Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 234-243
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132028

高阶 Omni-李代数胚 E-对偶

郑献聪

南昌航空大学数学与信息科学学院，江西 南昌

收稿日期：2023年1月14日；录用日期：2023年2月14日；发布日期：2023年2月22日

摘 要

该文研究了高阶 omni-李代数胚 E-对偶结构。首先，根据 E-值对偶丛的定义，在直和丛 $\mathfrak{D}^nE\oplus\mathfrak{J}E$ 上定义了 $\mathfrak{D}^{n-1}E$-值配对和高阶 Dorfman 括号，其中 $\mathfrak{D}^nE$ 和 $\mathfrak{J}E$ 分别为向量丛 E 的n-阶微分算子丛和jet丛。得到了高阶 omni-李代数胚 E-对偶结构。其次，通过莱布尼茨代数胚的匹配对，构造了与高阶 omni-李双代数胚相关的匹配对，并且得到了与平凡线丛 $M\times\mathbb{R}$ 相关的高阶 omni-李双代数胚 double。

关键词

高阶Omni-李代数胚；E-对偶；高阶Omni-李双代数胚Double

E-Value Dual of Higher Omni Lie Algebroids

Xiancong Zheng

School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

Received: Jan. 14^{th}, 2023; accepted: Feb. 14^{th}, 2023; published: Feb. 22^{nd}, 2023

Abstract

In this paper, we study a E-value dual of higher omni Lie algebroids. First, we define

文章引用: 郑献聪. 高阶 Omni-李代数胚 E-对偶[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 234-243.
DOI: 10.12677/pm.2023.132028

$\mathfrak{D}^{n-1}E$-value pairing and higher Dorfman bracket on the direct sum bundle $\mathfrak{D}^nE \oplus \mathfrak{J}E$, where $\mathfrak{D}^nE$ and $\mathfrak{J}E$ are, respectively, the n-th differential operator bundle and the jet bundle of a vector bundle E, construct a E-value dual of higher omni Lie algebroids. Secondly, through the matched pair of Leibniz algebras, construct a matched pair associated to higher omni Lie bialgebroid, and study higher omni Lie bialgebroid double associated to a trivial line bundle.

Keywords

Higher Omni Lie Algebroids, E-Value Dual, Higher Omni Lie Bialgebroid Double

1. 引言

Chen 和 *Liu* 在文献 [1] 中引入了 omni-李代数胚的概念, 是向量空间上的 omni-李代数到向量丛上的几何推广. 向量丛 E 上的李代数胚结构和 *omni*-李代数胚的 *Dirac* 结构建立了一一对应关系. 为了研究 omni-李代数胚的高阶类, 文献 [2] 引入了高阶 omni-李代数胚的概念, 在直和丛 $\mathfrak{D}E \oplus \mathfrak{J}_nE$ 上定义了 $\mathfrak{J}_{n-1}E$-值配对和括号算子, 其中 $\mathfrak{D}E$ 和 $\mathfrak{J}_nE$ 分别是向量丛 E 的协变微分算子丛和 n-阶 *jet* 丛. 我们知道, 对于 $\mathfrak{D}E$ 的截面, 可以理解为对偶丛 E^* 上的线性向量场, 而对于 $\mathfrak{J}E$ 上的截面有不同的解释. 当 $\mathfrak{J}E$ 的截面被理解为 E^* 上的常 1-形式, omni-李代数胚 $\mathfrak{D}E \oplus \mathfrak{J}E$ 可以理解为标准的 *Courant* 代数胚 $TE^* \oplus T^*E^*$ 的 *Weinstein*-线性化; 当 $\mathfrak{J}E$ 的截面被理解为 E^* 上的线性 1-形式, omni-李代数胚 $\mathfrak{D}E \oplus \mathfrak{J}E$ 为标准的 *Courant* 代数胚 $TE^* \oplus T^*E^*$ 的 *pseudo*-线性化.

文献 [3] 中研究了 *Courant* 代数胚 $T^*E \oplus \wedge^n T^*E^*$ 高阶类的 *pseudo*-线性化和 *Weinstein*-线性化, 其中 n-omni-李代数胚 $\mathfrak{D}E \oplus \mathfrak{J}_nE$ 为 *Courant* 代数胚高阶类的 *pseudo*-线性化. 要注意的是, 当向量丛 E 约化为向量空间 V, 由于 $\mathfrak{J}_nV = 0$, 无法获得所对应的 n-李代数. 另一方面, 无法建立向量丛 E 上的 $(n+1)$-李代数胚结构和高阶 omni-李代数胚 $\mathfrak{D}E \oplus \mathfrak{J}_nE$ 上的可积子丛的对应关系. 而对于 *Courant* 代数胚高阶类的 *Weinstein*-线性化-omni n-李代数胚 $\mathfrak{D}E \oplus \wedge^n \mathfrak{J}E$ [3], 当 $rank(E) \geq 2$, 能够建立向量丛 E 上的 $(n+1)$-李代数胚结构和 omni n-李代数胚 $\mathfrak{D}E \oplus \wedge^n \mathfrak{J}E$上的可积子丛的对应关系. 文献 [3] 介绍了一般线性丛 $M \times \mathbb{R}$ 下的 omni n-李代数胚 $(TM \times \mathbb{R} \oplus (\wedge^n T^*M \oplus \wedge^{n-1} T^*M), (\cdot,\cdot), \{\cdot,\cdot\}, \rho)$.

