Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(8), 1312-1326
Published Online August 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.128144

Hans汉斯

一类Caputo分数阶中立型时滞投影神经网络

王　卓

成都理工大学，数理学院，数学地质四川省重点实验室，四川 成都

收稿日期：2022年7月12日；录用日期：2022年8月11日；发布日期：2022年8月19日

摘　要

本文主要研究一类具有时滞的Caputo分数阶中立型投影神经网络。首先，我们利用Sadovskii不动点定理和压缩映像原理，在适当条件下，证明了时滞投影神经网络解的存在和唯一性。其次，利用一个新的Gronwall不等式证明得到了投影时滞系统的有限时间稳定性的充分条件。最后，两个数值例子证明了我们的结果。

关键词

分数阶投影神经网络，时滞，有限时间稳定性

A Class of Caputo Fractional-Order Neutral Delayed Projection Neural Networks

Zhuo Wang

Geomathematics Key Laboratory of Sichuan Province, College of Mathematics and Physics, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: Jul. 12th, 2022; accepted: Aug. 11th, 2022; published: Aug. 19th, 2022

Abstract

This paper mainly focuses on a class of Caputo fractional neutral projection neural networks with time delay. Firstly, by using contraction mapping principle and fixed point theorem, we propose the existence and uniqueness of solutions for time-delay projection neural networks under appropriate conditions. Secondly, a new Gronwall inequality is used to derive the finite-time stability of projection delay systems. Finally, two numerical examples prove our results.

Keywords

Fractional-Order Projection Neural Network, Delay, Finite-Time Stability

文章引用: 王卓. 一类 Caputo 分数阶中立型时滞投影神经网络[J]. 理论数学, 2022, 12(8): 1312-1326.
DOI: 10.12677/pm.2022.128144

1. 引言

随着科学技术的发展和人们认知水平的提高，学者对神经网络稳定性的探究越来越多。尤其在组合优化、传感器信号处理、自适应控制等领域，神经网络被广泛应用。在设计用于解决实际问题的神经网络模型时，我们首先要考虑神经网络的稳定性，确保系统处于稳定状态至关重要。然而，在现实生活中，时滞[1]经常发生在动力系统中，并对系统的稳定性产生重大影响。因此，我们在建立模型时应将时滞因素考虑入内。许多学者研究了时滞神经网络的稳定性，例如[2]。作为整数阶微积分的推广，分数阶积分和微分最早由莱布尼兹于 1695 年提出，用于处理任意阶的积分和导数。从已有的研究内容可以看出，分数阶动力系统模型优于整数阶动力系统模型，它更加准确地描述了各种运动的记忆和遗传特征。分数阶模型在波传播、医学成像和流体力学等领域发挥着重要作用。因此，越来越多的学习者逐渐开始关注分数阶神经网络动态系统[3]。例如，王[4]推导了三维含有时滞和不同环结构的分数阶神经网络稳定的条件。陈和宋[5]构造了一个合适的 Lyapunov Krasovskii 泛函，为实现稳定性做出了新的贡献。他们利用不等式方法，提出了保证具有概率时变时滞的分数阶复神经网全局渐近稳定的条件。同样，李[6]研究了具有四元数的分数阶数值神经网络的全局同步稳定性。

一般来说，时滞不仅发生在当前的状态内，也会发生在过去的时间段内。中立型时滞神经网络[7]是具有多时滞的神经网络的特例。投影神经网络是在一般的神经网络基础上加入投影算子的神经网络。投影动力系统在生物、种群生态问题、病毒传播和扩散模型以及大规模集成电路方面均有涉及。众所周知，投影神经网络(动态系统)在处理线性规划、差分不等式问题、互补问题和公共交通等方面做出了巨大贡献。近年来，人们越来越重视投影神经网络的稳定性，并在[8]中得到了许多有效的研究结果。例如，在[9]中，投影神经网络在二次规划中有一个新的应用。张[8]通过求解中立型延迟投影神经网络并使用线性变分不等式方法，得到了新的结果。宋等人[10]研究了一类参数不确定神经网络的鲁棒稳定性并提出了有关分数阶复值投影神经网络的新观点。李和黄等人[11]利用李雅普诺夫方法、矩阵不等式技术和同胚原理研究了一类分数阶复值投影神经网络的渐近稳定性。在[7]中，李和吴等人对 Riemann-Liouville 分数阶中立型时滞神经网络的渐近稳定性做了研究。

本文对概念更强于渐进稳定性的有限时间稳定性进行了分析，它是指系统在给定区间内的稳定状态。到目前为止，学者对鲁棒稳定性、渐进稳定性等都有了一定的研究，且对分数阶中立型时滞神经网络的稳定性已经取得了很多研究成果，而这些成果全都集中在有限时间的状态内。但很少有人对分数阶中立型时滞投影神经网络的有限时间稳定性进行分析。而在实际运用中，保证系统有限的时间间隔内处于稳定状态是十分必要的。如导弹射击，卫星的运行，需要保证其状态轨迹在一定的射程范围内；在医学方面，预测个体疾病病变轨迹，做出相应的模型，对于治疗如阿尔茨海默症等疾病提供了条件。所以对有限时间稳定性的研究是很有必要的。

受上述文章的启发，本文对如下一种含有时滞的 Caputo 中立型分数投影神经网络(CFNDPNN)解的相关问题进行了分析，探究了该动力系统的一些性质：

$$\begin{cases} {}^{C}D_0^{\alpha}x(t) = -2x(t) + P_K\left(x(t) - \rho Mx(t) - \rho c\right) + Bx(t-\tau) + E\left({}^{C}D_0^{\beta}x(t-\tau)\right), t\in[0,T] \\ x(t) = \phi(t), t\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{1.1}$$

等同于下列方程

$$\begin{cases} {}^{C}D_0^{\alpha}x(t) = -2x(t) + P_K\left(Ax(t)+\lambda\right) + Bx(t-\tau) + E\left({}^{C}D_0^{\beta}x(t-\tau)\right), t\in[0,T] \\ x(t) = \phi(t), t\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{1.2}$$

