Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1537-1549
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210167

Hans汉斯

$\mathcal{X}$-G_C-投射复形

李星宇，赵玉鹏，赵仁育*

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年9月4日；录用日期：2022年10月3日；发布日期：2022年10月10日

摘 要

设 R 是交换环, C 是一个半对偶 R-模, $\mathcal{X}$ 是一个 R-模类. 引入了 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形的概念, 证明了复形 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射的当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 的每个层次上的模都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{M}$ 到 $\boldsymbol{N}$ 的复形态射都是零伦的. 作为应用, 由 $\mathcal{X}$-G_C-投射模的性质推得了 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形的一些性质.

关键词

$\mathcal{X}$-G_C-投射模，$\mathcal{X}$-G_C-投射复形，半对偶模，稳定性

$\mathcal{X}$-G_C-Projective Complexes

Xingyu Li, Yupeng Zhao, Renyu Zhao*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Sep. 4^{th}, 2022; accepted: Oct. 3^{rd}, 2022; published: Oct. 10^{th}, 2022

Abstract

Let R be a commutative ring, C a semidualizing R-module and $\mathcal{X}$ a class of R-modules.

* 通讯作者。

文章引用: 李星宇, 赵玉鹏, 赵仁育. $\mathcal{X}$-G_C-投射复形[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1537-1549.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210167

The notion of $\mathcal{X}$-G_C-projective complexes is introduced, and it is shown that a complex M is $\mathcal{X}$-G_C-projective if and only if each degree of M is $\mathcal{X}$-G_C-projective and any morphism from M to N is null homotopic whenever N is a C-$\mathcal{X}$-complex. As applications, some properties of $\mathcal{X}$-G_C-projective complexes are deduced from those of $\mathcal{X}$-G_C-projective modules.

Keywords

$\mathcal{X}$-G_C-Projective Module, $\mathcal{X}$-G_C-Projective Complex, Semidualizing Module, Stability

1. 引言

Gorenstein 同调代数起源于 Auslander 和 Bridger 关于双边 Noether 环上有限生成模的 G-维数的研究工作 ([1]). 1995 年, Enochs 和 Jenda 在一般环上引入并研究了 Gorenstein 投射和 Gorenstein 内射模, 奠定了 Gorenstein 同调理论的基础. 为了将 Gorenstein 同调代数从 Noether 环上拓展到凝聚环上, 再由凝聚环上拓展到一般环上, 文献 [2–4] 中分别引入了 Ding 投射模, Ding 内射模, Gorenstein AC-投射模和 Gorenstein AC-内射模的概念. 设 $\mathcal{X}$ 是一个左 R-模类, 文献 [5, 6] 中引入并研究了 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模, 统一推广了关于 Gorenstein 投射模, Ding 投射模和 Gorenstein AC-投射模的许多结果.

相对于半对偶模的同调理论是相对同调代数的一个重要研究方向, Gorenstein 同调代数中的许多概念和结论被推广到了相对于半对偶模的情形, 如 [7–12] 等. 特别地, Yang 在 [12] 中研究了交换环上相对于半对偶 C 的 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模, 统一推广了关于 G_C-投射模([9, 10])和D_C-投射模([11])的许多研究结果.

复形范畴是具有足够的投射, 内射对象的Abel范畴, 所以在复形范畴中也可以开展同调代数的研究工作. 研究复形的 Gorenstein 同调性质与其各个层次上模的相应 Gorenstein 同调性质之间的联系是复形的 Gorenstein 同调理论的一个重要课题, 近年来取得了许多有意思的结果, 如 [13–19]等. 设 R 是交换环, C 是一个半对偶模, $\mathcal{X}$ 是一个 R-模类, 且 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_C(R)$, 受上述研究的启发, 本文引入了相对于 C 的 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射复形的概念, 简称为 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形, 证明了复形 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射的当且仅当 $\boldsymbol{M}$ 的每个层次上的模都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射的, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, Hom 复形 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 都正合, 见定理 2.6. 该结论统一推广了 [15, 定理 4.7] 和 [18, 定理 1.2.8], 并还包含了相对于半对偶 C 的 Gorenstein AC-投射复形的情形. 作为应用, 由 $\mathcal{X}$-G_C-投射模的性质推得

了$\mathcal{X}$-G_C-投射复形的一些性质, 见命题 2.10–推论 2.16.

2. 预备知识

本节我们介绍文中用到的一些基本概念, 符号和事实. 若无特殊声明, R 是有单位元的交换环, 模均是 R-模, 所涉及的复形都是 R-模的复形. 我们用 $\mathcal{C}(R)$ 表示 R-模的复形范畴, 用 $\mathcal{P}(R)$, $\mathcal{F}(R)$ 分别表示所有投射 R-模的类和平坦 R-模的类.