本文基于高阶 omni-李代数胚 $(\mathfrak{D}E \oplus \mathfrak{J}_nE, (\cdot,\cdot), \{\cdot,\cdot\}, \rho)$, 通过 $\mathfrak{D}E$ 和 $\mathfrak{J}E$ 的 E-对偶丛关系 [1], 研究高阶 omni-李代数胚的 E-对偶. 本文结构安排如下：第 1节介绍了基本知识和相关概念. 第

2节通过 E-对偶丛关系, 给出了高阶 omni-李代数胚 E-对偶 $(\mathcal{E}^n(E),(-,-)_+^*,\{-,-\}_*,\rho_*)$ 的定义, 以及其所对应的非退化双线性括号 $(-,-)_+^*$ 和截面上的广义 $Dorfman$ 括号 $\{-,-\}_*$. 第 3节通过莱布尼茨代数胚的匹配对, 在直和向量丛 $\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E)$ 上构造了一个莱布尼茨代数胚结构 $(\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E),\{-,-\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},\tilde{\rho})$. 当向量丛$E$ 为平凡线丛时, 得到了高阶 omni-李双代数胚 double $(\Delta,(-,-),\{-,-\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},\tilde{\rho})$, 其中 $\Delta=\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E)$. 第 4节对全文进行总结和归纳.

2. 预备知识

在本节中, 先回顾文中涉及的基本知识和相关概念.

在泊松流形 (M,π) 上, 泊松括号唯一地确定了泊松张量 π, 它满足 $[\pi,\pi]=0$. 反之, 在流形 M 上, 给定一个双向量场 $\pi\in\mathfrak{X}(M)$, 若满足 $[\pi,\pi]=0$, 则也唯一确定了 M 上的泊松括号. 在文献 [4] 中, 作者给出了流形 M 上的一个南部-泊松结构的定义.

定义 1.1 [4] 流形 M 上的一个南部-泊松结构是一个 n-重线性映射 $\{\cdot,\cdots,\cdot\}$

$$C^\infty(M)\times\cdots\times C^\infty(M)\longrightarrow C^\infty(M)$$

满足以下性质:

(1) 反对称: 对任意的 $f_i\in C^\infty(M),(1\le i\le n)$, $\sigma\in S_n$ (S_n是n阶对称群),

$$\{f_1,\cdots,f_n\}=(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\{f_{\sigma(1)},\cdots,f_{\sigma(n)}\}.$$

(2) 莱布尼兹性质: 对任意的 $f_i,g\in C^\infty(M),(1\le i\le n)$,

$$\{f_1g,f_2,\cdots,f_n\}=f_1\{g,f_2,\cdots,f_n\}+g\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}.$$

(3) 基本恒等式: 对任意的 $f_i,g_j\in C^\infty(M),(1\le i\le n-1,1\le j\le n)$,

$$\{f_1,\cdots,f_{n-1},\{g_1,\cdots,g_n\}\}=\sum_{j=1}^n\{g_1,\cdots,\{f_1,\cdots,f_{n-1},g_j\},\cdots,g_n\}.$$

因此, 给定一个满足以上性质的南部-泊松括号 $\{\cdot,\cdots,\cdot\}$, 则唯一确定了泊松 n-张量 $\Lambda\in\Gamma(\wedge^nTM)$ 满足等式

$$\Lambda(df_1\wedge\cdots\wedge df_n)=\{f_1,\cdots,f_n\}. \tag{2.1}$$

设 E 为流形 M 上的向量丛, 其上的 1-阶 jet 丛 $\mathfrak{J}E$ [5] 是由 $\Gamma(E)$ 上的等价类来定义的. 对任意的 $u,v\in\Gamma(E),m\in M$, 如果 $u(m)=v(m)$ 且 $d_m\langle u,\xi\rangle=d_m\langle v,\xi\rangle$, 则有 $[u]_m=[v]_m$. 因此, 对任意的 $\mu\in(\mathfrak{J}E)_m$, 都存在一个表示 $u\in\Gamma(E)$ 满足 $\mu=[u]_m$. 文献 [1] 中, 作者证明了 jet 丛 $\mathfrak{J}E$ 是 $\mathfrak{D}E$ 的 E-对偶丛. 进而在文献 [6] 中, 作者通过 E-对偶丛给出了 n-阶反称 jet 丛.

$$\mathfrak{J}_nE:=Hom(\wedge^n\mathfrak{D}E,E)_{\mathfrak{J}E}=\{\mu\in Hom(\wedge^n\mathfrak{D}E,E)\mid Im(\mu_\sharp)\subset\mathfrak{J}E)\}\ \ n\ge2, \tag{2.2}$$

其中$\mu_\sharp : \wedge^{n-1}\mathfrak{D}E \to Hom(\mathfrak{D}E, E)$ 定义为:

$$\mu_\sharp(\mathfrak{d}_1, ...\mathfrak{d}_{n-1})(\mathfrak{d}_n) = \mu(\mathfrak{d}_1, ...\mathfrak{d}_n).\ \ \forall \mathfrak{d}_1, ...\mathfrak{d}_n \in \Gamma(\mathfrak{J}E)$$