其中，${}^{C}D_0^{\alpha}x(t)$，${}^{C}D_0^{\beta}x(t)$ 表示 $x(t)$ 的 Caputo 分数阶导数，$0<\beta\le\alpha<1$，n 表示神经网络中神经元的数量，$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$ 是 t 时刻的状态向量，K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭凸子集，P_K 是投影算子，$\tau>0$ 表示时滞，$\phi(t)\in C\left([-\tau,0],\mathbb{R}^n\right)$ 是初始状态函数，$C\left([-\tau,0],\mathbb{R}^n\right)$ 表示所有连续函数从 $[-\tau,0]$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射，其中

$$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}=I-\rho M,\quad \lambda=\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_n\right)^{\mathrm{T}}=-\rho c,\quad B=\left(b_{ij}\right)_{n\times n},\quad E=\left(e_{ij}\right)_{n\times n}$$

本文的主要贡献包括以下三个部分：i) 本文是尝试考虑具分数阶中立型投影神经网络的文章之一。ii) 在适当的条件下，我们推导了 CFNDPNN 解的一些性质。iii) 我们使用一个新的 Gronwall 不等式来证明有限时间稳定性，它与[7]所提到的渐近稳定性不同，是对中立型分数阶投影神经网络稳定性研究的一个很好的补充。本文用了新的 Gronwall 不等式来证有限时间稳定性，不同于其他稳定性的证明，用 beta 函数来证明，使计算结果更易于验证。主要难点在于有限时间稳定性的证明，以及处理时滞项的导数，我们用了一个新的 Gronwall 不等式，计算量大且复杂。

现在简要介绍一下本文的主要结构。在下一节中，我们将给出一些必要的概念以及引理。随后，第 3 节描述了 CFNDPNN 在一些适当条件下的解的性质，同时给出 CFNDPNN 的有限时间稳定性。在最后一节，总结全文之前给出的数值例子，用以验证我们的主要结果。

2. 预备知识

在本章中，我们介绍一些定义和引理。

定义 1 [12]如果 $x(t)\in L^1\left([0,+\infty),\mathbb{R}\right)$，函数 x 的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Riemann-Liouville 积分定义如下

$$I_0^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(t)\,\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

$\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数 $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}s^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$。

定义 2 [12]函数 x 的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 导数定义如下

$${}^{C}D_0^{\alpha}x(t)=\int_0^t \frac{(t-v)^{-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)}x^{(m)}(v)\,\mathrm{d}v,\quad m-1<\alpha<m\in\mathbb{Z}^+ \tag{2.2}$$

定义 3 [13]如果 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空闭凸子集，则投影算子 $P_K:\mathbb{R}^n\to K$ 定义如下

$$P_K(y)=\arg\min_{z\in K}\|y-z\|,\quad \forall y\in\mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

定义 4 [12]函数 x 的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Riemann-Liouville 导数定义如下

$${}^{r}D_0^{\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\int_0^t (t-v)^{-\alpha}x(v)\,\mathrm{d}v,\quad m-1<\alpha<m\in\mathbb{Z}^+ \tag{2.4}$$

定义 5 [2]对于具有两个不同初始函数 $\varphi(t)$，$\phi(t)$ 的任意两个解 $x(t)$，$y(t)$，令 $u(t)=x(t)-y(t)$，$\psi(t)=\varphi(t)-\phi(t)$，则(1.2)关于 $\{\delta,\varepsilon,T\}$ 是有限时间稳定的，如果有 $\|\psi\|=\sup\limits_{s\in[-\tau,0]}\|\psi(s)\|<\delta$，则 $\|u(t)\|\le\varepsilon$，其中 $t\in[0,T]$，$0<\delta<\varepsilon$。

引理 1 [14]假设 $0<\lambda<1$，则有

$$I_0^{\lambda C}D_0^{\alpha}x(t)=I_0^{\lambda-\alpha}x(t)-\frac{t^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}x(0),\quad t\geq 0 \tag{2.5}$$

规定 $I_0^0x(t)=x(t)$

引理 2 [12]假设 $p\geq q\geq 0$，则

$$^{r}D_0^{p}I_0^{q}x(t)={}^{r}D_0^{p-q}x(t) \tag{2.6}$$

引理 3 [12]假设 $\lambda\in(0,1)$，

$$^{C}D_0^{\lambda}x(t)={}^{r}D_0^{\lambda}x(t)-\frac{t^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)}x(0),t>0 \tag{2.7}$$

引理 4 [14]假设 $\beta>-1,n-1<\alpha<n,n\in\mathbb{N}$，则有

$$^{r}D_0^{\alpha}\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}=\frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \tag{2.8}$$

引理 5 [15]若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭凸子集，则投影算子 P_K 是非扩张的

$$\left\|P_K(u)-P_K(v)\right\|\leq\|u-v\|,\quad \forall u,v\in\mathbb{R}^n$$

引理 6 [16]设 X 是 Banach 空间，若有一个集值映射 $F=F_1+F_2:X\to X$ 是 k-Lipschitz，且紧致于 $0\leq k<1$，则 F 是 k 凝聚的。

引理 7 [17] N 是 Banach 空间中的一个闭凸有界集，$N(Q)\subseteq Q$，那么 N 在 Q 中至少有一个不动点。

引理8 [2]设 $a(t),c(t),d(t)\in C([0,T],\mathbb{R}^n)$，$\varphi(t)\in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$，$a(t)$ 和 $\chi(t)$ 是非减的，$a(0)=\chi(0)$，若 $v(t)\in C([-\tau,T],\mathbb{R}^n)$

$$\begin{cases}v(t)\leq a(t)+\int_0^t\frac{(t-s)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)}\left[c(s)v(s)+d(s)v(s-\tau)\right]\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T]\\ v(t)\leq\chi(t),t\in[-\tau,0]\end{cases}$$