$\mathcal{C}(R)$ 中的复形

$$\cdots \longrightarrow M^{n-1} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{M}}^{n-1}} M^n \xrightarrow{d_{\boldsymbol{M}}^{n}} M^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

记作 $\boldsymbol{M}$. 称 M^n 为 $\boldsymbol{M}$ 的第 n 个层次上的模; 称 $d_{\boldsymbol{M}}^n$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的第 n 个微分; 称 $\mathrm{Ker}(d_{\boldsymbol{M}}^n)$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的第 n 个循环, 记作 $\mathrm{Z}^n(\boldsymbol{M})$; 称 $\mathrm{Im}(d_{\boldsymbol{M}}^{n-1})$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的第 n 个边缘, 记作 $\mathrm{B}^n(\boldsymbol{M})$; 称 $\mathrm{H}^n(\boldsymbol{M}) = \mathrm{Z}^n(\boldsymbol{M})/\mathrm{B}^n(\boldsymbol{M})$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的第 n 个同调模. 我们用下标来区分复形, 如 $\{\boldsymbol{M}_i\}_{i\in I}$ 是一簇复形, 则对任意的 $i \in I$, M_i^n 表示 $\boldsymbol{M}_i$ 的第 n 个层次上的模.

设 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}(R)$, $m \in \mathbb{Z}$. 我们用 $\boldsymbol{M}[m]$ 表示这样的复形: 第 n 个层次上的模 $\boldsymbol{M}[m]^n = \boldsymbol{M}^{n+m}$, 第 n 个微分为 $(-1)^m d_{\boldsymbol{M}}^{n+m}$. 设 M 是 R-模, 用 $\overline{M}$ 表示第 -1 和第 0 个层次是 M, 其他层次都为 0 的复形.

设 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathcal{C}(R)$. 由 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ 确定的 Hom 复形 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 定义为: 第 n 个层次上的模为

$$\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})^n = \prod_{t\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(M^t, N^{t+n}),$$

第 n 个微分为

$$d^n((f^t)_{t\in\mathbb{Z}}) = (d_{\boldsymbol{N}}^{n+t} f^t - (-1)^n f^{t+1} d_{\boldsymbol{M}}^t)_{t\in\mathbb{Z}},$$

其中 $(f^t)_{t\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})^n$. 特别地, $\mathrm{Z}^0(\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}))$ 是 $\boldsymbol{M}$ 到 $\boldsymbol{N}$ 的所有复形态射构成的 Abel 群, 记为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$. 对任意的 $i \geqslant 1$, 用 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}(R)}^i(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 表示左正合函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(-,-)$ 的右导出群. 用 $\mathrm{Ext}_{dw}^1(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 表示 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{C}(R)}^1(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 中的所有层次可裂的短正合列构成的 Abel 子群. 下面的结论建立了 $\mathrm{Ext}_{dw}^1(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 与 Hom 复形 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 之间的联系.

引理 1.1([20, 引理 2.1]) 设 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in \mathcal{C}(R)$. 则对任意的 $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Ext}_{dw}^1(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}[n-1]) \cong \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}[n])/\sim,$$

其中 $\sim$ 是同伦关系. 特别地, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 正合当且仅当对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, 任意复形态射 $f: \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{N}[n]$ 同伦于 0.

定义 1.224 称 R-模 C 是半对偶模, 如果

(1) 存在正合列

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

其中每个 P_i 都是有限生成投射 R-模;

(2) 自然同态 $\chi_C^R: R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,C)$ 是同构;

(3) $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(C,C)=0$.

下文中, C 表示一个任意取定的半对偶 R-模.

定义 1.318 相对于半对偶模 C 的 Auslander 类 $\mathcal{A}_C(R)$ 是由满足下列条件的所有 R-模 M 构成的 R-模类:

(1) $\mathrm{Tor}_{\geqslant 1}^R(C,M)=0=\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(C,C\otimes_R M)$;

(2) 自然赋值同态 $\mu_M: M\to \mathrm{Hom}_R(C,C\otimes_R M)$ 是同构.

相对于半对偶模 C 的 Bass 类 $\mathcal{B}_C(R)$ 是由满足下列条件的所有 R-模 N 构成的类:

(1) $\mathrm{Ext}_R^{\geqslant 1}(C,N)=0=\mathrm{Tor}_{\geqslant 1}^R(C,\mathrm{Hom}_R(C,N))$;

(2) 自然赋值同态 $\nu_N: C\otimes_R \mathrm{Hom}_R(C,N)\to N$ 是同构.

定义 1.4 设 $\mathcal{X}$ 是一个 R-模类. 令

$$\mathcal{X}_C(R)=\{C\otimes_R X \mid X\in\mathcal{X}\}.$$

称 $\mathcal{X}_C(R)$ 中的模为 C-$\mathcal{X}$-模.

