Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 795-802
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125090

Hans汉斯

R_0-代数的几类反犹豫模糊滤子

郑苗苗

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年4月16日；录用日期：2022年5月17日；发布日期：2022年5月24日

摘 要

本文的创新点是提出了R_0-代数的几类反犹豫模糊滤子，主要将犹豫模糊集理论应用在R_0-代数上，首先介绍了反犹豫模糊MP滤子、反犹豫模糊素MP滤子以及反犹豫模糊蕴含滤子的基本概念，其次讨论了R_0-代数上这几类反犹豫模糊滤子的性质，最后证明了R_0-代数的几类反犹豫模糊滤子的等价刻画。

关键词

犹豫模糊集，R_0-代数，反犹豫模糊MP滤子，反犹豫模糊素MP滤子，反犹豫蕴含滤子

Several Types of Anti-Hesitation Fuzzy Filters for R_0-Algebras

Miaomiao Zheng

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 16th, 2022; accepted: May 17th, 2022; published: May 24th, 2022

Abstract

The innovation of this paper is to propose several classes of anti-hesitation fuzzy filters of R_0-algebra. The hesitation fuzzy set theory is mainly applied to R_0-algebra. First, the basic concepts of the filter anti-hesitation fuzzy MP filters, anti-hesitation fuzzy prime MP filters and anti-hesitation fuzzy implication filters are introduced. Secondly, the properties of these types of anti-hesitation fuzzy filters on R_0-algebra are discussed, and finally, we prove the equivalent characterization of several classes of anti-hesitation fuzzy filters of R_0-algebra.

Keywords

Hesitant Fuzzy Set, R_0-Algebra, Anti-Hesitant Fuzzy MP Filter, Anti-Hesitant Fuzzy Prime MP Filter, Anti-Hesitant Implication Filter

文章引用: 郑苗苗. R_0-代数的几类反犹豫模糊滤子[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 795-802.
DOI: 10.12677/pm.2022.125090

1. 引言

作为模糊集的一种新拓展，犹豫模糊集的基本组成元素为犹豫模糊元素，每个犹豫模糊元素是由若干个可能的数值构成的集合，这一理论的提出丰富了模糊集理论。把犹豫模糊集应用到不同的代数结构中，已经得到了一些研究成果，例如：刘春辉、傅小波、张建忠等分别在 BL-代数、FI-代数、布尔代数以及 Fuzzy 蕴含代数给出了犹豫模糊滤子、犹豫模糊同余、犹豫模糊滤子格、犹豫模糊理想等概念，并且取得了许多的研究成果[1]-[6]。

本文主要是把犹豫模糊集理论应用在 R_0-代数上，表达了反犹豫模糊 MP 滤子、反犹豫模糊素 MP 滤子以及反犹豫蕴含滤子的基本概念，并得出了这几类反犹豫模糊滤子的性质以及一些等价刻画。首先介绍了 R_0-代数的反犹豫模糊 MP 滤子，其次介绍了 R_0-代数的反犹豫模糊素 MP 滤子，最后介绍了 R_0-代数的反犹豫模糊蕴含滤子。

2. 基础知识

定义 2.1 [7]设 X 是任一集合，f 为 $X\to X$ 的映射，若对 $\forall x\in X$，有 $f\circ f=1_X$，则称 f 为对合映射。很容易看出，若 f 是对合的，那么 f 是一一对应的。

定义 2.2 [7]设 L 是一个完备格，f 为 $L\to L$ 的映射，若对 $\forall a,b\in L$，当 $a\le b$ 时有 $f(a)\ge f(b)$，则称 f 为逆序映射。