则

$$v(t)\leq\left\{A(t)\exp\left(\int_0^t\left[C(s)v(s)+D(s)v(s-\tau)\right]\mathrm{d}s\right)\right\}^{\gamma},t\in[0,T]$$

其中，$D(t)=\frac{4^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\xi)}\left(B\left(\frac{\xi-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-\xi}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}t^{\frac{\xi-\gamma}{\gamma}}d^{\frac{1}{\gamma}}(t)$，

$$C(t)=\frac{4^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\xi)}\left(B\left(\frac{\xi-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-\xi}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}t^{\frac{\xi-\gamma}{\gamma}}c^{\frac{1}{\gamma}}(t),A(t)=2^{\frac{1}{\gamma}-1}a^{\frac{1}{\gamma}}(t),0<\gamma<\xi<1$$

$B(\cdot,\cdot)$ 是 beta 函数，$B(x,y)=\int_0^1t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t\left(\mathrm{Re}(x)>0,\mathrm{Re}(y)>0\right)$。

3. 主要内容

在这一节中，我们给出了有关系统(1.2)解的相关定理。首先，我们给出存在性定理。

定理 3.1 $x(t)$ 是 CFNDPNN(1.2)的解，当且仅当 $x(t)$ 是下列积分系统的解。

$$\begin{cases} x(t)=\phi(0)-E\phi(-\tau)\dfrac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+E\dfrac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}x(s-\tau)\mathrm{d}s \\ \qquad +\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[-2x(s)+P_K\left(Ax(s)+\lambda\right)+Bx(s-\tau)\right]\mathrm{d}s, \quad t\in[0,T] \\ x(t)=\phi(t), \quad t\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{3.1}$$

证明对 $t\in[-\tau,0]$，显然 $x(t)=\phi(t)$ 是上式的解，反之亦然。若 $\alpha<\beta$，则

必要性：对 $t\in[0,T]$，在(3.1)两侧应用分数积分 I_0^α

$$I_0^\alpha\left[{}^cD_0^\alpha x(t)-E\,{}^cD_0^\beta\left(x(t-\tau)\right)\right]=I_0^\alpha\left[-2x(t)+P_K\left(Ax(t)+\lambda\right)+Bx(t-\tau)\right] \tag{3.2}$$

由引理 2.1 可得

$$x(t)-x(0)-E\left[I_0^\alpha x(t-\tau)\right]=I_0^\alpha\left[-2x(t)+P_K\left(Ax(t)+\lambda\right)+Bx(t-\tau)\right]$$

$$x(t)=x(0)-E\phi(-\tau)\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+E\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}x(s-\tau)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[-2x(t)+P_K\left(Ax(t)+\lambda\right)+Bx(t-\tau)\right]\mathrm{d}s$$

充分性：如果 $x(t)$ 是系统(3.1)的解，将 ${}^CD_0^\alpha$ 运用到(3.1)两侧可得

$$\begin{aligned} {}^CD_0^\alpha x(t)&=\frac{-E\phi(-\tau)\,{}^CD_0^\alpha t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+{}^CD_0^\alpha\frac{E}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}x(s-\tau)\mathrm{d}s \\ &\quad+{}^CD_0^\alpha I_0^\alpha\left[-2x(t)+P_K\left(Ax(t)+\lambda\right)+Bx(t-\tau)\right]\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$${}^CD_0^\alpha I_0^\alpha\left[-2x(t)+P_k\left(Ax(t)+\lambda\right)+Bx(t-\tau)\right]=-2x(t)+P_k\left(Ax(t)+\lambda\right)+Bx(t-\tau) \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &{}^cD_0^\alpha I_0^{\alpha-\beta}Ex(t-\tau) \\ &={}^rD_0^\alpha I_0^{\alpha-\beta}Ex(t-\tau)-E\frac{t^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha+1}\left[I_0^{\alpha-\beta}x(t-\tau)\right]\Big|_{t=0} \\ &={}^rD_0^\alpha I_0^{\alpha-\beta}Ex(t-\tau) \\ &=E\,{}^rD_0^\beta x(t-\tau) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &E\phi(-\tau)\,{}^cD_0^\alpha\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \\ &={}^CD_0^\alpha E\phi(-\tau)\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \\ &={}^rD_0^\alpha E\phi(-\tau)\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}-\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left[E\phi(-\tau)\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]\Bigg|_{t=0} \\ &={}^rD_0^\alpha E\phi(-\tau)\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} \\ &=E\phi(-\tau)\frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

由(2.3)和(2.4)可得

$$ {}^{C}D_0^{\alpha} I_0^{\alpha-\beta} Ex(t-\tau) - E\phi(-\tau)\, {}^{C}D_0^{\alpha} \frac{t^{\alpha-\beta}}{\alpha-\beta+1} = E\, {}^{C}D_0^{\beta} x(t-\tau) - E\phi(-\tau) \frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} = E\, {}^{C}D_0^{\beta} x(t-\tau) \tag{3.6} $$

由(3.4)和(3.6)可得

$$ {}^{C}D_0^{\alpha} x(t) = -2x(t) + P_k\left(x(t) - \rho Mx(t) - \rho c\right) + Bx(t-\tau) + E\left({}^{c}D_0^{\beta} x(t-\tau)\right)。 $$

3.1. 解的存在性和有界性

定理 3.2 如果 $\frac{3\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)} T^{\alpha-\beta} < 1$，$\frac{3\|E\|+\|A\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)} T^{\alpha-\beta} < 1$，则系统(1.2)至少有一个解。