注记 1.5 (1) 当 $\mathcal{X}=\mathcal{P}(R)$ 时, C-$\mathcal{X}$-模就是 C-投射模 ([7,10]). 记 C- 投射 R-模的类为 $\mathcal{P}_C(R)$;

(2) 当 $\mathcal{X}=\mathcal{F}(R)$ 时, C-$\mathcal{X}$-模就是 C-平坦模 ([7,10]). 记 C-平坦 R-模的类为 $\mathcal{F}_C(R)$;

(3) 称 R-模 N 是 FP_∞-型的 ([4]) 或超有限表示的 ([21]), 如果 N 有有限生成的投射分解 $\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow N\longrightarrow 0$. 称 R-模 M 是 level 的 ([4]) 或弱平坦的 ([21]), 如果对任意的 FP_∞-型模 N, $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)=0$. 记 level R-模的类为 $\mathcal{L}(R)$. 当 $\mathcal{X}=\mathcal{L}(R)$ 时, C-$\mathcal{X}$-模就是 C-level 模 ([8]). 记 C-level R-模的类为 $\mathcal{L}_C(R)$.

引理 1.6 设 $\mathcal{X}$ 是一个 R-模类, M 是 R-模. 如果 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{A}_C(R)$, 那么 $M\in\mathcal{X}_C(R)$ 当且仅当 $M\in\mathcal{B}_C(R)$, 且 $\mathrm{Hom}_R(C,M)\in\mathcal{X}$.

证明 必要性. 设 $M\in\mathcal{X}_C(R)$, 则存在 $X\in\mathcal{X}$, 使得 $M=C\otimes X$. 因为 $X\subseteq\mathcal{A}_C(R)$, 所以由 [7, 命题 4.1] 知 $M\in\mathcal{B}_C(R)$, 且 $\mathrm{Hom}_R(C,M)=\mathrm{Hom}_R(C,C\otimes X)\cong X\in\mathcal{X}$.

充分性. 设 $M\in\mathcal{B}_C(R)$, 且 $\mathrm{Hom}_R(C,M)\in\mathcal{X}$. 则 $M\cong C\otimes_R\mathrm{Hom}_R(C,M)\in\mathcal{X}_C(R)$. □

命题 1.7 设 $\mathcal{X}$ 是一个 R-模类, 且 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{A}_C(R)$. 若 $\mathcal{X}$ 关于扩张封闭, 则 $\mathcal{X}_C(R)$ 关于扩张封闭.

证明 设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 R-模的正合列, 且 $M',M''\in\mathcal{X}_C(R)$. 则由引理 1.6 知 $M',M''\in\mathcal{B}_C(R)$. 于是由 [7, 定理 6.2] 知 $M\in\mathcal{B}_C(R)$. 因为 $M'\in\mathcal{B}_C(R)$, 所以序列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(C,M')\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(C,M)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(C,M'')\longrightarrow 0$$

正合. 由引理 1.6 知 $\mathrm{Hom}_R(C, M')$, $\mathrm{Hom}_R(C, M'') \in \mathcal{X}$. 因为 $\mathcal{X}$ 关于扩张封闭, 所以 $\mathrm{Hom}_R(C, M) \in \mathcal{X}$. 于是由引理 1.6 知 $M \in \mathcal{X}_C(R)$. □

定义 1.828 设 $\mathcal{X}$ 是一个 R-模类, M 是 R-模. 称 M 是相对于半对偶模 C 的 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模, 简称 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 如果存在正合列

$$\mathbb{Q} : \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C \otimes_R P^0 \longrightarrow C \otimes_R P^1 \longrightarrow \cdots ,$$

满足:

(1) $M \cong \mathrm{Im}(P_0 \longrightarrow C \otimes_R P^0)$;

(2) P_i 和 P^i 都是投射模;

(3) 对任意的 $X \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{Q}, C \otimes_R X)$ 正合.

注记 1.9 (1) 当 $\mathcal{X} = \mathcal{P}(R)$ 时, $\mathcal{X}$-G_C-投射模就是 [10] 中的 G_C-投射模;

(2) 当 $\mathcal{X} = \mathcal{F}(R)$ 时, $\mathcal{X}$-G_C-投射模就是 [11] 中的 D_C-投射模;

(3) 当 $\mathcal{X} = \mathcal{L}(R)$ 时, 我们称 $\mathcal{X}$-G_C-投射模为相对于半对偶模 C 的 Gorenstein AC-投射模, 简称为 GAC_C-模;

(4) 当 $C = R$ 时, $\mathcal{X}$-G_C-投射模就是 [5] 中的 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射模.

定义 1.1013 设 $\mathcal{W}$ 是一个 R-模类. 称 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}(R)$ 是 $\mathcal{W}$-复形, 如果 $\boldsymbol{M}$ 是正合复形, 并且对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Z}^n(\boldsymbol{M}) \in \mathcal{W}$.

记 $\mathcal{W}$-复形的类为 $\widetilde{\mathcal{W}}$. 当 $\mathcal{W} = \mathcal{P}(R)$ ($\mathcal{F}(R)$, $\mathcal{L}(R)$, $\mathcal{P}_C(R)$, $\mathcal{F}_C(R)$, $\mathcal{L}_C(R)$, $\mathcal{X}_C(R)$) 时, $\mathcal{W}$-复形即为投射 (平坦, level, C-投射, C-平坦, C-level, C-$\mathcal{X}$) 复形, 分别记为 $\widetilde{\mathcal{P}(R)}$ ($\widetilde{\mathcal{F}(R)}$, $\widetilde{\mathcal{L}(R)}$, $\widetilde{\mathcal{P}_C(R)}$, $\widetilde{\mathcal{F}_C(R)}$, $\widetilde{\mathcal{L}_C(R)}$, $\widetilde{\mathcal{X}_C(R)}$).