定义 2.3 [7]若 f 既是逆序映射，又是对合映射，则称 f 为逆序对合对应。

定义 2.4 [8]令 $R=(R,\wedge,\vee,\to,\neg,0,1)$ 是一个 $(2,2,2,1,0,0)$ 型代数，满足下列条件：

(1) $(R,\wedge,\vee,\to,\neg,0,1)$ 是有界分配格；

(2) $\neg$ 是 R 上的逆序对合对应，$\to$ 是 R 上的二元运算，如果 R 满足以下条件：$\forall x,y,z\in R$

(T_1) $x\to y=\neg x\to\neg y$；

(T_2) $1\to x=x$，$x\to x=1$；

(T_3) $y\to z\le(x\to y)\to(x\to z)$；

(T_4) $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$；

(T_5) $x\to(y\vee z)=(x\to y)\vee(x\to z)$，$x\to(y\wedge z)=(x\to y)\wedge(x\to z)$；

(T_6) $(x\to y)\vee((x\to y)\to(\neg x\vee y))=1$。

则 R 称为 R_0-代数。本文中出现的 $\neg$ 我们均用 $'$ 表示。

性质 2.5 [9]令 R 是 R_0 代数，$\forall x,y,z\in R$，则下列结论成立：

(P_1) $x\to y=1$ 当且仅当 $x\le y$；

(P_2) $x\le y\to z$ 当且仅当 $y\le x\to z$；

(P_3) $x\vee y\to z=(x\to z)\wedge(y\to z)$，$x\wedge y\to z=(x\to z)\vee(y\to z)$；

(P_4) 若 $y\le z$，则 $x\to y\le x\to z$；若 $x\le y$，则 $y\to z\le x\to z$；

(P_5) $x\to y\ge x'\vee y$；

(P_6) $(x\to y)\vee(y\to x)=1$；

(P_7) $x\wedge x'\le y\vee y'$；

(P_8) $x \to (y \to x) = 1$；

(P_9) $x \to (x' \to y) = 1$；

(P_{10}) $(x \vee y) \le ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$；

(P_{11}) $x \to y \le x \vee z \to y \vee z$，$x \to y \le x \wedge z \to y \wedge z$；

(P_{12}) $x \to y \le (x \to z) \vee (z \to y)$。

性质 2.6 **[9]**令 R 是 R_0 代数，$x \otimes y = (x \to y')'$，$\forall x, y \in R$ 则

(P_{13}) $(R, \otimes, 1)$ 是以 1 为单位的交换半群；

(P_{14}) 若 $x \le y$，则 $x \otimes z \le y \otimes z$；

(P_{15}) $x \otimes y \le x \wedge y$；

(P_{16}) $x \otimes y \le z$ 当且仅当 $x \le y \to z$；

(P_{17}) $x \otimes (y \vee z) = (x \otimes y) \vee (x \otimes z)$；

(P_{18}) $x \otimes y \to z = x \to (y \to z)$，$x \to (y \to x \otimes y) = 1$；

(P_{19}) $x \otimes x' = 0$。

引理 2.7 **[10]**令 R 是 R_0 代数，$\forall x, y, z \in R$ 则

(P_{20}) $x \otimes (x \to y) \le y$；

(P_{21}) $y \le x \to (x \otimes y)$，$x \le y \to (x \otimes y)$；

(P_{22}) $x \to y \le (y \to z) \vee (x \to z)$；

(P_{23}) $x \le x \wedge y \to y$。

定义 2.8 **[9]**令 R 是 R_0-代数，$\tilde{A}: R \to [0,1]$ 是 R 到 R_0 单位区间上的映射，则称 $\tilde{A}$ 为 R_0-代数 R 上的模糊集，用 $F(R)$ 表示 R_0-代数 R 上的模糊集全体。

定义 2.9 **[10]**令 R 是 R_0-代数，$\forall x, y \in R$，$A \subseteq R$ 若

(1) $1 \in A$；

(2) $x \in A$，$x \to y \in A \Rightarrow y \in A$。

因此我们称 A 为 R 上的 MP 滤子。

定义 2.10 **[10]**令 R 是 R_0-代数，若 $\forall x, y \in R$，当 $x \vee y \in A$ 时，$x \in A$ 或 $y \in A$，则称 A 为 R 上的素 MP 滤子。