并且n-阶反称 jet 丛对应的短正合序列如下:

$$0 \longrightarrow Hom(\wedge^n TM, E) \xrightarrow{\mathbf{e}} \mathfrak{J}_n E \xrightarrow{\mathbf{p}} Hom(\wedge^{n-1}TM, E) \longrightarrow 0\ . \tag{2.3}$$

设 E 为流形 M 上的向量丛, 文献 [7] 中, 作者介绍了 n-阶微分算子丛 $\mathfrak{D}^n E$, 即

$$\mathfrak{D}^n E := Hom(\wedge^n \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E} = \{\mathfrak{d} \in Hom(\wedge^n \mathfrak{J}E, E) \mid Im(\mathfrak{d}_\sharp) \subset \mathfrak{D}E)\}\ \ n \geq 2, \tag{2.4}$$

其中 $\mathfrak{d}_\sharp : \wedge^{n-1}\mathfrak{J}E \to Hom(\mathfrak{J}E, E)$ 定义为:

$$\mathfrak{d}_\sharp(\mu_1, ...\mu_{n-1})(\mu_n) = \mathfrak{d}(\mu_1, ...\mu_n).\ \ \forall \mu_1, ...\mu_n \in \Gamma(\mathfrak{J}E)$$

当 rank $E \geq 2$, 其所对应的短正合序列如下:

$$0 \longrightarrow Hom(\wedge^n E, E) \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathfrak{D}^n E \xrightarrow{\mathbf{j}} Hom(\wedge^{n-1}E, TM) \longrightarrow 0 \tag{2.5}$$

特别的, 当 $n = 1$, $\mathfrak{D}^1 E$ 为标架丛 $\mathcal{F}(E)$ 上的 $gauge$-李代数胚, 即向量丛 E 上的协变微分算子丛. 当 $n = 2$ 时, 设 $\pi \in \Gamma(\mathfrak{D}^2 E)$, 对任意的 $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(\mathfrak{J}E)$, 有 $\pi(\mu_1, \mu_2) \in \Gamma(E)$. 可以诱导出 $\pi^\sharp : \mathfrak{J}E \to \mathfrak{D}E$ 且满足:

$$\langle \pi^\sharp(\mu_1), \mu_2 \rangle_E = \pi(\mu_1, \mu_2).$$

并且, 在 $\Gamma(\mathfrak{J}E)$ 上的括号 $[\cdot, \cdot]_\sharp$ 定义为:

$$[\mu_1, \mu_2]_\sharp = \mathfrak{L}_{\pi^\sharp(\mu_1)}\mu_2 - \iota_{\pi^\sharp(\mu_2)}\mathbf{d}\mu_1 \tag{2.6}$$

因此, 由 $\pi^\sharp$ 自然诱导出了李代数胚 $(\mathfrak{J}E, [\cdot, \cdot]_\sharp, \mathbf{j} \circ \pi^\sharp)$.

设 E 为流形 M 上的向量丛, 我们分别用 $\mathfrak{X}^n_{lin}(E)$ 和 $\Omega^n_{lin}(E)$ 来表示向量丛 E 上线性 n-向量场和线性 n-形式的集合. 由文献 [3] 可知, E^* 上的 n-微分算子丛 $\mathfrak{D}^n E^*$ 同构于 E 上的线性 n-向量场 $\mathfrak{X}^n_{lin}(E)$, E^* 上的 n-阶反称 jet 丛 $\mathfrak{J}_n E^*$ 同构于 E 上的线性 n-形式 $\Omega^n_{lin}(E)$.

命题 1.1 [3] 对于 E 上的线性 n-向量场 $\mathfrak{X}^n_{lin}(E)$ 和线性 n-形式 $\Omega^n_{lin}(E)$, 如果 $rankE \geq 2$, 根据短正合序列 (2.5) 和 (2.3), 我们有:

$$\mathfrak{X}^n_{lin}(E) \cong \Gamma(\mathfrak{D}^n E^*) \cong \Gamma(\wedge^n E \otimes E^*) \oplus \Gamma(\wedge^{n-1}E \otimes TM);$$

$$\Omega^n_{lin}(E) \cong \Gamma(\mathfrak{J}_n E^*) \cong \Gamma(\wedge^n T^*M \otimes E^*) \oplus \Gamma(\wedge^{n-1}T^*M \otimes E^*).$$

3. 高阶 Omni-李代数胚 E-对偶

本节从 E-对偶丛的观念出发, 在高阶 omni-李代数胚 $(\mathfrak{D}E \oplus \mathfrak{J}_n E, (-,-)_+, \{-,-\}, \rho)$ 的基础上, 研究高阶 omni-李代数胚的 E-对偶 $(\mathfrak{D}^n E \oplus \mathfrak{J}E, (-,-)_+^*, \{-,-\}_*, \rho_*)$. 根据文献 [1] 中 E-对偶丛的定义, 可以给出 n-阶反称 jet 丛 $\mathfrak{J}_n E$ 与 n-阶微分算子丛 $\mathfrak{D}^n E$ 的 E-值配对括号 $\langle -,- \rangle$.