以下总假定 $\mathcal{X}$ 是满足条件 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}_C(R)$, 且关于扩张和满同态的核封闭的 R-模类.

3. $\mathcal{X}$-G_C-投射复形

本节首先引入 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形的概念, 其次建立 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形与其各个层次上模的 $\mathcal{X}$-G_C-投射性之间的联系, 最后借助于这种联系, 利用 $\mathcal{X}$-G_C-投射模的性质讨论 $\mathcal{X}$-G_C- 投射复形的性质.

定义 2.1 设 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}(R)$. 称 $\boldsymbol{M}$ 是相对于半对偶模 C 的 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射复形, 简称 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形, 如果存在复形的正合列

$$\mathbb{X} : \cdots \longrightarrow \boldsymbol{P}_1 \xrightarrow{f_1} \boldsymbol{P}_0 \xrightarrow{f_0} \boldsymbol{Q}_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} \boldsymbol{Q}_{-2} \longrightarrow \cdots ,$$

满足:

(1) 每个 $\boldsymbol{P}_i$ 是投射复形, 每个 $\boldsymbol{Q}_j$ 是 C-投射复形;

(2) $\boldsymbol{M} \cong \mathrm{Im} f_0$;

(3) 对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbb{X}, \boldsymbol{N})$ 正合.

注记 2.2 (1) 当 $\mathcal{X}$ 取投射模类时, $\mathcal{X}$-G_C-投射复形就是 G_C-投射复形 ([15]);

(2) 当 $\mathcal{X}$ 取平坦模类时, $\mathcal{X}$-G_C-投射复形就是 D_C-投射复形 ([18]);

(3) 当 $\mathcal{X}$ 取 level 模类时, 我们称 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形为 GAC_C-投射复形;

(4) 当 $C = R$ 时, $\mathcal{X}$-G_C-投射复形就是 $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射复形. $\mathcal{X}$-Gorenstein 投射复形以 Gorenstein 投射复形 ([13, 14]), Ding 投射复形 ([16]) 和 Gorenstein AC-投射复形为其特例 ([17]).

引理 2.3 若 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形, 则对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = 0$.

证明 因为 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形, 所以存在复形的正合列

$$\cdots \longrightarrow \boldsymbol{P}_1 \longrightarrow \boldsymbol{P}_0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow 0,$$

其中每个 $\boldsymbol{P}_i$ 都是投射复形, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, 有正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{N}) \longrightarrow \cdots.$$

故对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Ext}^{\geqslant 1}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = 0$. □

引理 2.4 设 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}(R)$. 如果对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, M^n 都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 那么对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 正合当且仅当 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = 0$.

证明 由命题 1.7 和 [12, 命题 1.2.2] 可得. □

引理 2.5 若 $\boldsymbol{M}$ 是 C-投射复形, $\boldsymbol{N}$ 是 C-$\mathcal{X}$-复形, 则 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 正合.

证明 因为 $\mathcal{X}$ 关于扩张封闭, 所以由命题 1.7 知 $\mathcal{X}_C(R)$ 关于扩张封闭. 于是由 [7, 命题 5.2, 定理 6.4] 和 [19, 推论 3.6] 知结论成立. □

下面给出本文的主要结果.

定理 2.6 设 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}(R)$. 则 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形当且仅当对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, M^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 是正合复形.

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{M} : \cdots \longrightarrow M^{n-1} \longrightarrow M^n \longrightarrow M^{n+1} \longrightarrow \cdots$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形, 则存在正合列

$$\mathbb{X} : \cdots \longrightarrow \boldsymbol{P}_1 \xrightarrow{f_1} \boldsymbol{P}_0 \xrightarrow{f_0} \boldsymbol{Q}_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} \boldsymbol{Q}_{-2} \longrightarrow \cdots,$$

其中每个 $\boldsymbol{P}_i$ 是投射复形, 每个 $\boldsymbol{Q}_j$ 是 C-投射复形, 使得 $\boldsymbol{M} \cong \mathrm{Im} f_0$, 且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}$

$(\mathbb{X}, \boldsymbol{N})$ 正合. 于是对任意的 $n \in \mathbb{Z}$ 有 R-模的正合列

$$\mathbb{X}^n : \cdots \longrightarrow P_1^n \xrightarrow{f_1^n} P_0^n \xrightarrow{f_0^n} Q_{-1}^n \xrightarrow{f_{-1}^n} Q_{-2}^n \longrightarrow \cdots,$$

并且 $M^n \cong \mathrm{Im} f_0^n$. 由投射模与 C-投射模关于扩张封闭可得每个 P_i^n 是投射模, 每个 Q_j^n 是 C-投射模. 设 N 是 C-$\mathcal{X}$-模, 则 $\overline{N}[-n]$ 是 C-$\mathcal{X}$-复形. 于是由 [20, 引理 3.1] 有上行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{Q}_{-1}, \overline{N}[-n]) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{P}_0, \overline{N}[-n]) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{P}_1, \overline{N}[-n]) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(Q_{-1}^n, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_0^n, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(P_1^n, N) \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

故下行也正合. 这表明对任意的 C-$\mathcal{X}$-模 N, $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{X}^n, N)$ 正合. 因此对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, M^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模. 由引理 2.3 和引理 2.4 知对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 正合.