定义 2.11 **[11]**令 R 是 R_0-代数，$\forall x, y, z \in R$，若

(1) $1 \in A$；

(2)若 $x \to (y \to x) \in A$，$x \to y \in A$ 那么 $x \to z \in A$。

则称 A 为 R 上的蕴含滤子。

定义 2.12 **[12]**令 R 是非空集合，R 上的犹豫模糊集 $\tilde{A}$ 定义如下：

$$\tilde{A}: \{(x, h_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in R\}$$

其中 $h_{\tilde{A}}(x)$ 是由区间 $[0,1]$ 上若干个不同值构成的集合，表示 R 中的元素 x 属于集合 $\tilde{A}$ 的若干种可能隶属度。

3. R_0-代数的几类反犹豫模糊滤子

3.1. R_0-代数的反犹豫模糊 MP 滤子

定义 3.1.1 令 $\tilde{A}$ 是 R 上的犹豫模糊集，若满足下列条件

(F_1) $h_{\tilde{A}}(1) \subseteq h_{\tilde{A}}(x)$，$\forall x \in R$；

(F$_2$) $h_{\tilde{A}}(y) \subseteq h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(x \to y)$，$\forall x, y \in R$。

则称 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。

定理 3.1.2 令 R 是 R$_0$-代数，$\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，那么

(F$_3$) $\tilde{A}$ 是单调不增。

证明：设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，则(F$_1$) (F$_2$)成立，设 $x, y \in R$，$x \le y$，则由(P$_1$)可得，$x \to y = 1$。

因此由定义 3.1.1 可知 $h_{\tilde{A}}(y) \subseteq h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(1) = h_{\tilde{A}}(x)$。

综上所述，(F$_3$)成立。

定理 3.1.3 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子当且仅当(F$_1$)与(F$_4$)成立，其中

(F$_4$) $h_{\tilde{A}}(x \to z) \subseteq h_{\tilde{A}}(x \to y) \cup h_{\tilde{A}}(y \to z)$ $\forall x, y, z \in R$。

证明：我们需证明，当成立时(F$_2$)与(F$_4$)等价，接下来我们假设(F$_2$)成立。

首先证(F$_2$) $\Rightarrow$ (F$_1$)；

因为(F$_1$)和(F$_2$)成立，所以可知(F$_3$)成立；

由(P$_{22}$)可知，$x \to y \le (y \to z) \to (x \to z)$，再由(F$_3$)可得

$$h_{\tilde{A}}((y \to z) \to (x \to z)) \subseteq h_{\tilde{A}}(x \to y);$$

由(F$_3$)得，$h_{\tilde{A}}(x \to z) \subseteq h_{\tilde{A}}(y \to z) \cup h_{\tilde{A}}((y \to z) \to (x \to z))$；

于是，我们有 $h_{\tilde{A}}(x \to z) \subseteq h_{\tilde{A}}(x \to y) \cup h_{\tilde{A}}(y \to z)$；

因此(F$_4$)成立；

再证(F$_4$) $\Rightarrow$ (F$_5$)；

由(F$_4$)可得 $h_{\tilde{A}}(1 \to y) \subseteq h_{\tilde{A}}(1 \to x) \cup h_{\tilde{A}}(x \to y)$；

由(T$_2$)有 $h_{\tilde{A}}(y) \subseteq h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(x \to y)$；

所以(F$_2$)成立，综上所述，定理得证。

定理 3.1.4 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子当且仅当(F$_3$)和(F$_5$)成立，其中

(F$_5$) $h_{\tilde{A}}(x \otimes y) \subseteq h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(y)$ $\forall x, y \in R$。

证明：设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子；

则由定理 3.1.2 直接可以得出(F$_3$)成立；

由(F$_2$)可得 $h_{\tilde{A}}(x \otimes y) \subseteq h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(x \to (x \otimes y))$；