定义 2.1 设 E 为流形 M 上的向量丛, $\mathfrak{J}_n E$ 为其 n-阶反称 jet 丛, n-阶向量丛 $\mathfrak{D}^n E \subset Hom(\wedge^n \mathfrak{J}_n E, E)_{\mathfrak{D}E}$ 称为 n-阶 jet 丛 $\mathfrak{J}_n E$ 的 E-对偶丛, 如果 E-值配对 $\langle -,- \rangle : \Gamma(\mathfrak{J}_n E) \times \Gamma(\mathfrak{D}^n E) \to E$ 是非退化的.

文献 [8], 作者研究了复形 $(\Gamma(Hom(\wedge^\bullet \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E}), \mathbf{d}_{\mathfrak{J}})$ 的相关概念, 其中 $\mathbf{d}_{\mathfrak{J}}$ 为上边缘算子.

定义 2.2 [8] 对任意的 $\mathfrak{d} \in Hom(\wedge^k \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E}$, 以及 $\mu_1, ..., \mu_n \in \Gamma(\mathfrak{J}E)$, 映射 $\mathbf{d}_{\mathfrak{J}} : Hom(\wedge^k \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E} \to Hom(\wedge^{k+1} \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E}$ 定义为

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{d}_{\mathfrak{J}} \mathfrak{d})(\mu_1, ..\mu_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} (\pi^\sharp \mu_i)(\mathfrak{d}(\mu_1, ..\hat{\mu_i}, ..\mu_{k+1})) \\
&+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \mathfrak{d}([\mu_i, \mu_j]_\sharp, \mu_1, ..\hat{\mu_i}, ..\hat{\mu_j}, ..\mu_{k+1}).
\end{aligned}
$$

特别的, 给定一个李代数胚 $(E, [-,-]_E, \rho_E)$, 可以得到与 $\pi^\sharp : \mathfrak{J}E \to \mathfrak{D}E$ 相关的上链复形 $(\Gamma(Hom(\wedge^\bullet \mathfrak{J}E, E)), \mathbf{d}_{\mathfrak{J}})$ 的子复形 $(\Gamma(Hom(\wedge^\bullet \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E}), \mathbf{d}_{\mathfrak{J}})$, 根据文献 [9], 可以得到如下定义

定义 2.3 对任意的 $\mathfrak{d} \in Hom(\wedge^k \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E}$, 以及 $\mu, \mu_1, ..., \mu_n \in \Gamma(\mathfrak{J}E)$, 映射 $\mathfrak{L}_\mu : Hom(\wedge^k \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E} \to Hom(\wedge^k \mathfrak{J}E, E)_{\mathfrak{D}E}$ 定义为

$$
(\mathfrak{L}_\mu \mathfrak{d})(\mu_1, ..\mu_k) = \pi^\sharp \mu(\mathfrak{d}(\mu_1, ..\mu_k)) - \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{d}(\mu_1, ..., [\mu, \mu_i]_\sharp, ..., \mu_k).
$$

缩并算子 ι_μ 定义为: $\iota_\mu \mathfrak{d}(\mu_1, ..\mu_{k-1}) = \mathfrak{d}(\mu, \mu_1, ..\mu_{k-1})$.

因此, 对任意的 $\mu, \nu \in \Gamma(\mathfrak{J}E)$, 所对应的李导子 $\mathfrak{L}_\mu$ 和缩并算子 ι_μ 满足下列等式:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}_\mu &= \mathbf{d}_{\mathfrak{J}} \iota_\mu + \iota_\mu \mathbf{d}_{\mathfrak{J}}; \\
[\mathfrak{L}_\mu, \iota_\mu] &= \iota_{[\mu,\nu]_\sharp}, \ \ [\mathfrak{L}_\mu, \mathfrak{L}_\nu] = \mathfrak{L}_{[\mu,\nu]_\sharp}; \\
[\iota_\mu, \iota_\nu] &= [\mathbf{d}_{\mathfrak{J}}, \mathfrak{L}_\mu] = 0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

定理 2.4 令 $\mathcal{E}^n(E) := \mathfrak{D}^n E \oplus \mathfrak{J}E$, 则高阶 omni-李代数胚的 E-对偶 $(\mathcal{E}^n(E), (-,-)_+^*, \{-,-\}_*, \rho_*)$ 结构如下:

(1) 反称双线性 $\mathfrak{D}^{n-1}E$-值配对 $(-,-)_+^*$ 定义为

$$
(\mathfrak{d} + \mu, \mathfrak{r} + \nu)_+^* = (\iota_\nu \mathfrak{d} + \iota_\mu \mathfrak{r});
\tag{3.2}
$$

(2) 其上的 $Dorfman$ 括号 $\{-,-\}_*:\Gamma(\mathcal{E}^n(E))\times\Gamma(\mathcal{E}^n(E))\to\Gamma(\mathcal{E}^n(E))$ 定义为

$$\{\mathfrak{d}+\mu,\mathfrak{r}+\nu\}_*=[\mathfrak{d},\mathfrak{r}]+\mathfrak{L}_\mu\mathfrak{r}-\iota_\nu\mathbf{d}_{\mathfrak{J}}\mathfrak{d}+[\mu,\nu]_\sharp=\mathfrak{L}_\mu\mathfrak{r}-\iota_\nu\mathbf{d}_{\mathfrak{J}}\mathfrak{d}+[\mu,\nu]_\sharp; \tag{3.3}$$

其中 $[\mu,\nu]_\sharp$ 由式 (2.6)给出.

