 $0 \to B \to P_0' \oplus P_0'' \to P_1' \oplus P_1'' \to \cdots$，其中 $P_i' \oplus P_i'' \in P(R), i \ge 1$，而且 $Ext_R^i(B,N) = 0$，故 B 是 Gorenstein MF-投射模。

2) 由于 B 是 Gorenstein MF-投射模，故存在正合列 $0 \to B \to P \to K \to 0$，其中 $P \in P(R)$，K 是 Gorenstein MF-投射模，考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 C 和 K 都是 Gorenstein MF-投射模，所以由(1)知，D 是 Gorenstein MF-投射模，再利用命题 1.1 知，A 是 Gorenstein MF-投射模。

命题 1.3 Gorenstein MF-投射模类是投射可解类，且关于直和项封闭。

证明 由[3]的定理 2.5 易证。

推论 1.2 在短正合序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 中，若 A 和 B 都是 Gorenstein MF-投射模，而且对任意 MF-投射维数有限的右 R-模 L 及任意整数 $i \ge 1$，$Ext_R^i(C,L) = 0$，则 C 是 Gorenstein MF-投射模。

证明 由于 A 是 Gorenstein MF-投射模，故存在正合列 $0 \to A \to P \to K \to 0$，其中 $P \in P(R)$，K 是 Gorenstein MF-投射模，考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
 & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

在中间列中，因为 B 和 K 都是 Gorenstein MF-投射模，故 G 是 Gorenstein MF-投射模，又因为正合列 $0 \to P \to G \to C \to 0$ 可裂，故 C 是 Gorenstein MF-投射模。

命题 1.4 设 R 是 QF 环，则任意 Gorenstein MF-投射模都是投射模。

证明 设 M 是 Gorenstein MF-投射模，因为 R 是 QF 环，由文献[5]知，任意模 N 都是 MF-投射模，故对于任意模 N，$Ext_R^1(M,N)=0$，从而 M 是投射模。

推论 1.3 设 R 是环，则以下等价：

1) R 是半单环；

2) R 是 QF 环，并且每一个 R-模都是 Gorenstein MF-投射模。

证明 $(1)\Rightarrow(2)$任取 R-模 M，考虑正合列 $0 \to K \to P \to M \to 0$，其中 $P \in P(R)$。因为 R 是半单环，故 $K \in I(R)$，因此 $0 \to K \to P \to M \to 0$ 可裂，则 $K \in P(R)$，从而 R 是 QF 环，又因为 R 是半单环，故 M 是 Gorenstein MF-投射模。

$(2)\Rightarrow(1)$设 M 是任意 R-模，由(2)知 M 是 Gorenstein MF-投射模，又由命题 1.4 知，$M \in P(R)$，故 R 是半单环。

3. Gorenstein MF-投射维数

接下来我们引入模的 Gorenstein MF-投射维数，给出 Gorenstein MF-投射维数有限的模的等价刻画，结论表明任意 Gorenstein MF-投射维数有限的 R-模 G 都存在特殊的 Gorenstein MF-投射预覆盖。

定义 2.1 设 R 是环，定义模 M 的 Gorenstein MF-投射维数如下

$$GMF-pd(M)=\inf\{n \in N \mid \text{存在正合列} 0 \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_0 \to M \to 0,$$
$$\text{其中} G_i \in GMF-P(R), i=0,1,2,\cdots,n\}$$

若上述集合为空集，则规定 $GMF-pd(M)=\infty$。

我们定义环 R 的右整体 Gorenstein MF-投射维数如下

$$r.GMF.PD(R)=\sup\{GMF-pd(M) \mid M\text{为右-R模}\}。$$

关于定义，我们注意到：R 是半单环，则 $r.GMF.PD(R)=0$。

命题 2.1 设 M 是 R-模，且 $GMF-pd(M)<\infty$，n 是非负整数，则以下等价：

1) $GMF-pd(M)\le n$；

2) 对任意整数 $i>n$，及任意 MF-投射维数有限的 R-模 L， $Ext_R^i(M,L)=0;Ext_R^i(M,N)=0$；

3) 对任意整数 $i>n$，及任意 MF-投射模 N， $Ext_R^i(M,N)=0$；

4) 在任意正合列 $0\to K_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_0\to 0$ 中，若 $G_0,G_1,\cdots,G_{n-1}$ 都是 Gorenstein MF-投射模，则 K_n 也是 Gorenstein MF-投射模。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $GMF-pd(M)\le n$，存在正合列 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_0\to M\to 0$，其中 $G_0,G_1,\cdots,G_{n-1},G_n$ 都是 Gorenstein MF-投射模，对任意整数 $i>n$，及任意 MF-投射维数有限的 R-模 L，由推论 1.1 及维数转移，得对任意整数 $i>n$， $Ext_R^i(M,L)\cong Ext_R^{i-n}(G_n,L)=0$。

(2)$\Rightarrow$(3)显然。

(3)$\Rightarrow$(4)考虑正合序列

$$0\to K_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_0\to M\to 0 \tag{1}$$