又由(P$_{21}$)：$y \le x \to (x \otimes y)$，因此由(F$_3$)可得 $h_{\tilde{A}}(x \to (x \otimes y)) \le h_{\tilde{A}}(y)$；

从而 $h_{\tilde{A}}(x \otimes y) \subseteq h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(y)$ 即(F$_5$)成立。

反之，假设(F$_3$)和(F$_5$)成立，现在证明(F$_1$)和(F$_2$)成立，从而 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子；

因为 $x \le 1$，由(F$_3$)有 $h_{\tilde{A}}(1) \subseteq h_{\tilde{A}}(x)$，因此(F$_1$)成立；

由(F$_5$)可得，$h_{\tilde{A}}(x \otimes (x \to y)) \subseteq h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(x \to y)$；

由(P$_{20}$)：$x \otimes (x \to y)$ 和(F$_3$)可得 $h_{\tilde{A}}(y) \subseteq h_{\tilde{A}}(x \otimes (x \to y))$；

因此 $h_{\tilde{A}}(y) \subseteq h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(x \to y)$，即(F$_2$)成立；

综上所述，定理得证。

定理 3.1.5 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子当且仅当(F$_6$)和(F$_7$)成立，其中

(F$_6$) $h_{\tilde{A}}(x \otimes y) = h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(y)$ $\forall x, y \in R$；

(F$_7$) $h_{\tilde{A}}(x \cap y) = h_{\tilde{A}}(x) \cup h_{\tilde{A}}(y)$ $\forall x, y \in R$；

证明：设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子；

由(F_5)可得 $h_{\tilde{A}}(x\otimes y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)$；

由(P_{15})：$x\otimes y\le x\cap y$ 可得，$x\otimes y\le x, x\otimes y\le y$；

因此由(F_3)可得，$h_{\tilde{A}}(x)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\otimes y), h_{\tilde{A}}(y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\otimes y)$；

从而 $h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\otimes y)$；

故 $h_{\tilde{A}}(x\otimes y)=h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)$ 即(F_6)成立；

由(F_3)容易得到 $h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\cap y)$；

再由(P_{15})：$x\otimes y\le x\cap y$ 和(F_3)及(F_6)得

$$h_{\tilde{A}}(x\cap y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\otimes y)=h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y);$$

从而 $h_{\tilde{A}}(x\cap y)=h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)$ 即(F_7)成立。

反之，若(F_6)和(F_7)成立，则容易证明(F_3)和(F_5)成立，从而由定理 3.1.4 可知，$\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。

综上所述，定理得证。

定理 3.1.6 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子当且仅当(F_8)成立，其中

(F_8) $x\le y\to z\Rightarrow h_{\tilde{A}}(z)\subseteq h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)\quad \forall x,y,z\in R$。

证明：设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，$\forall x,y,z\in R$。

若 $x\le y\to z$，则由(P_{16})：$x\otimes y\le z$ 当且仅当 $x\le y\to z$ 知，$x\otimes y\le z$，所以由(F_3)和(F_5)可得，$h_{\tilde{A}}(z)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\otimes y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)$，故($F_8$)成立。

反之，假设(F_8)成立，由(P_{21})：$x\le y\to x\otimes y$ 和(F_8)可得 $h_{\tilde{A}}(x\otimes y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)$，即($F_5$)成立；

又由(P_{23})：$x\le x\cap y\to y$ 和(F_8)可得 $h_{\tilde{A}}(y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(x\cap y)$，由此可知 $x\le y$ 时 $h_{\tilde{A}}(y)\le h_{\tilde{A}}(x)$，即($F_3$)成立。

因此由定理 3.1.4 可知，$\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。

综上所述，定理得证。

定理 3.1.7 令 $\tilde{A}$ 是 R 上的犹豫模糊集，则 $\tilde{A}$ 为 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子当且仅当 $\forall\gamma\in P([0,1])$，若 $R(\tilde{A},\gamma)\ne\phi$，则 $R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的 MP 滤子。