证明定义如下算子 $\Phi : C(J, \mathbb{R}^n) \to C(J, \mathbb{R}^n)$

$$ (\Phi x)(t) = \phi(0) - E\phi(-\tau) \frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{E}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} x(s-\tau)\mathrm{d}s $$
$$ + \frac{2E}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[P_k\left(Ax(s)+\lambda\right) + Bx(s-\tau)\right]\mathrm{d}s $$

$$ F : C(J, \mathbb{R}^n) \to C(J, \mathbb{R}^n),\ G : C(J, \mathbb{R}^n) \to C(J, \mathbb{R}^n) $$

$$ (Fx)(t) = \phi(0) - E\phi(-\tau) \frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{E}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} x(s-\tau)\mathrm{d}s $$
$$ + \frac{2E}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s)\mathrm{d}s $$

$$ (Gx)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[P_k\left(Ax(s)+\lambda\right) + Bx(s-\tau)\right]\mathrm{d}s $$

显然，$\Phi = F + G$，令 $B_\delta = \left\{x \in C(J, \mathbb{R}^n), \|x\| \le \delta\right\}$，可知 B_δ 是 $C(J, \mathbb{R}^n)$ 上的有界闭凸子集，其中

$$ \delta \ge \frac{\|\varphi(0)\| + \frac{\|E\| + \|\varphi(-\tau)\| + (\|E\| + \|B\|)\|\psi\| + \|\lambda\| + \|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)} T^{\alpha-\beta}}{1 - \frac{3\|E\| + \|A\| + \|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)} T^{\alpha-\beta}},\quad \varphi \in K $$

存在足够大的 $\delta > 0$ 使得

$$ \|x(t)\| < \delta,\quad t \ge -\tau $$

从上述引理中可知，如果我们证明 Φ 在 B_δ 在中有一个不动点，那么系统(1.2)有一个解。该过程可以分为以下三个步骤。

步骤 1 假设 Φ 是一个到自身的映射。令 $\Phi(B_\delta) \subset B_\delta$。如果 $t \in [-\tau, 0]$，则 $x(t) = \phi(t)$。因此，从 ϕ 的有界性可以看出，$x(t)$ 是有界的。

对任意的 $x \in B_\delta$，若 $t \in [0, T]$，可得

$$ \begin{aligned} \|(\Phi x)(t)\| \le \|\phi(0)\| &+ \frac{\|E\phi(-\tau)\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} t^{\alpha-\beta} + \frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} \|x(s-\tau)\|\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\|-2x(s)\| + \|P_k\left(Ax(s)+\lambda\right) + Bx(s-\tau)\|\right]\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.7} $$

根据定义 2.3，Φ 是非空的。我们可以选一个点 $\varphi \in K$，使下列不等式成立

$$\left\|P_K(0)\right\| \le \|\varphi\|$$

所以有

$$\begin{aligned}
&\left\|P_k\left(Ax(s)+\lambda\right)+Bx(s-\tau)\right\| \\
&= \left\|P_k\left(Ax(s)+\lambda-P_k(0)+P_k(0)+Bx(s-\tau)\right)\right\| \\
&\le \left\|P_k\left(Ax(s)+\lambda\right)-P_k(0)+P_k(0)\right\|+\left\|Bx(s-\tau)\right\| \\
&\le \left\|Ax(s)+\lambda\right\|+\|\varphi\|+\left\|Bx(s-\tau)\right\| \\
&\le \|A\|\left\|x(s)\right\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|+\|B\|\left\|x(s-\tau)\right\|
\end{aligned} \tag{3.8}$$

由(3.7)和(3.8)我们可知

$$\begin{aligned}
\left\|(\Phi x)(t)\right\| \le{}& \left\|\phi(0)\right\|+\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s-\tau)\right\|\mathrm{d}s \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[\left\|-2x(s)\right\|+\left\|P_k\left(Ax(s)+\lambda\right)+Bx(s-\tau)\right\|\right]\mathrm{d}s \\
\le{}& \left\|\phi(0)\right\|\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s-\tau)\right\|\mathrm{d}s \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left[\left\|-2x(s)\right\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|+\|B\|\left\|x(s-\tau)\right\|\right]\mathrm{d}s \\
\le{}& \left\|\phi(0)\right\|+\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s-\tau)\right\|\mathrm{d}s \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left[\left\|-2x(s)\right\|+\|A\|\left\|x(s)\right\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|+\|B\|\left\|x(s-\tau)\right\|\right]\mathrm{d}s \\
\le{}& \left\|\phi(0)\right\|+\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s-\tau)\right\|\mathrm{d}s \\
&+\frac{2\|E\|+\|A\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s)\right\|\mathrm{d}s+\frac{\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\,\mathrm{d}s \\
&+\frac{\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s-\tau)\right\|\mathrm{d}s \\
\le{}& \left\|\phi(0)\right\|+\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{\|E\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s-\tau)\right\|\mathrm{d}s \\
&+\frac{2\|E\|+\|A\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s)\right\|\mathrm{d}s+\frac{\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}s \\
\le{}& \left\|\phi(0)\right\|+\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{\|E\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{-\tau}^{t-\tau}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(u)\right\|\mathrm{d}u \\
&+\frac{2\|E\|+\|A\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s)\right\|\mathrm{d}s+\frac{\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \|\phi(0)\|+\frac{\|E\phi(-\tau)\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{\|E\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{-\tau}^{0}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(u)\|\mathrm{d}u \\
&\quad+\frac{\|E\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t-\tau}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(u)\|\mathrm{d}u+\frac{\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{2\|E\|+\|A\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)\|\mathrm{d}s \\
&\le \|\phi(0)\|+\frac{\|E\phi(-\tau)\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{(\|E\|+\|B\|)\|\psi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)\|\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{(\|E\|+\|B\|)\delta}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}s+\frac{\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{(2\|E\|+\|A\|)\delta}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)\|\mathrm{d}s \\
&\le \|\phi(0)\|+\frac{\|E\phi(-\tau)\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{(\|E\|+\|B\|)\delta+\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{(\|E\|+\|B\|)\|\psi\|+(2\|E\|+\|A\|)\delta}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)\|\mathrm{d}s \\
&\le \|\phi(0)\|+\frac{\|E\phi(-\tau)\|+(\|E\|+\|B\|)\|\psi\|+(3\|E\|+\|A\|+\|B\|)\delta+\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}T^{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