充分性. 设 $n \in \mathbb{Z}$, 因为 M^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 所以由 [12, 引理 1.2.8] 知存在 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow M^n \longrightarrow Q^n \longrightarrow W^n \longrightarrow 0,$$

其中 Q^n 是 C-投射模, W^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模. 于是有复形的正合序列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{M^n}[-n] \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{Q^n}[-n] \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{W^n}[-n] \to 0.$$

令 $\boldsymbol{Q}_{-1} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} \overline{Q^n}[-n]$. 显然 $\boldsymbol{Q}_{-1} \in \widetilde{\mathcal{P}_C(R)}$. 另一方面, 对复形 $\boldsymbol{M}$, 有如下的正合序列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \xrightarrow{\binom{1}{d}} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{M^n}[-n] \xrightarrow{(-d,1)} \boldsymbol{M}[1] \longrightarrow 0,$$

其中 d 是复形 $\boldsymbol{M}$ 的微分. 设 $\alpha : \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{Q}_{-1}$ 是如下两个复形态射的合成

$$\boldsymbol{M} \xrightarrow{\binom{1}{d}} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{M^n}[-n] \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{Q^n}[-n].$$

则 α 是单态射. 令 $\boldsymbol{L}_{-1} = \mathrm{Coker}\,\alpha$. 则由蛇引理可得复形的正合列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M}[1] \longrightarrow \boldsymbol{L}_{-1} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{W^n}[-n] \longrightarrow 0.$$

因为 $\bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} \overline{W^n}[-n]$ 和 $\boldsymbol{M}[1]$ 每个层次上的模都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 所以由 [12, 引理 1.2.6] 知对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, L_{-1}^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模. 因此对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, 由命题 1.7 和 [12, 命题 1.2.2] 可得正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{L}_{-1}, \boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{Q}_{-1}, \boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \longrightarrow 0.$$

因为 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 正合, 且由引理 2.5 知 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{Q}_{-1},\boldsymbol{N})$ 也是正合复形, 所以 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{L}_{-1},\boldsymbol{N})$ 是正合复形. 因此由命题 2.4 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{L}_{-1},\boldsymbol{N})=0$, 故序列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{L}_{-1},\boldsymbol{N})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{Q}_{-1},\boldsymbol{N})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})\longrightarrow 0$$

正合. 这表明

$$0\longrightarrow \boldsymbol{M}\longrightarrow \boldsymbol{Q}_{-1}\longrightarrow \boldsymbol{L}_{-1}\longrightarrow 0$$

是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(-,\widetilde{\mathcal{X}_C(R)})$ 正合的. 注意到 $\boldsymbol{L}_{-1}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 有相同的性质, 所以重复上述过程可得正合序列

$$0\longrightarrow \boldsymbol{M}\longrightarrow \boldsymbol{Q}_{-1}\longrightarrow \boldsymbol{Q}_{-2}\longrightarrow\cdots, \tag{3.1}$$

其中每个 $\boldsymbol{Q}_i$ 是 C-投射复形, 且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(-,\boldsymbol{N})$ 保持 (3.1) 的正合性.

取 $\boldsymbol{M}$ 的投射分解

$$\cdots\longrightarrow \boldsymbol{P}_1\xrightarrow{f_1}\boldsymbol{P}_0\xrightarrow{f_0}\boldsymbol{M}\longrightarrow 0. \tag{3.2}$$

令 $\boldsymbol{G}_j=\mathrm{Ker}\, f_j$, $j=0,1,2,\ldots.$ 则由 [12, 命题 1.2.5, 1.2.6] 知, 对任意的 $j\geqslant 0$ 以及任意的 $n\in\mathbb{Z}$, G_j^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模. 设 $\boldsymbol{N}$ 是 C-$\mathcal{X}$-复形, 由引理 2.4 知序列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{N})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{G}_0,\boldsymbol{N})\longrightarrow 0$$

正合. 因为每个 M^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 所以由命题 1.7 和 [12, 命题 1.2.2] 知, 对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, 有复形的正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{N})\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{G}_0,\boldsymbol{N})\longrightarrow 0.$$

因为 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 和 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{N})$ 是正合的, 所以 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{G}_0,\boldsymbol{N})$ 也是正合的. 重复该过程可得对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(-,\boldsymbol{N})$ 保持 (3.2) 的正合性.