证明：设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。

$\forall\gamma\in P([0,1])$ 且 $R(\tilde{A},\gamma)\ne\phi$，现在我们证明 $R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的 MP 滤子。

由 $R(\tilde{A},\gamma)\ne\phi$ 可知，$\exists x\in R$ 使得 $h_{\tilde{A}}(x)\subseteq\gamma$，再由($F_1$)可知，$h_{\tilde{A}}(1)\subseteq h_{\tilde{A}}(x)\subseteq\gamma$，故 $1\in R(\tilde{A},\gamma)$；

设 $x\in R(\tilde{A},\gamma)$，$x\to y\in R(\tilde{A},\gamma)$，因此我们可以得到 $h_{\tilde{A}}(x)\subseteq\gamma$，$h_{\tilde{A}}(x\to y)\subseteq\gamma$，接着由($F_2$)可知，$h_{\tilde{A}}(y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(x\to y)\subseteq\gamma\cup\gamma=\gamma$。

从而 $y\in R(\tilde{A},\gamma)$，故 $R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的 MP 滤子。

反之，证明 $\tilde{A}$ 为 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。

$\forall x\in R$，令 $h_{\tilde{A}}(x)=\gamma_1$，则有 $x\in R(\tilde{A},\gamma_1)$，即 $R(\tilde{A},\gamma_1)\ne\phi$，由 $R(\tilde{A},\gamma)\ne\phi$ 是 R 的 MP 滤子，则 $1\in R(\tilde{A},\gamma)$，从而 $h_{\tilde{A}}(1)\subseteq\gamma_1=h_{\tilde{A}}(x)$，故($F_1$)成立；

$\forall x,y\in R$，令 $\gamma_2=h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(x\to y)$，则 $x\in R(\tilde{A},\gamma_2)$，$x\to y\in R(\tilde{A},\gamma_2)$，即 $R(\tilde{A},\gamma_2)\ne\phi$；由 $R(\tilde{A},\gamma_2)$ 是 R 的 MP 滤子，因此可得 $y\in R(\tilde{A},\gamma_2)$，从而 $h_{\tilde{A}}(y)\subseteq\gamma_2=h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(x\to y)$，故($F_2$)成立。因此，$\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。

综上所述，定理得证。

定理 3.1.8 令 $\tilde{A}$ 是 R 上的犹豫模糊集，则 $\tilde{A}$ 为 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，则有 $\forall x \in R$，$R\left(\tilde{A},\gamma_0\right)$ 是 MP 滤子，这里 $\gamma_0 = h_{\tilde{A}}\left(x\right)$。

证明：由 $x \in R\left(\tilde{A},\gamma_0\right)$ 知，$R\left(\tilde{A},\gamma_0\right) \neq \phi$，因此由定理 3.1.7 可知 $R\left(\tilde{A},\gamma_0\right)$ 是 MP 滤子。

3.2. R_0-代数的反犹豫模糊素 MP 滤子

定义 3.2.1 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，若 $\tilde{A}$ 满足下列条件：

(F_9) $h_{\tilde{A}}\left(x\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) \quad \forall x, y \in R$。

则称 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子。

定理 3.2.2 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，则 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子当且仅当(F_{10})成立，其中(F_{10}) $h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) = h_{\tilde{A}}\left(x\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y\right) \quad \forall x, y \in R$。

证明：设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子，则(F_9)成立，又由(F_3)可知 $\tilde{A}$ 单调不增，从而可知 $h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(x\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y\right)$，因此($F_{10}$)成立。

反之，设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子且满足(F_{10})，则(F_9)显然成立，故由定义 3.2.1 可知，$\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子。

综上所述，定理得证。

定理 3.2.3 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，则 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子当且仅当(F_{11})成立，其中(F_{11}) $h_{\tilde{A}}\left(x \to y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y \to x\right) = h_{\tilde{A}}\left(1\right) \quad \forall x, y \in R$。