这就证明了$\Phi(B_\delta)\subset B_\delta$

步骤 2 F 是 k_1 压缩，对$t\in[0,T]$， $x,y\in B_\delta$，有

$$\begin{aligned}
\|(Fx)(t)-(Fy)(t)\| &\le \frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s-\tau)-y(s-\tau)\|\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{2\|E\|}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\|x(s)-y(s)\|\mathrm{d}s \\
&\le \frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(u)-y(u)\|\mathrm{d}u \\
&\quad+\frac{2\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)-y(s)\|\mathrm{d}s \\
&\le \frac{3\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}s\|x-y\| \\
&= k_1\|x-y\|_C
\end{aligned}$$

其中，

$$k_1=\frac{3\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}T^{\alpha-\beta}$$

因此，对$t\in[0,T]$， $x,y\in B_\delta$，有

$$\|F(x)-F(y)\|_C=\sup_{t\in J}\|(Fx)(t)-(Fy)(t)\|\le k_1\|x-y\|_C$$

由于 $0<k_1<1$，所以 F 是 B_δ 上的一个压缩映射。

步骤 3 G 是紧的。

(1) $G(B_\delta)$ 是有界的，对任意的 $t\in[0,T]$， $x\in B_\delta$， 可得

$$\|(Gx)(t)\|\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|P_K(Ax(s)+\lambda)+Bx(s-\tau)\|\mathrm{d}s$$
$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[\|A\|\|x(s)\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|+\|B\|\|x(s-\tau)\|\right]\mathrm{d}s$$

所以有

$$\|Gx\|\le\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\alpha}\left[(\|A\|\|x\|+\|B\|)\|\psi\|+\|\varphi\|+\|\lambda\|\right]$$
$$\le\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\alpha}\left[(\|A\|+\|B\|)\|\delta\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|+\|B\|\|\psi\|\right]$$

因此， $G(B_\delta)$ 是有界的

(2) Gx 是连续的。

$$0\le a<b<T,x\in B_\delta,$$

$$\begin{aligned}\|(Gx)(a)-(Gx)(b)\|&=\Bigg\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^a(a-s)^{\alpha-1}P_K(Ax(s)+\lambda)+Bx(s-\tau)\mathrm{d}s\\&\quad-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b(b-s)^{\alpha-1}P_K(Ax(s)+\lambda)+Bx(s-\tau)\mathrm{d}s\Bigg\|\\&\le\Bigg\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^a\left[(a-s)^{\alpha-1}-(b-s)^{\alpha-1}\right]P_k(Ax(s)+\lambda)+Bx(s-\tau)\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-s)^{\alpha-1}P_k(Ax(s)+\lambda)+Bx(s-\tau)\mathrm{d}s\Bigg\|\\&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^a\left[(a-s)^{\alpha-1}-(b-s)^{\alpha-1}\right]\left[\|A\|\|x(s)\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|+\|B\|\|x(s-\tau)\|\right]\mathrm{d}s\\&\le\frac{(\|A\|+\|B\|)\delta+\|\lambda\|+\|\varphi\|+\|B\|\|\psi\|}{\Gamma(\alpha+1)}2(b-a)^\alpha\end{aligned}$$

当 $b\to a$ 时，上述不等式的右侧趋于零。可得 Gx 是等价连续的。由 Arzela-Ascoli 定理，可得 $G(B_\delta)$ 是相对紧的。综上所述，F 是连续的且 k_1-收缩的，G 是紧的，Φ 是一个凝聚映射。因此，Φ 满足引理 2.7 的所有条件，可推断 Φ 中至少有一个不动点。

定理 3.3 如果 $\dfrac{3\|E\|+\|A\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}T^{\alpha-\beta}<1$，那么 CFNDPNN(1.2)有唯一解。

证明考虑如下的算子 $\Phi:C(J,\mathbb{R}^n)\to C(J,\mathbb{R}^n)$，定义同定理 3.2，我们将证明与(1.2)的解唯一性结果。证明分为下面两个步骤。

对任意的 $x\in C(J,\mathbb{R}^n),\Phi x\in C(J,\mathbb{R}^n)$， $\omega=\max\|x(t)\|,t\in[0,T]$ 对任意 $x\in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$， $\xi>0$ 满足 $t+\xi>-\tau$， 可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|(\Phi x)(t+\xi)-(\Phi x)(t)\right\| \\
&=\left\|E\phi(-\tau)\frac{t^{\alpha-\beta}-(t+\xi)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{E}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}x(s-\tau)\mathrm{d}s\right. \\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}P_k\left(Ax(s)+\lambda\right)+Bx(s-\tau)\mathrm{d}s+\frac{2E}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}x(s)\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{E}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^{t+\xi}(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}x(s-\tau)\mathrm{d}s+\frac{2E}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t+\xi}(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}x(s)\mathrm{d}s \\
&\quad\left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t+\xi}(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}P_k\left(Ax(s)+\lambda\right)+Bx(s-\tau)\mathrm{d}s\right\| \\
&\le\left\|E\phi(-\tau)\right\|\frac{t^{\alpha-\beta}-(t+\xi)^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{2\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left[(t+\xi-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\right]\|x(s)\|\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{\|E\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^{t-\tau}\left[(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right]\|x(u)\|\mathrm{d}u \\
&\quad+\frac{(\|E\|+\|B\|)\|\psi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left[(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right]\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{2\|E\|+\|A\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^{t+\xi}\left[(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right]\|x(s)\|\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{\|E\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^{t+\xi}\left[(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right]\|x(u)\|\mathrm{d}u \\
&\quad+\frac{\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^{t+\xi}\left[(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right]\mathrm{d}s \\
&\le\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|\left(t^{\alpha-\beta}-(t+\xi)^{\alpha-\beta}\right)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{(2\|E\|+\|A\|)\|\omega\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left[(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right]\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{(\|E\|+\|B\|)\|\psi\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left[(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right]\mathrm{d}s \\
&\le\frac{2\left((2\|E\|+\|A\|)\|\omega\|+(\|E\|+\|B\|)\|\psi\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|\right)+\left\|E(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)} \\
&\quad\times\left[(t+\xi-s)^{\alpha-\beta-1}-(t-s)^{\alpha-\beta-1}\right]
\end{aligned}
$$