(3) 锚映射 $\rho_*:\mathfrak{D}^nE\oplus\mathfrak{J}E\to\mathfrak{D}E$ 定义为

$$\rho_*(\mathfrak{d}+\mu)=\pi^\sharp\mu, \tag{3.4}$$

其中任意的 $\mathfrak{d},\mathfrak{r}\in\Gamma(\mathfrak{D}^nE)$, $\mu,\nu\in\Gamma(\mathfrak{J}E)$.

4. 高阶 Omni-李双代数胚 Double

文献 [10] 中, 作者证明了通过引入李双代数胚的 $Manin\ triples$, 可以在 $Courant$-代数胚理论的框架下构造李双代数胚的 $double$. 在本节中, 通过莱布尼茨代数胚的匹配对来构造 高阶 omni-李双代数胚 double.

文献 [11] 中, 作者介绍了莱布尼茨代数胚的匹配对相关概念, 并证明了流形 M 上的一个 n-阶 $(n>2)$ 的南部-雅可比结构定义了一对匹配的莱布尼茨代数. 首先, 回顾一下莱布尼茨代数胚的匹配对的定义.

定义 3.1 [11] $(A_1,\{-,-\}_1,\rho_1)$, $(A_2,\{-,-\}_2,\rho_2)$ 是 M 上的两个莱布尼茨代数胚, 若他们的直和丛 $A_1\oplus A_2$ 也构成莱布尼茨代数胚结构 $(A_1\oplus A_2,\{-,-\}_{A_1\oplus A_2},\rho)$, 则称 (A_1,A_2) 是莱布尼茨代数胚 A_1 和 A_2 的匹配对, 且满足 A_1,A_2 是 $A_1\oplus A_2$ 的莱布尼茨子代数胚.

由文献 [4] 和命题 2.5 可知, $(\mathcal{E}_n(E),\{-,-\},\rho)$, 和 $(\mathcal{E}^n(E),\{-,-\}^*,\rho_*)$ 构成两个莱布尼茨代数胚. 因此, 根据莱布尼茨代数胚的匹配对的定义, 可以得出如下定义.

定义 3.2 $(\mathcal{E}_n(E),\{-,-\},\rho)$, $(\mathcal{E}^n(E),\{-,-\}^*,\rho_*)$ 是两个莱布尼茨代数胚, 若他们的直和丛 $\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E)$ 也构成莱布尼茨代数胚结构 $(\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E),\{-,-\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},\tilde{\rho})$, 且 $\mathcal{E}_n(E),\mathcal{E}^n(E)$ 是 $\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E)$ 的莱布尼茨子代数胚, 则称 $(\mathcal{E}_n(E),\mathcal{E}^n(E))$ 是莱布尼茨代数胚 $\mathcal{E}_n(E)$ 和 $\mathcal{E}^n(E)$ 的匹配对.

根据文章可知, $\tilde{\rho}(\alpha+x)=\rho(\alpha)+\rho_*(x)$, 且 $\{\alpha,\beta\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n}=\{\alpha,\beta\}$, $\{x,y\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n}=\{x,y\}^*$. 由于 $\Gamma(\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E))\cong\Gamma(\mathcal{E}_n(E))\oplus\Gamma(\mathcal{E}^n(E))$, 我们以 Pr_1 表示 $\Gamma(\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E))\cong\Gamma(\mathcal{E}_n(E))\oplus\Gamma(\mathcal{E}^n(E))$ 到 $\Gamma(\mathcal{E}_n(E))$ 的投射, Pr_2 表示 $\Gamma(\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E))\cong\Gamma(\mathcal{E}_n(E))\oplus\Gamma(\mathcal{E}^n(E))$ 到 $\Gamma(\mathcal{E}^n(E))$ 的投射, 由此, 他们分别诱导出以下线性映射:

$$\begin{aligned}
\rho^L&:\Gamma(\mathcal{E}^n(E))\times\Gamma(\mathcal{E}_n(E))\to\Gamma(\mathcal{E}_n(E)),\\
\rho^R&:\Gamma(\mathcal{E}_n(E))\times\Gamma(\mathcal{E}^n(E))\to\Gamma(\mathcal{E}_n(E)),\\
\rho_*^L&:\Gamma(\mathcal{E}_n(E))\times\Gamma(\mathcal{E}^n(E))\to\Gamma(\mathcal{E}^n(E)),\\
\rho_*^R&:\Gamma(\mathcal{E}^n(E))\times\Gamma(\mathcal{E}_n(E))\to\Gamma(\mathcal{E}^n(E)),
\end{aligned}$$

DOI: 10.12677/pm.2023.132028

其中, 对任意的 $\alpha,\beta\in\Gamma(\mathcal{E}_n(E))$, $x,y\in\Gamma(\mathcal{E}^n(E))$ 满足

$$\rho^L(\alpha)y = Pr_1\{y,\alpha\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n}, \quad \rho^R(\alpha)y = Pr_1\{\alpha,y\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},$$
$$\rho_*^L(x)\beta = Pr_2\{\beta,x\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n}, \quad \rho_*^R(x)\beta = Pr_2\{x,\beta\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n}.$$