证明：若 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子，则由(F_{10})可知，
$h_{\tilde{A}}\left(x \to y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y \to x\right) = h_{\tilde{A}}\left(\left(x \to y\right) \cup \left(y \to x\right)\right)$，根据($P_6$)可知 $\left(x \to y\right) \cup \left(y \to x\right) = 1$，从而 $h_{\tilde{A}}\left(x \to y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y \to x\right) = h_{\tilde{A}}\left(1\right)$，因此($F_{11}$)成立；

反之，设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子且(F_{11})成立，$\forall x, y \in R$ 则由(P_{10})：
$x \cup y \leq \left(\left(x \to y\right) \to y\right) \cap \left(\left(y \to x\right) \to x\right)$ 及(F_3)可得 $h_{\tilde{A}}\left(\left(x \to y\right) \to y\right) \cap h_{\tilde{A}}\left(\left(y \to x\right) \to x\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right)$ 从而 $h_{\tilde{A}}\left(\left(x \to y\right) \to y\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right)$，$h_{\tilde{A}}\left(\left(y \to x\right) \to x\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right)$，由($F_2$)可得
$h_{\tilde{A}}\left(y\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(x \to y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(\left(x \to y\right) \to y\right)$，$h_{\tilde{A}}\left(x\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(y \to x\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(\left(y \to x\right) \to x\right)$，所以
$h_{\tilde{A}}\left(y\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(x \to y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right)$，$h_{\tilde{A}}\left(x\right) \subseteq h_{\tilde{A}}\left(y \to x\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right)$

因此，
$$\begin{aligned} h_{\tilde{A}}\left(x\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y\right) &\subseteq \left(h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(x \to y\right)\right) \cup \left(h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y \to x\right)\right) \\ &= h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) \cup \left(h_{\tilde{A}}\left(x \to y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y \to x\right)\right) \\ &\subseteq h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(1\right) \quad (\text{由}(F_{11})\text{可知}) \\ &= h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) \end{aligned}$$

即(F_9)成立，故 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子。

综上所述，定理得证。

定理 3.2.4 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的犹豫模糊集，则 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子当且仅当 $\forall \gamma \in P\left(\left[0,1\right]\right)$，若 $R\left(\tilde{A},\gamma\right) \neq \phi$，则 $R\left(\tilde{A},\gamma\right)$ 是 R 的素 MP 滤子。

证明：设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子，则 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，因此由定理 3.1.7 可知，当 $R\left(\tilde{A},\gamma\right) \neq \phi$ 时，$R\left(\tilde{A},\gamma\right)$ 是 R 的 MP 滤子。假设 $\forall x, y \in R\left(\tilde{A},\gamma\right)$，则 $h_{\tilde{A}}\left(x\right) \subseteq \gamma$，$h_{\tilde{A}}\left(y\right) \subseteq \gamma$，由($F_{10}$)可知，$h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) = h_{\tilde{A}}\left(x\right) \cup h_{\tilde{A}}\left(y\right) \subseteq \gamma$，故 $h_{\tilde{A}}\left(x \cup y\right) \subseteq \gamma$，从而 $R\left(\tilde{A},\gamma\right)$ 是 R 的素 MP 滤子；

反之，当 $R\left(\tilde{A},\gamma\right) \neq \phi$ 时，则 $R\left(\tilde{A},\gamma\right)$ 是 R 的素 MP 滤子，则 $R\left(\tilde{A},\gamma\right)$ 是 R 的 MP 滤子，因此由定理 3.1.7