由 (3.1) 与 (3.2) 可得正合序列

$$\mathbb{X}:\cdots\longrightarrow \boldsymbol{P}_1\xrightarrow{f_1}\boldsymbol{P}_0\xrightarrow{f_0}\boldsymbol{Q}_{-1}\xrightarrow{f_{-1}}\boldsymbol{Q}_{-2}\xrightarrow{f_{-2}}\cdots,$$

其中每个 $\boldsymbol{P}_i$ 是投射复形, 每个 $\boldsymbol{Q}_j$ 是 C-投射复形, 使得 $\boldsymbol{M}\cong\mathrm{Im}f_0$, 且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}$
$(\mathbb{X},\boldsymbol{N})$. 因此, $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形. □

推论 2.7 ([15, 定理 4.7]) 设 $\boldsymbol{M}\in\mathcal{C}(R)$. 则 $\boldsymbol{M}$ 是 G_C-投射的当且仅当对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, M^n 是 G_C-投射模.

证明 取 $\mathcal{X}=\mathcal{P}(R)$. 则由定理 2.6 知必要性成立. 下证充分性.

设每个 M^n 都是 G_C-投射模. 任取一个投射复形 $\boldsymbol{N}$, 则由 [15, 推论 4.2] 知 $\boldsymbol{N}=\prod_{n\in\mathbb{Z}}\overline{P^n}[-n]$, 其

中每个 P^n 是投射模. 于是由 [20, 引理 3.1] 和 [10, 命题 2.2] 得

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M},\prod_{n\in\mathbb{Z}}\overline{P^n}[-n]) \\ &= \prod_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M},\overline{P^n}[-n]) \\ &= \prod_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^1_R(M^n,P^n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

故由引理 1.1 知 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 正合. 因此由定理 2.6 知 $\boldsymbol{M}$ 是 G_C-投射复形. □

推论 2.8 ([18, 定理 1.2.8]) 设 $\boldsymbol{M}\in\mathcal{C}(R)$. 则 $\boldsymbol{M}$ 是 D_C-投射复形当且仅当对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, M^n 是 D_C-投射模, 并且对任意的 C-平坦复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 是正合复形.

推论 2.9 设 $\boldsymbol{M}\in\mathcal{C}(R)$. 则 $\boldsymbol{M}$ 是 GAC_C-投射复形当且仅当对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, M^n 是 GAC_C-投射模, 并且对任意的 C-level 复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 是正合复形.

作为定理 2.6 的应用, 下面我们利用 $\mathcal{X}$-G_C-投射模的性质研究 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形的性质.

命题 2.10 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形关于直和项与直和封闭.

证明 设 $\boldsymbol{M}=\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}\boldsymbol{M}_\lambda$. 则由定理 2.6 及 [12, 定理 1.2.7] 知 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形当且仅当对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, M^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 正合当且仅当对任意的 $n\in\mathbb{Z}$ 和任意的 $\lambda\in\Lambda$, M^n_λ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$ 和 $\lambda\in\Lambda$, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}_\lambda,\boldsymbol{N})$ 正合当且仅当对任意的 $\lambda\in\Lambda$, $\boldsymbol{M}_\lambda$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形. □

命题 2.11 投射复形和 C-投射复形是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形.

证明 由 [12, 命题 1.2.5], 定理 2.6 和引理 2.5 可得. □

设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 且 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 中一些对象的类. 据文献 [22], 称 $\mathcal{B}$ 是投射可解的, 如果 $\mathcal{B}$ 包含 $\mathcal{A}$ 中的所有投射对象, 并且对 $\mathcal{A}$ 中任意的短正合序列

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0,$$

若 $M''\in\mathcal{B}$, 则 $M\in\mathcal{B}$ 当且仅当 $M'\in\mathcal{B}$.

命题 2.12 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形类是投射可解的.

证明 由命题 2.11 知投射复形是 $\mathcal{X}$-G_C- 投射复形. 设

$$0\longrightarrow \boldsymbol{M}\longrightarrow \boldsymbol{H}\longrightarrow \boldsymbol{K}\longrightarrow 0$$

是复形的短正合序列, 其中 $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形. 则对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 由定理 2.6 知 K^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投

DOI: 10.12677/pm.2022.1210167

射模. 从而由 [12, 定理 1.2.6] 知 M^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模当且仅当 H^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模. 另一方面, 对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, 由命题 1.7 和 [12, 定理 1.2.2] 可得正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{K},\boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{H},\boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) \longrightarrow 0,$$

并且由定理 2.6 知 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{K},\boldsymbol{N})$ 正合. 从而 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 正合当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{H},\boldsymbol{N})$ 正合. 于是由定理 2.6 知, $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形当且仅当 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形. 因此 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形的类是投射可解的. □

命题 2.13 设 $0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{K} \longrightarrow 0$ 是复形的正合列, 并且 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形. 则下列叙述等价:

(1) $\boldsymbol{K}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形;

(2) 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, K^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模;

(3) 对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{N}) = 0$.

证明 (1)⇒(3) 由引理 2.3 可得.

(3)⇒(2) 设 $n \in \mathbb{Z}$. 考虑 R-模的正合列

$$0 \longrightarrow M^n \longrightarrow T^n \longrightarrow K^n \longrightarrow 0.$$

由定理 2.6 知 M^n 和 T^n 都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 所以由 [12, 定理 1.2.11] 只需证明对任意的 C-$\mathcal{X}$-模 N, $\mathrm{Ext}^1_R(K^n, N) = 0$.