命题 3.3 如果 $(\mathcal{E}_n(E),\mathcal{E}^n(E))$ 是莱布尼茨代数胚 $\mathcal{E}_n(E)$ 和 $\mathcal{E}^n(E)$ 的匹配对, 那么存在莱布尼茨代数胚 $\mathcal{E}_n(E)$ 在 $\mathcal{E}^n(E)$ 上的表示 (ρ_*^L,ρ_*^R) 和莱布尼茨代数胚 $\mathcal{E}^n(E)$ 在 $\mathcal{E}_n(E)$ 上的表示 (ρ^L,ρ^R), 且对任意的 $\alpha,\beta\in\Gamma(\mathcal{E}_n(E))$, $x,y\in\Gamma(\mathcal{E}^n(E))$ 满足以下相容条件:

由于 $\rho:(\Gamma(\mathcal{E}_n(E)),\{-,-\})\to(\mathfrak{X}(M),[-,-])$ 和 $\rho_*:(\Gamma(\mathcal{E}^n(E)),\{-,-\}_*)\to(\mathfrak{X}(M),[-,-])$ 是个莱布尼茨代数同态, 因此, 有

(1) $\rho(\rho^R(\alpha)y)+\rho_*(\rho_*^L(y)\alpha)=[\rho(\alpha),\rho_*(y)]$;

(2) $\rho_*(\rho_*^R(\beta)x)+\rho(\rho^L(x)\beta)=[\rho_*(\beta),\rho(x)]$;

根据莱布尼茨代数胚 $\mathcal{E}_n(E)$ 和 $\mathcal{E}^n(E)$ 所满足的莱布尼茨恒等 $\{\alpha,\{\beta,\gamma\}\}-\{\{\alpha,\beta\},\gamma\}-\{\beta,\{\alpha,\gamma\}\}=0$. 我们有

(3) $\rho^R(\{\alpha,\beta\})y=\{\alpha,\rho^R(\beta)y\}-\{\beta,\rho^R(\alpha)y\}+\rho^R(\alpha,\rho_*^L(y)\beta)-\rho^R(\beta,\rho_*^L(y)\alpha)$;

(4) $\rho_*^R(\{x,y\}_*)\alpha=\{x,\rho_*^R(y)\alpha\}_*-\{y,\rho_*^R(x)\alpha\}_*+\rho_*^R(x,\rho^L(\alpha)y)-\rho_*^R(y,\rho^L(\alpha)x)$;

(5) $\rho^L(\{\alpha,\beta\})y=\{\alpha,\rho^L(\beta)y\}-\{\rho^R(\alpha)y,\beta\}+\rho^R(\alpha,\rho_*^R(y)\beta)-\rho^L(\rho_*^L(y)\alpha,\beta)$;

(6) $\rho_*^L(\{x,y\}_*)\alpha=\{x,\rho_*^L(y)\alpha\}_*-\{\rho_*^R(x)\alpha,y\}_*+\rho_*^R(x,\rho^R(\alpha)y)-\rho_*^L(\rho^L(\alpha)x,y)$;

(7) $\rho^L(\{\alpha,\beta\})y=\{\rho^L(\alpha)y,\beta\}+\{\rho^L(\beta)y,\alpha\}+\rho^R(\alpha,\rho_*^R(y)\beta)-\rho^L(\rho_*^R(y)\beta,\alpha)$;

(8) $\rho_*^L(\{x,y\}_*)\alpha=\{\rho_*^L(x)\alpha,y\}_*+\{\rho_*^L(y)\alpha,x\}_*+\rho_*^R(x,\rho^R(\alpha)y)-\rho_*^L(\rho^R(\alpha)y,x)$.

因此, $(\mathcal{E}_n(E),\mathcal{E}^n(E))$ 是莱布尼茨代数胚的匹配对, 在直和向量丛 $\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E)$ 上有一个莱布尼茨代数胚结构 $(\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E),\{-,-\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},\tilde{\rho})$, 其莱布尼茨括号为

$$\{\alpha+x,\beta+y\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n}=\{\alpha,\beta\}+\rho_*^R(y)\alpha+\rho_*^L(x)\beta+\{x,y\}_*+\rho^L(\alpha)y+\rho^R(\beta)x. \tag{4.1}$$

当 $E=M\times\mathbb{R}$ 为平凡线性丛时, $\mathfrak{D}E=TM\times\mathbb{R}$, $\mathfrak{J}E=T^*M\times\mathbb{R}$. 根据向量丛 E 上的 n-阶多元导子 $\mathfrak{D}^nE$ 和 n-阶反称 jet 从 $\mathfrak{J}_nE$ 的定义, 我们有 $\mathfrak{D}^nE\cong\wedge^n(TM\times\mathbb{R})$, $\mathfrak{J}_nE\cong\wedge^n(T^*M\times\mathbb{R})$, 因此正合序列 (2.5) 可表示为:

$$0\longrightarrow\wedge^n(M\times\mathbb{R})\otimes M\times\mathbb{R}\xrightarrow{\mathbf{i}}\mathfrak{D}^n(M\times\mathbb{R})\xrightarrow{\mathbf{j}}\wedge^{n-1}(M\times\mathbb{R})\otimes TM\longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