可知，$\tilde{A}$ 为 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。假设 $\forall x,y\in\tilde{A}$，令 $h_{\tilde{A}}(x\cup y)=\gamma_0$，即 $x\cup y\in R(\tilde{A},\gamma_0)$，而 $R(\tilde{A},\gamma_0)\neq\phi$，从而有 $R(\tilde{A},\gamma_0)$ 为素 MP 滤子，即而可知 $x\in R(\tilde{A},\gamma_0)$ 或 $y\in R(\tilde{A},\gamma_0)$，即有 $h_{\tilde{A}}(x)\subseteq\gamma_0$ 或 $h_{\tilde{A}}(y)\subseteq\gamma_0$，因此 $h_{\tilde{A}}(x)\cup h_{\tilde{A}}(y)\subseteq\gamma_0\cup\gamma_0=\gamma_0=h_{\tilde{A}}(x\cup y)$，故 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊素 MP 滤子。

综上所述，定理得证。

3.3. R_0-代数的反犹豫模糊蕴含滤子

定义 3.3.1 设 R 是 R_0 代数，若 $\forall x,y,z\in R$，满足以下条件：

(F_{11}) $h_{\tilde{A}}(1)\subseteq h_{\tilde{A}}(x)$；

(F_{12}) $h_{\tilde{A}}(x\to z)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\to(y\to z))\cup h_{\tilde{A}}(x\to y)$。

则称 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子。

定理 3.3.2 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子，则 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。

证明：设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子，在(F_{12})中，令 $x=1$，则有

$$h_{\tilde{A}}(z)=h_{\tilde{A}}(1\to z)\subseteq h_{\tilde{A}}(1\to(y\to z))\cup h_{\tilde{A}}(1\to y)=h_{\tilde{A}}(y\to z)\cup h_{\tilde{A}}(y)$$

因此由定义 3.1.1 可知，$\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。

综上所述，定理得证。

定理 3.3.3 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子，则 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子当且仅当 $\forall x,y,z\in R$，$h_{\tilde{A}}(x\to z)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\to(z'\to y))\cup h_{\tilde{A}}(y\to z)$ 成立。

证明：假设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子，$\forall x,y,z\in R$，我们有：

$$h_{\tilde{A}}(x\to(z'\to y))\cup h_{\tilde{A}}(y\to z)=h_{\tilde{A}}(z'\to(y'\to x'))\cup h_{\tilde{A}}(z'\to y')\supseteq h_{\tilde{A}}(z'\to x')=h_{\tilde{A}}(x\to z)$$

反之，我们假设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子且有 $\forall x,y,z\in R$，$h_{\tilde{A}}(x\to z)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\to(z'\to y))\cup h_{\tilde{A}}(y\to z)$，从而我们可以得到：

$$h_{\tilde{A}}(x\to(y\to z))\cup h_{\tilde{A}}(x\to y)=h_{\tilde{A}}\left(z'\to\left((x')'\to y'\right)\right)\cup h_{\tilde{A}}(y'\to x')\supseteq h_{\tilde{A}}(z'\to x')=h_{\tilde{A}}(x\to z)$$

因此，$\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子。

综上所述，定理得证。

定理 3.3.4 设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子，$\forall x,y,z\in R$，则有(F_{13})成立，其中(F_{13}) $h_{\tilde{A}}(x\to y)=h_{\tilde{A}}(x\to(y'\to y))$。

证明：假设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子，则由定理 3.3.3 可知：

$$h_{\tilde{A}}(x\to y)\subseteq h_{\tilde{A}}(x\to(y'\to y))\cup h_{\tilde{A}}(y\to y)=h_{\tilde{A}}(x\to(y'\to y))$$

又由于 $x\to y\leq x\to(y'\to y)$ 与(F_3)可知，$h_{\tilde{A}}(x\to y)\supseteq h_{\tilde{A}}(x\to(y'\to y))$，因此我们有 $h_{\tilde{A}}(x\to y)=h_{\tilde{A}}(x\to(y'\to y))$，即($F_{13}$)成立。