当 $\xi\to 0$ 时，上述不等式右侧趋于 0，所以，$\Phi x\in C\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$。

(2) Φ 是 $C\left(T,\mathbb{R}^n\right)$ 上的压缩映射，对 $x,y\in C\left(T,\mathbb{R}^n\right)$，由引理 2.3 得

$$
\begin{aligned}
&\left\|(\Phi x)(t)-(\Phi y)(t)\right\| \\
&\le\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}-\frac{\left\|E\phi(-\tau)\right\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta} \\
&\quad+\frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left\|x(s-\tau)-y(s-\tau)\right\|\mathrm{d}s+\frac{2\|E\|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left\|x(s)-y(s)\right\|\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left\|P_k\left(Ax(s)+\lambda\right)+Bx(s-\tau)-P_k\left(Ay(s)+\lambda\right)+By(s-\tau)\right\|\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s-\tau)-y(s-\tau)\|\mathrm{d}s+\frac{2\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)-y(s)\|\mathrm{d}s$$

$$+\frac{\|A\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)-y(s)\|\mathrm{d}s+\frac{\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s-\tau)-y(s-\tau)\|\mathrm{d}s$$

$$=\frac{\|E\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s-\tau)-y(s-\tau)\|\mathrm{d}s+\frac{2\|E\|+\|A\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)-y(s)\|\mathrm{d}s$$

$$\leq \frac{3\|E\|+\|A\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\mathrm{d}s\|x-y\|_C$$

$$\leq \frac{3\|E\|+\|A\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}T^{\alpha-\beta}\|x-y\|_C$$

其中，$k_2=\dfrac{3\|E\|+\|A\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}T^{\alpha-\beta}$

由于 $0<k_2<1$，所以 Φ 在 $C(J,\mathbb{R}^n)$ 是压缩算子，由 Banach 不动点定理可知，Φ 在 $C(J,\mathbb{R}^n)$ 上至少有一个不动点。因此，投影动力系统(1.2)有唯一解。

定理 3.4 CFNDPNN(1.2)的所有解集都是有界的。

证明由 3.1 可得

$$\|x(t)\|\leq\|\phi(0)\|+\|E\phi(-\tau)\|\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s-\tau)\|\mathrm{d}s$$

$$+\frac{2\|E\|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s)\|\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[\|A\|\|x(s)\|+\|\varphi\|+\|\lambda\|+\|B\|\|x(s-\tau)\|\right]\mathrm{d}s$$

$$\leq\|\phi(0)\|+\frac{\|E\phi(-\tau)\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}+\frac{\|E\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s-\tau)\|$$

$$+\frac{2\|E\|+\|A\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1}\|x(s)\|$$

令 $a(t)=\|\phi(0)\|+\dfrac{\|E\phi(-\tau)\|+\|\lambda\|+\|\varphi\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}t^{\alpha-\beta}$，$c(t)=2\|E\|+\|A\|$，$d(t)=\|E\|+\|B\|$，显然 $a(t)$ 是非减函数，且 $a(0)=\phi(0)$，由引理 2.8，可得

$$\|x(t)\|\leq\left\{A(t)\exp\left(\int_0^t\left[C(s)+D(s)\right]\mathrm{d}s\right)\right\}^{\gamma},t\in[0,T]$$

其中

$$D(t)=\frac{4^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha-\beta)}\left(B\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-(\alpha-\beta)}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}t^{\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}}d^{\frac{1}{\gamma}}(t),$$

$$C(t)=\frac{4^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha-\beta)}\left(B\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-(\alpha-\beta)}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}t^{\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}}c^{\frac{1}{\gamma}}(t),\quad A(t)=2^{\frac{1}{\gamma}-1}a^{\frac{1}{\gamma}}(t)$$

$0<\gamma<\alpha-\beta<1$，$B(\cdot,\cdot)$ 是 *Beta* 函数.

由(3.13)可知，CFNDPNN(1.2)的所有解集是有界的。

3.2. 有限时间稳定性

定理 3.5 假设 $\alpha-\beta>0,\gamma>0$，且满足下列条件

$$2^{1-\gamma}\exp\left(\frac{\gamma^2}{\alpha-\beta}\frac{4^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha-\beta)}\left(B\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-\alpha-\beta}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T^{\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}}\left(\left(\|E\|+\|B\|\right)^{\frac{1}{\gamma}}+\left(2\|E\|+\|A\|\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right)\le\frac{\varepsilon}{\delta}$$

CFNDPNN(1.2)是有限时间稳定的。

证明假设 $x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$， $y(t)=\left(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$ 是具有不同初始函数的CFNDPNN(1.2)的两个不同解 $\phi(t)$ 和 $\eta(t)$。令 $\upsilon(t)=x(t)-y(t)$

根据定理 3.1，我们得到

$$\begin{cases} v(t)=v(0)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[-2v(s)+P_K\left(Av(s)+\lambda\right)+Bv(s-\tau)\right]\mathrm{d}s \\ \qquad +\dfrac{E}{\Gamma(\alpha-\beta)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}v(s-\tau)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T] \\ v(t)=\chi(t),\quad t\in[-\tau,0] \end{cases}$$

我们从(3.11)和(3.15)得出

$$\begin{aligned}\|v(t)\|&\le\|v(0)\|+\frac{\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}v(s-\tau)\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[\|-2v(s)\|+P_k\left(Av(s)+\lambda\right)+Bv(s-\tau)\right]\mathrm{d}s\\&\le\|\chi\|+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}\left[\|E+B\|\|v(s-\tau)\|+\|2E+A\|\|v(s)\|\right]\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T]\end{aligned}$$