由文献 [2] 可得, 正合序列 (2.3) 可表示为 $\wedge^nT^*M$-模的短正合序列:

$$0\longrightarrow\wedge^nT^*M\otimes M\times\mathbb{R}\xrightarrow{\mathbf{e}}\mathfrak{J}_n(M\times\mathbb{R})\xrightarrow{\mathbf{p}}\wedge^{n-1}T^*M\otimes M\times\mathbb{R}\longrightarrow 0\,. \tag{4.3}$$

命题 3.4 [3] 设 $E=M\times\mathbb{R}$, 其上的线性 n-向量场 $\mathfrak{X}^n_{lin}(E)$ 和线性 n-形式 $\Omega^n_{lin}(E)$ 有如下同构

关系:

$$\mathfrak{X}^n_{lin}(M\times\mathbb{R})\cong\Gamma(\mathfrak{D}^n(M\times\mathbb{R}))\cong\mathfrak{X}^n(M)\oplus\mathfrak{X}^{n-1}(M); \tag{4.4}$$

$$\Omega^n_{lin}(M\times\mathbb{R})\cong\Gamma(\mathfrak{J}_n(M\times\mathbb{R}))\cong\Omega^n(M)\oplus\Omega^{n-1}(M). \tag{4.5}$$

则 $\mathcal{E}_n(E)=TM\times\mathbb{R}\oplus\wedge^n(T^*M\times\mathbb{R})$, $\mathcal{E}^n(E)=\wedge^n(TM\times\mathbb{R})\oplus T^*M\times\mathbb{R}$.

定理 3.5 设 E 是 M 上的平凡线丛, 令 $\Delta=\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E)$, 则高阶 omni-李双代数胚-double $(\Delta,(-,-),\{-,-\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},\tilde{\rho})$ 结构如下:

(1) $\mathcal{E}_n(E)\oplus\mathcal{E}^n(E):=(TM\times\mathbb{R}\oplus\wedge^n(T^*M\times\mathbb{R}))\oplus(\wedge^n(TM\times\mathbb{R})\oplus T^*M\times\mathbb{R})$

(2) 非退化双线性对称 $C^\infty(M)$-值配对 $(-,-)$ 定义为

$$((X,f)\oplus(\alpha_n,\alpha_{n-1}),(\Lambda,\Gamma)\oplus(\xi,g))=\langle\iota_X\alpha_n,\iota_\xi\Lambda\rangle+fg\langle\alpha_{n-1},\Gamma\rangle-\langle\iota_X\alpha_{n-1},\iota_\xi\Gamma\rangle \tag{4.6}$$

(3) 令 $\pi_i\in\Gamma(TM\times\mathbb{R}),\Phi_i\in\Gamma(\wedge^n(T^*M\times\mathbb{R})),\Pi_i\in\Gamma(\wedge^n(TM\times\mathbb{R})),\phi_i\in\Gamma(T^*M\times\mathbb{R}),i=1,2,$ 则截面上的 Courant 括号定义为

$$\begin{aligned}&\{\pi_1\oplus\Phi_1+\Pi_1\oplus\phi_1,\pi_2\oplus\Phi_2+\Pi_2\oplus\phi_2\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n}\\&=\{\pi_1\oplus\Phi_1,\pi_2\oplus\Phi_2\}_{\mathcal{E}_n}+\rho^R_*(\Pi_2\oplus\phi_2)(\pi_1\oplus\Phi_1)+\rho^L_*(\Pi_1\oplus\phi_1)\pi_2\oplus\Phi_2\\&\quad+\rho^L(\pi_1\oplus\Phi_1)(\Pi_2\oplus\phi_2)+\rho^R(\pi_2\oplus\Phi_2)(\Pi_1\oplus\phi_1)+\{\Pi_1\oplus\phi_1,\Pi_2\oplus\phi_2\}_{\mathcal{E}^n}\end{aligned}$$

(4) 锚映射定义为

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}((X,f)\oplus(\alpha_n,\alpha_{n-1}),(\Lambda,\Gamma)\oplus(\xi,g))\\&=\rho((X,f)\oplus(\alpha_n,\alpha_{n-1}))+\rho_*((\Lambda,\Gamma)\oplus(\xi,g))\\&=(X,f)+(\pi,\chi)^\sharp(\xi,g).\end{aligned}$$

其中 $(X,f)\in\mathfrak{X}(M)\times C^\infty(M,\mathbb{R})$, $(\alpha_n,\alpha_{n-1})\in\Omega^n(M)\times\Omega^{n-1}(M)$, $(\Lambda,\Gamma)\in\mathfrak{X}^n(M)\times\mathfrak{X}^{n-1}(M)$, $(\xi,g)\in\Omega^1(M)\times C^\infty(M,\mathbb{R})$.