综上所述，定理得证。

定理 3.3.5 令 $\tilde{A}$ 是 R 上的犹豫模糊集，则 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子当且仅当 $\forall\gamma\in P([0,1])$，若 $R(\tilde{A},\gamma)\neq\phi$，则 $R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的蕴涵滤子。

证明：假设 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子，$\forall\gamma\in P([0,1])$，$R(\tilde{A},\gamma)\neq\phi$，我们由定理 3.3.2 和定理 3.1.7 可知，$R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的 MP 滤子。现在我们要得到 $R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的蕴涵滤子，如果

$x \to (y \to z) \in R(\tilde{A},\gamma)$ 且 $x \to y \in R(\tilde{A},\gamma)$，从而得到 $h_{\tilde{A}}(x \to (y \to z)) \subseteq \gamma$ 且 $h_{\tilde{A}}(x \to y) \subseteq \gamma$，因为 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子，我们可以得到 $h_{\tilde{A}}(x \to z) \subseteq h_{\tilde{A}}(x \to (y \to z)) \cup h_{\tilde{A}}(x \to y) \subseteq \gamma$，继而得到 $x \to z \in R(\tilde{A},\gamma)$，因此 $R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的蕴涵滤子；

反之，假设 $\forall \gamma \in P([0,1])$，若 $R(\tilde{A},\gamma) \neq \phi$,则有 $R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的蕴涵滤子，由定理 3.1.7 可知 $\tilde{A}$ 为 R 上的反犹豫模糊 MP 滤子。现在我们需要证明 $\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子。令 $\gamma = h_{\tilde{A}}(x \to (y \to z)) \cup h_{\tilde{A}}(x \to y)$，因此 $x \to (y \to z) \in R(\tilde{A},\gamma)$ 且 $x \to y \in R(\tilde{A},\gamma)$，又因为 $R(\tilde{A},\gamma)$ 是 R 的蕴涵滤子，所以可以得到 $x \to z \in R(\tilde{A},\gamma)$，即 $h_{\tilde{A}}(x \to z) \subseteq h_{\tilde{A}}(x \to (y \to z)) \cup h_{\tilde{A}}(x \to y)$，由定义 3.3.1 可知，$\tilde{A}$ 是 R 上的反犹豫模糊蕴含滤子。

综上所述，定理得证。

参考文献

[1] 刘春辉, 何涛. FI 代数的犹豫模糊滤子与犹豫模糊同余关系[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(7): 266-272.

[2] 傅小波, 张建忠, 王兰. 布尔代数的犹豫模糊理想[J]. 模糊系统与数学, 2020, 34(4): 44-56.

[3] 刘春辉. Fuzzy 蕴涵代数的犹豫模糊滤子格[J]. 模糊系统与数学, 2021, 35(4): 30-39.

[4] 傅小波, 张建忠. 格蕴涵代数的犹豫模糊 LI-理想[J]. 模糊系统与数学, 2019, 33(2): 36-44.

[5] 姜曼. 布尔代数的犹豫模糊点子代数[J]. 湖北大学学报: 自然科学版, 2022, 44(1): 46-50.

[6] 彭家寅. 伪 BL-代数的犹豫模糊滤子[J]. 计算机工程与应用, 2019, 55(13): 42-50.

[7] 赵东升. 逆序对合对应的构造[J]. 陕西师范大学学报: 自然科学版, 1989, 17(2): 1-4.

[8] 姜曼. R_0-代数的几类犹豫模糊滤子[J]. 模糊系统与数学, 2021, 35(1): 46-52.

[9] 苏恩锁, 王国俊. R_0-代数的 Fuzzy MP 滤子[J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(2): 15-23.

[10] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[11] Liu, L.Z. and Li, K.T. (2005) Fuzzy Implicative and Boolean Filters of R_0 Algebras. *Information Sciences*, 2005, **171**, 61-71. https://doi.org/10.1016/j.ins.2004.03.017

[12] Torra, V. (2010) Hesitant Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systmes*, **25**, 529-539. https://doi.org/10.1002/int.20418