设 $N \in \mathcal{X}_C(R)$, 则 $\overline{N}[-n] \in \widetilde{\mathcal{X}_C(R)}$. 故由 (3) 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{K}, \overline{N}[-n]) = 0$. 而由 [20, 引理 3.1] 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}$
$(\boldsymbol{K}, \overline{N}[-n]) \cong \mathrm{Ext}^1_R(K^n, N)$, 所以 $\mathrm{Ext}^1_R(K^n, N) = 0$. 因此, K^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模.

(2)⇒(1) 由定理 2.6, 只需证明对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{K},\boldsymbol{N})$ 正合. 设 $\boldsymbol{N}$ 是 C-$\mathcal{X}$-复形. 由于每个 K^n 都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 所以由命题 1.7 和 [12, 命题 1.2.2] 知序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{K},\boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}) \longrightarrow 0$$

正合. 因为 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形, 所以由定理 2.6 知 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ 和 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{T},\boldsymbol{N})$ 正合. 因此 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{K},\boldsymbol{N})$ 也是正合的. □

下面的结论表明 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形具有稳定性.

定理 2.14 设 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}(R)$. 则 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形当且仅当存在 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形的正合列

$$\mathbb{G}: \cdots \longrightarrow \boldsymbol{G}_1 \longrightarrow \boldsymbol{G}_0 \longrightarrow \boldsymbol{G}_{-1} \longrightarrow \cdots,$$

使得 $\boldsymbol{M} \cong \mathrm{Im}(\boldsymbol{G}_0 \longrightarrow \boldsymbol{G}_{-1})$, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbb{G},\boldsymbol{N})$ 正合.

证明 必要性. 设 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形, 则存在 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形的正合列

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \xrightarrow{1_{\boldsymbol{M}}} \boldsymbol{M} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

使得 $\boldsymbol{M} \cong \mathrm{Im}(\boldsymbol{M} \xrightarrow{1_{\boldsymbol{M}}} \boldsymbol{M})$, 并且显然对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(-, \boldsymbol{N})$ 保持该序列的正合性.

充分性. 设 $n \in \mathbb{Z}$, 则存在正合列

$$\mathbb{G}^n : \cdots \longrightarrow G_1^n \longrightarrow G_0^n \longrightarrow G_{-1}^n \longrightarrow \cdots,$$

使得 $M^n \cong \mathrm{Im}(G_0^n \longrightarrow G_{-1}^n)$. 因为 $\boldsymbol{G}_j$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形, 所以由定理 2.6 知每个 G_j^n 都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模. 设 $N \in \mathcal{X}_C(R)$, 则 $\overline{N}[-n] \in \widetilde{\mathcal{X}_C(R)}$. 所以由 [20, 引理 3.1] 可得上行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{G}_{-1}, \overline{N}[-n]) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{G}_0, \overline{N}[-n]) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{G}_1, \overline{N}[-n]) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(G_{-1}^n, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(G_0^n, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(G_1^n, N) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

从而下行也正合. 故 $\mathrm{Hom}_R(\mathbb{G}^n, N)$ 正合. 因此由 [12, 定理 1.3.1] 知 M^n 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模.

设 $\boldsymbol{N} \in \widetilde{\mathcal{X}_C(R)}$. 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{M}_1 \longrightarrow \boldsymbol{G}_0 \longrightarrow \boldsymbol{M} \longrightarrow 0,$$

其中 $\boldsymbol{M}_1 \cong \mathrm{Im}(\boldsymbol{G}_1 \longrightarrow \boldsymbol{G}_0)$. 由定理 2.6 知每个 G_0^n 都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 且 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{N})$ 正合. 于是由引理 2.4 可得 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{N}) = 0$. 又

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{N}) \longrightarrow 0$$

正合, 所以 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(R)}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = 0$. 因为每个 M^n 都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射模, 所以由引理 2.4 知 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ 正合. 因此由定理 2.6 可知 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形. □

推论 2.15 设 $\boldsymbol{M} \in \mathcal{C}(R)$. 则 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形当且仅当存在正合列

$$\mathbb{G} : \cdots \longrightarrow \boldsymbol{G}_1 \longrightarrow \boldsymbol{G}_0 \longrightarrow \boldsymbol{G}_{-1} \longrightarrow \cdots,$$

其中 $\boldsymbol{G}_i \in \widetilde{\mathcal{P}(R)} \bigcup \widetilde{\mathcal{P}_C(R)}$, $i \in \mathbb{Z}$, 使得 $\boldsymbol{M} \cong \mathrm{Im}(\boldsymbol{G}_0 \longrightarrow \boldsymbol{G}_{-1})$, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbb{G}, \boldsymbol{N})$ 正合.

证明 必要性. 显然.