其中 $G_0,\cdots,G_{n-1}$ 是 Gorenstein MF-投射模，令 $K_i=Ker(G_{i-1}\to G_{i-2})$， $K_1=Ker(G_0\to M)$， $i=2,\cdots,n$，对任意整数 $i>0$，及任意 MF-投射模 N，由引理 1.1 及维数转移得， $Ext_R^i(K_n,N)\cong Ext_R^{i+n}(M,N)=0$。因为 $GMF-pdM<\infty$，且把序列(1)分解成短正合列，类似于文献[3]命题 2.18 的证明，我们可以得到 $GMF-pdK_n=GMF-pdK_{n-1}-1=GMF-pdM-n$，令 $GMF-pdK_n=m<\infty$，于是存在正合列

$$0\to G'_m\to\cdots\to G'_0\to K_n\to 0 \tag{2}$$

其中 $G'_0,\cdots,G'_m$ 是 Gorenstein MF-投射模，令 $K'_i=Ker(G'_{i-1}\to G'_{i-2})$， $K'_1=Ker(G'_0\to K_n)$， $i=2,\cdots,m-1$，对任意 MF-投射模 N，用 $Hom(-,N)$ 作用于正合列 $0\to G'_m\to G'_{m-1}\to K'_{m-1}\to 0$，得 $0=Ext_R^1(G'_m,N)\cong Ext_R^2(K'_{m-1},N)$， $Ext_R^1(G'_m,N)\cong Ext_R^2(K'_{m-1},N)\cdots Ext_R^m(K'_1,N)\cong Ext_R^2(K_n,N)$，

得 $Ext_R^m(K'_1,N)\cong Ext_R^{m+1}(K_n,N)$，所以 $Ext_R^1(K'_{m-1},N)\cong Ext_R^m(K_n,N)\cong Ext_R^{m+n}(M,N)=0$，得 $Ext_R^1(K'_{m-1},N)=0$，由推论 1.2 知， K'_{m-1} 是 Gorenstein MF-投射模，…，依次可得 K'_1 是 Gorenstein MF-投射模，又 $Ext_R^1(K_n,N)\cong Ext_R^{n+1}(M,N)=0$，故 K_n 是 Gorenstein MF-投射模。

(4)$\Rightarrow$(1)由定义 2.1 易见。

以下我们给出环 R 的右整体 Gorenstein MF-投射维数有限的等价刻画。

定理 2.1 设 R 是环，整数 $n\ge 0$，则以下等价：

1) $r.GMF.PD(R)\le n$；

2) 对任意循环 R-模 M， $GMF-pd(M)\le n$；

3) 对任意 MF-投射模 M， $id(M)\le n$。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)显然。

(2)$\Rightarrow$(3)任取 MF-投射模 M，设 I 是 R 的右理想，则由(2) $GMF-pd(R/I)\le n$。由命题 2.1 知，对任意整数 $n\ge 0$， $Ext_R^{n+1}(R/I,M)=0$，则 $id(M)\le n$。

(3)$\Rightarrow$(1)设 A 是任意 R-模，B 是任意 MF-投射模，则由(3) $id(B)\le n$，对任意整数 $i\ge 1$， $Ext_R^{i+n}(A,B)=0$，则 $GMF-pd(A)\le n$，故由 A 的任意性知 $r.GMF.PD(R)\le n$。

接下来，我们主要研究一个模在什么时候有特殊的 Gorenstein MF-投射预覆盖。

定理 2.2 任意 Gorenstein MF-投射维数有限的 R-模 G 都存在特殊的 Gorenstein MF-投射预覆盖。

证明 设 $GMF-pd(G)=n<\infty$，则存在正合列 $0\to C\to P_{n-1}\to P_{n-2}\to\cdots\to P_0\to G\to 0$，其中 $P_i\in P(R),(i=0,1,\cdots,n-1)$， $C\in GMF-P(R)$。因为 $C\in GMF-P(R)$，故存在 $Hom(-,\mathcal{MF})$ 正合的正合列 $0\to C\to T_{n-1}\to T_{n-2}\to\cdots\to T_0\to D\to 0$，其中 $T_j\in P(R)$， $D\in GMF-P(R)$，可以得到如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & T_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & T_0 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

考虑映射锥

$$0 \to C \to C \oplus T_{n-1} \to P_{n-1} \oplus T_{n-2} \to \cdots \to P_0 \oplus D \xrightarrow{\varphi} G \to 0$$

我们可以得到如下正合列

$$0 \to T_{n-1} \to P_{n-1} \oplus T_{n-2} \to \cdots \to P_0 \oplus D \xrightarrow{\varphi} G \to 0$$

令 $K = Ker\varphi$，则有正合列

$$0 \to T_{n-1} \to P_{n-1} \oplus T_{n-2} \to \cdots \to P_1 \oplus T_0 \to K \to 0$$

于是 $MF-pd(K) < \infty$，由推论 1.2 知，对任意 Gorenstein MF-投射模 G'，$Ext_R^1(G', K) = 0$。$K \in GMF^{\perp}$，正合列 $0 \to K \to P_0 \oplus D \xrightarrow{\varphi} G \to 0$ 是 $Hom(GMF-P(R), -)$ 正合的，即 $P_0 \oplus D \xrightarrow{\varphi} G$ 是 G 的一个特殊的 Gorenstein MF-投射预覆盖。

本文主要研究了 Gorenstein MF-投射模的基本同调性质，给出了 R 是半单环时，任意 R-模都是 Gorenstein MF-投射模的等价刻画，证明了 Gorenstein MF-投射维数有限的 R-模 G 都存在特殊的 Gorenstein MF-投射预覆盖。

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, J.J. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter de Gruyer, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[3] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applie Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[4] Xiang, Y.M. (2010) Max-Injective, Max-Flat Modules and Max-Coherent Rings. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **47**, 11-622. https://doi.org/10.4134/BKMS.2010.47.3.611

[5] Alagöz, Y. (2021) On MF-Projective Modules. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **50**, 471-482.

[6] Zhu, X.S. (2013) Resolving Resolution Dimensions. *Journal of Algebra Represent Theory*, **16**, 1165-1191. https://doi.org/10.1007/s10468-012-9351-5

[7] Hwankoo, K., Qiao, L. and Wang, F.G. (2022) The Class of Weak w-Projective Modules Is a Precover. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **59**, 141-154.

[8] Stenstrom, B. (2004) Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory. Springer Verlag, Berlin.