证明 根据式(3.2), 通过计算可得

$$\begin{aligned}&((X,f)\oplus(\alpha_n,\alpha_{n-1}),(\Lambda,\Gamma)\oplus(\xi,g))\\&=((\iota_X\alpha_n+f\alpha_{n-1},-\iota_X\alpha_{n-1}),(\iota_\xi\Lambda+g\Gamma,-\iota_\xi\Gamma))\\&=(\langle\iota_X\alpha_n+f\alpha_{n-1},\iota_\xi\Lambda+g\Gamma\rangle,-\langle\iota_X\alpha_{n-1},\iota_\xi\Gamma\rangle)\\&=\langle\iota_X\alpha_n,\iota_\xi\Lambda\rangle+fg\langle\alpha_{n-1},\Gamma\rangle-\langle\iota_X\alpha_{n-1},\iota_\xi\Gamma\rangle\end{aligned}$$

即可证得 (4.6).

由式 (4.1) 可知, 其中 $\{\pi_1\oplus\Phi_1,\pi_2\oplus\Phi_2\}_{\mathcal{E}_n}$ 由文献 [3] 所给出, $\{\Pi_1\oplus\phi_1,\Pi_2\oplus\phi_2\}_{\mathcal{E}^n}$ 由式 (3.3) 所给出, 并且, 令 Pr_1 表示 $\Gamma(\Delta)$ 到 $\Gamma(\mathcal{E}_n(E))$ 的投射, Pr_2 表示 $\Gamma(\Delta)$ 到 $\Gamma(\mathcal{E}^n(E))$ 的投射, 根据诱

导的线性映射, 可得

$$\begin{aligned}
\rho_*^R(\Pi_2\oplus\phi_2)(\pi_1\oplus\Phi_1) &= Pr_2\{\Pi_2\oplus\phi_2,\pi_1\oplus\Phi_1\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},\\
\rho_*^L(\Pi_1\oplus\phi_1)(\pi_2\oplus\Phi_2) &= Pr_2\{\pi_2\oplus\Phi_2,\Pi_1\oplus\phi_1\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},\\
\rho^L(\pi_1\oplus\Phi_1)(\Pi_2\oplus\phi_2) &= Pr_1\{\Pi_2\oplus\phi_2,\pi_1\oplus\Phi_1\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n},\\
\rho^R(\pi_2\oplus\Phi_2)(\Pi_1\oplus\phi_1) &= Pr_1\{\pi_2\oplus\Phi_2,\Pi_1\oplus\phi_1\}_{\mathcal{E}_n\oplus\mathcal{E}^n}.
\end{aligned}$$

对于锚映射 $\tilde{\rho}:\Delta\to\mathfrak{D}E$ 的定义由式 (3.4)给出. □

5. 结论

本文在前人研究的基础上运用高阶的观点展开研究. 在直和丛 $\mathfrak{D}^nE\oplus\mathfrak{J}E$ 上构造了高阶 omni-李代数胚 E-对偶 $\mathcal{E}^n(E)$. 其次, 通过莱布尼茨代数胚的匹配对, 构造了与高阶 omni-李双代数胚相关的匹配对, 并且得到了与平凡线丛 $M\times\mathbb{R}$ 相关的高阶 omni-李双代数胚 double.

参考文献

[1] Chen, Z. and Liu, Z. (2010) Omni-Lie Alegebroids. *Journal of Geometry and Physics*, **60**, 799-808. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2010.01.007

[2] Bi, Y., Vitagliano, L. and Zhang, T. (2018) Higher Omni-Lie Algebroids. arXiv preprint arXiv: 1812.09496

[3] Lang, H. and Sheng, Y. (2020) Linearization of the Higher Analogue of Courant Algebroids. *Journal of Geometric Mechanics*, **12**, 585-606. https://doi.org/10.3934/jgm.2020025

[4] Ibanez, R., Leon, M. and Marrero, J. (1997) Dynamics of Generalized Poisson and Nambu-Poisson Brackets. *Journal of Mathematical Physics*, **38**, 2332-2344. https://doi.org/10.1063/1.531960

[5] Saunders, D.J., Saunders, D. and Saunders, D.J. (1989) The Geometry of Jet Bundles. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526411

[6] Chen, Z., Liu, Z. and Sheng, Y. (2010) E-Courant Algebroids. *International Mathematics Research Notices*, **2010**, 4334-4376. https://doi.org/10.1093/imrn/rnq053

[7] Crainic, M. and Moerdijk, I. (2008) Deformations of Lie Brackets: Cohomological Aspects. *Journal of the European Mathematical Society*, **10**, 1037-1059. https://doi.org/10.4171/JEMS/139

[8] Sheng, Y. (2012) On Deformations of Lie Algebroids. *Results in Mathematics*, **62**, 103-120. https://doi.org/10.1007/s00025-011-0133-x

[9] 毕艳会, 范宏涛, 陈丹露. 非交换omni-李代数胚[J]. 数学进展, 2022, 51(5): 879-890.

[10] Liu, Z.J., Weinstein, A. and Xu, P. (1997) Manin Triples for Lie Bialgebroids. *Journal of Differential Geometry*, **45**, 547-574. https://doi.org/10.4310/jdg/1214459842

[11] Ibaez, R., Lopez, B., Marrero, J.C., *et al.* (2001) Matched Pairs of Leibniz Algebroids, Nambu-Jacobi Structures and Modular Class. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, **333**, 861-866. https://doi.org/10.1016/S0764-4442(01)02150-4

[12] Bi, Y. and Fan, H. (2021) Higher Nonabelian Omni-Lie Algebroids. *Journal of Geometry and Physics*, **167**, Article ID: 104277. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104277