充分性. 设存在复形的正合列

$$\mathbb{G} : \cdots \longrightarrow \boldsymbol{G}_1 \longrightarrow \boldsymbol{G}_0 \longrightarrow \boldsymbol{G}_{-1} \longrightarrow \cdots,$$

其中 $\boldsymbol{G}_i \in \widetilde{\mathcal{P}(R)} \bigcup \widetilde{\mathcal{P}_C(R)}$, $i \in \mathbb{Z}$, 使得 $\boldsymbol{M} \cong \mathrm{Im}(\boldsymbol{G}_0 \longrightarrow \boldsymbol{G}_{-1})$, 且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbb{G}, \boldsymbol{N})$ 正合. 由命题 2.11 可知每个 $\boldsymbol{G}_i$ 都是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形. 故由定理 2.15 知 $\boldsymbol{M}$ 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形. □

由推论 2.15 可得下列结论, 它表明 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形具有对称性.

推论 2.16 设存在正合列

$$\mathbb{X}: \cdots \longrightarrow \boldsymbol{P}_1 \xrightarrow{f_1} \boldsymbol{P}_0 \xrightarrow{f_0} \boldsymbol{Q}_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} \boldsymbol{Q}_{-2} \longrightarrow \cdots,$$

其中每个 $\boldsymbol{P}_i$ 是投射复形, 每个 $\boldsymbol{Q}_j$ 是 C-投射复形, 并且对任意的 C-$\mathcal{X}$-复形 $\boldsymbol{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(R)}(\mathbb{X}, \boldsymbol{N})$ 正合. 则对任意的 $i \in \mathbb{Z}$, Coker f_i 是 $\mathcal{X}$-G_C-投射复形.

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (11861055, 12061061)。

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 94, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Ding, N.Q., Li, Y.L. and Mao, L.X. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/S1446788708000761

[3] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2008) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **7**, 491-506. https://doi.org/10.1142/S0219498808002953

[4] Bravo, D., Gillespie, J. and Hovey, M. (2014) The Stable Module Category of a General Ring. arXiv: 1405-5768

[5] Bennis, D. and Ouarghi, K. (2010) $\mathcal{X}$-Gorenstein Projective Modules. *International Mathematical Forum*, **5**, 487-491.

[6] Meng, F.Y. and Pan, Q.X. (2011) $\mathcal{X}$-Gorenstein Projective and $\mathcal{Y}$-Gorenstein Injective Modules. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **40**, 537-554.

[7] Holm, H. and White, D. (2007) Foxby Equivalence over Associative Rings. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **47**, 781-808. https://doi.org/10.1215/kjm/1250692289

[8] Hu, J.S. and Geng, Y.X. (2016) Relative Tor Functors for Level Modules with Respect to a Semidualizing Bimodule. *Algebras and Representation Theory*, **19**, 579-597. https://doi.org/10.1007/s10468-015-9589-9

[9] Holm, H. and Jørgensen, P. (2006) Semi-Dualizing Modules and Related Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **205**, 423-445. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.07.010

[10] White, D. (2010) Gorenstein Projective Dimension with Respect to a Semidualizing Module. *Journal of Commutative Algebra*, **2**, 111-137. https://doi.org/10.1216/JCA-2010-2-1-111

[11] Zhang, C.X., Wang, L.M. and Liu, Z.K. (2013) Ding Projective Modules with Respect to a Semidualizing Module. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **51**, 339-356. https://doi.org/10.4134/BKMS.2014.51.2.339

[12] 杨淑香. $\mathcal{X}$-G_C-投射模及维数[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2014.

[13] Enochs, E.E. and García Rozas, J.R. (1998) Gorenstein Injective and Projective Complexes. *Communications in Algebra*, **26**, 1657-1674. https://doi.org/10.1080/00927879808826229

[14] Yang, X.Y. and Liu, Z.K. (2011) Gorenstein Projective, Injective and Flat Complexes. *Communications in Algebra*, **39**, 1705-1721. https://doi.org/10.1080/00927871003741497

[15] Yang, C.H. and Liang, L. (2012) Gorenstein Injective and Projective Complexes with Respect to a Semidualizing Module. *Communications in Algebra*, **40**, 3352-3364. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.568030

[16] Yang, G., Liu, Z.K. and Liang, L. (2013) Model Structures on Categories of Complexes over Ding-Chen Rings. *Communications in Algebra*, **41**, 50-69. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.622326

[17] Bravo, D. and Gillespie, J. (2016) Absolutely Clean, Level, and Gorenstein AC-Injective Complexes. *Communications in Algebra*, **44**, 2213-2233. https://doi.org/10.1080/00927872.2015.1044100

[18] 权艳红. 相对于半对偶模的Ding投射复形[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2016.

[19] Zhao, R.Y. and Ding, N.Q. (2017) ($\mathcal{W}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$)-Gorenstein Complexes. *Communications in Algebra*, **45**, 3075-3090. https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1235173

[20] Gillespie, J. (2004) The Flat Model Structure on Ch(R). *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 3369-3390. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-04-03416-6

[21] Gao, Z.H. and Wang, F.G. (2015) Weak Injective and Weak Flat Modules. *Communications in Algebra*, **43**, 3857-3868. https://doi.org/10.1080/00927872.2014.924128

[22] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007