对 $t\in[-\tau,0]$， $\upsilon(0)=\chi(t)\le\sup\|\chi(t)\|=\|\chi\|$， 使 $a(t)=\|\chi\|,c(t)=2\|E\|+\|A\|$，
$d(t)=\|E\|+\|B\|$， $\alpha-\beta=\xi$， 显然 $a(t)$， $\chi(t)$ 是非减函数且 $a(0)=\chi(0)$

从引理 2.8，我们得到

$$\begin{aligned}\upsilon(t)&\le\left(2^{\frac{1}{\gamma}-1}a^{\frac{1}{\gamma}}(t)\exp\left(\int_0^t\frac{4^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha-\beta)}\left(B\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-\alpha-\beta}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}t^{\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}}\left(c^{\frac{1}{\gamma}}(s)+d^{\frac{1}{\gamma}}(s)\right)\mathrm{d}s\right)\right)^{\gamma}\\&\le2^{1-\gamma}a(t)\left(2^{\frac{1}{\gamma}-1}a^{\frac{1}{\gamma}}(t)\exp\left(\int_0^t\frac{4^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha-\beta)}\left(B\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-\alpha-\beta}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}t^{\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}}\left(c^{\frac{1}{\gamma}}(s)+d^{\frac{1}{\gamma}}(s)\right)\mathrm{d}s\right)\right)^{\gamma}\\&\le2^{1-\gamma}a(t)\exp\left(\frac{\gamma^2}{\alpha-\beta}\frac{4^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha-\beta)}\left(B\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-\alpha-\beta}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}t^{\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}}\left(\left(\|E\|+\|B\|\right)^{\frac{1}{\gamma}}+\left(2\|E\|+\|A\|\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right)\\&\le2^{1-\gamma}a(t)\exp\left(\frac{\gamma^2}{\alpha-\beta}\frac{4^{\frac{1}{\delta}-1}}{\Gamma^{\frac{1}{\gamma}}(\alpha-\beta)}\left(B\left(\frac{\alpha-\beta-\gamma}{1-\gamma},\frac{1-\alpha-\beta}{1-\gamma}\right)\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T^{\frac{\alpha-\beta-\gamma}{\gamma}}\left(\left(\|E\|+\|B\|\right)^{\frac{1}{\gamma}}+\left(2\|E\|+\|A\|\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\right)\end{aligned}$$

由(3.16)可知，当$\|a(t)\|\le\delta$时，如果满足不等式(3.14)，则$v(t)\le\varepsilon$。根据定义 2.5，CFNDPNN(1.2)关于$\{\delta,\varepsilon,T\}$是有限时间稳定的。

4. 数值例子

例子 1 考虑二维 CFNDPNN，如下所示：

$$^{C}D_0^{\alpha}x(t)=-2x(t)+P_K\left(Ax(t)+\lambda\right)+Bx(t-\tau)+E\,^{C}D_0^{\beta}x(t-\tau)$$

其中

$$K=\left\{x\,\square\,-1\le x_i\le 1,i=1,2\right\},\alpha=0.9,\beta=0.1,\tau=0.2,T=0.15,A=I,B=I,E=I,\lambda=(1,0)^{\mathrm{T}}$$

通过计算可得，

$$\frac{3\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}T^{\alpha-\beta}=\frac{3\times0.1^{0.8}}{\Gamma(1.8)\times0.8}<1$$

$$\frac{3\|E\|+\|A\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}T^{\alpha-\beta}=\frac{5\times0.1^{0.8}}{\Gamma(1.8)\times0.8}<1$$

因此，定理 3.2 和 3.3 的所有条件都已满足。

对应不同初值函数$\phi(t)=(-0.02,0.01)^{\mathrm{T}}$，$\eta(t)=(0.02,-0.03)^{\mathrm{T}}$的两个解$x(t)$，$y(t)$

令$\upsilon(t)=x(t)-y(t)$，当$T=0.15$，$\delta=0.08$，$\varepsilon=0.1493$，$\gamma=0.1$，对于$\|\phi-\eta\|\le\delta$，

$$2^{0.9}\exp\left(\frac{0.1^2}{0.8}\frac{4^9}{\Gamma^{10}(0.8)}\left(B\left(\frac{0.7}{0.9},\frac{0.2}{0.9}\right)\right)^9T^7\left(\left(\|E\|+\|B\|\right)^{\frac{1}{0.1}}+\left(2\|E\|+\|B\|\right)^{\frac{1}{0.1}}\right)\right)<\frac{\varepsilon}{\delta}$$

有$\|\upsilon(t)\|\le\varepsilon$，在有限时间间隔[0, 0.15]上，(1.2)的解是有限时间稳定的。

例子 2 考虑三维 CFNDPNN，如下所示：

$$^{C}D_0^{\alpha}x(t)=-2x(t)+P_K\left(Ax(t)+\lambda\right)+Bx(t-\tau)+E\,^{C}D_0^{\beta}x(t-\tau)$$

当

$$K=\left\{x\,\square\,-1\le x_i\le 1,i=1,2,3\right\},\alpha=0.8,\beta=0.1,\tau=0.2,T=0.1$$

$$A=0.01I,B=0.01I,E=I,\lambda=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

计算可得

$$\frac{3\|E\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}T^{\alpha-\beta}=\frac{3\times0.1^{0.7}}{\Gamma(1.7)\times0.7}<1$$

$$\frac{3\|E\|+\|A\|+\|B\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}T^{\alpha-\beta}=\frac{3.02\times0.1^{0.7}}{\Gamma(1.7)\times0.7}<1$$

因此，定理 3.2 和 3.3 的所有条件都已满足。

对应不同初值函数$\phi(t)=(0.02,-0.03,0.01)^{\mathrm{T}}$，$\eta(t)=(0.01,-0.01,-0.02)^{\mathrm{T}}$的 CFNDPNN 系统的两个不同解$x(t)$和$y(t)$是令$\upsilon(t)=x(t)-y(t)$当$T=0.1$，$\delta=0.3$，$\varepsilon=0.5873$，$\gamma=0.1$。对于$\|\phi-\eta\|\le\delta$

$$2^{0.9}\exp\left(\frac{0.1^2}{0.7}\frac{4^9}{\Gamma^{\frac{1}{0.1}}(0.7)}\left(B\left(\frac{0.6}{0.9},\frac{0.3}{0.9}\right)\right)^{\frac{0.9}{0.1}}T^{\frac{0.6}{0.1}}\left(\left(\|E\|+\|B\|\right)^{\frac{1}{0.1}}+\left(2\|E\|+\|A\|\right)^{\frac{1}{0.1}}\right)\right)\le\frac{\varepsilon}{\delta}$$

$\|\upsilon(t)\| \le \varepsilon$，在区间[0, 0.1]上，(1.2)的解是有限时间稳定的。

通过以上两个数值例子，我们验证了保证系统解的存在、唯一性等等条件和稳定性的理论条件，说明主要结果是有效可行的。

5. 总结

值得一提的是，关于 CFNDPNN 解的稳定性的研究很少。本文致力于在一些合适的条件下刻画 CFNDPNN 的解。首先，分别利用 Sadovskii 不动点定理和 Banach 不动点定理证明了与 CFNDPNN 解有关的存在性和唯一性的定理。其次，利用一个新的 Gronwall 不等式证明了解集的有界性，在从有界性出发，得到了 CFNDPNN 的有限时间稳定性。最后，给出了两个数例来说明结果的有效性。

众所周知，分数阶神经网络在不确定环境(随机或模糊)中的研究越来越受到重视。因此，在不确定环境下研究 CFNDPNN 也是一个有趣而重要的课题。这个问题留作我们以后的研究内容。

参考文献

[1] Wang, H., Yu, Y., Wen, G., *et al*. (2015) Stability Analysis of Fractional-Order Neural Networks with Time Delay. *Neural Processing Letters*, **42**, 479-500. https://doi.org/10.1007/s11063-014-9368-3

[2] Du, F. and Lu, J.G. (2022) Finite-Time Stability of Fractional-Order Fuzzy Cellular Neural Networks with Time Delays. *Fuzzy Sets and Systems*, **438**, 107-120. https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.08.011

[3] Li, H., Kao, Y. and Li, H.L. (2021) Globally β-Mittag-Leffler Stability and β-Mittag-Leffler Convergence in Lagrange Sense for Impulsive Fractional-Order Complex-Valued Neural Networks. *Chaos, Solitons Fractals*, **148**, Article ID: 111061. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111061

[4] Wang, H. (2015) Dynamic Analysis of Delayed Fractional Order Hopfield Neural Networks. Beijing Jiaotong University, Beijing. https://doi.org/10.1016/j.neunet.2014.03.012

[5] Chen, S., Song, Q., Zhao, Z., *et al*. (2021) Global Asymptotic Stability of Fractional-Order Complex-Valued Neural Networks with Probabilistic Time-Varying Delays. *Neurocomputing*, **450**, 311-318. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2021.04.043

[6] Li, H.L., Jiang, H. and Cao, J. (2020) Global Synchronization of Fractional-Order Quaternion-Valued Neural Networks with Leakage and Discrete Delays. *Neurocomputing*, **385**, 211-219. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2019.12.018

[7] Li, J., Wu, Z. and Huang, N. (2019) Asymptotical Stability of Riemann-Liouville Fractional-Order Neutral-Type Delayed Projective Neural Networks. *Neural Processing Letters*, **50**, 565-579. https://doi.org/10.1007/s11063-019-10050-8

[8] Zhang, H., Huang, B., Gong, D., *et al*. (2013) New Results for Neutral-Type Delayed Projection Neural Network to Solve Linear Variational Inequalities. *Neural Computing and Applications*, **23**, 1753-1761. https://doi.org/10.1007/s00521-012-1141-9

Malik, A.S., Boyko, O., Atkar, N. and Young, W.F. (2001) A Comparative Study of MR Imaging Profile of Titanium Pedicle Screws. *Acta Radiologica*, **42**, 291-293. https://doi.org/10.1080/028418501127346846

[9] Cheng, Q., Liu, D. and He, Q. (2014) Global Exponential Stability of Delay Projection Neural Network Model for Quadratic Programming. *Journal of Xihua University* (*Natural Science Edition*), **33**, 77-80.

[10] Huang, W., Song, Q., Zhao, Z., *et al*. (2021) Robust Stability for a Class of Fractional-Order Complex-Valued Projective Neural Networks with Neutral-Type Delays and Uncertain Parameters. *Neurocomputing*, **450**, 399-410. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2021.04.046

[11] Li, J. and Huang, N. (2018) Asymptotical Stability for a Class of Complex-Valued Projective Neural Network. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **177**, 261-270. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1252-2

[12] Podlubny, I. (1998) Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Elsevier, Amsterdam.

[13] Wu, Z., Zou, Y. and Huang, N. (2016) A System of Fractional-Order Interval Projection Neural Networks. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **294**, 389-402. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.09.007

[14] Du, F. and Lu, J.G. (2020) Finite-Time Stability of Neutral Fractional Order Time Delay Systems with Lipschitz Nonlinearities. *Applied Mathematics and Computation*, **375**, Article ID: 125079. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125079

[15] Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G. (2000) An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics, University City. https://doi.org/10.1137/1.9780898719451

[16] Kamenskii, M.I., Obukhovskii, V.V. and Zecca, P. (2011) Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1007/s11784-011-0042-3

[17] Sadovskii, B.N. (1967) A Fixed-Point Principle. *Functional Analysis and Its Applications*, **1**, 151-153. https://doi.org/10.1007/BF01076087