Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2994-2999
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310308

一道初中平面几何题的解法赏析

高居敏

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年9月19日；录用日期：2023年10月20日；发布日期：2023年10月27日

摘 要

平面几何是初中数学的重要知识点，对学生的数学思维能力要求较高，平面几何题的解法往往因辅助线的不同而有多种不同的解法。本文以一道初中平面几何题为例，探究不同的八种解法，以促进学生的数学思维不断提升。

关键词

一题多解，平面几何，数学思维

Appreciation of the Solution to a Junior Middle School Plane Geometry Problem

Jumin Gao

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 19th, 2023; accepted: Oct. 20th, 2023; published: Oct. 27th, 2023

Abstract

Plane geometry is an important knowledge point in junior high school mathematics, which requires students to have high mathematical thinking ability. The solutions to plane geometry problems often have many different solutions due to different auxiliary lines. This article takes a junior middle school plane geometry problem as an example to explore eight different solutions to promote the continuous improvement of students' mathematical thinking.

Keywords

One Problem with Multiple Solutions, Plane Geometry, Mathematical Thinking

文章引用: 高居敏. 一道初中平面几何题的解法赏析[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2994-2999.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310308

1. 引言

数学练习题是永远做不完的，如何让学生跳出题海，减轻学生的学业负担。是数学教学中急需解决的一个重要问题。一题多解，顾名思义，指的是围绕一道题目展开的多角度练习。这是一种十分常见的练习形式。在进行一题多解练习时，学生需要思维发散，结合所学知识从不同角度、不同层面思考问题。教学实践反复证明，巧用一题多解，不仅能够提升学生学习的主动性。还能增强学生数学思维能力，促使学生从机械呆板的做题模式中解脱出来。本文将以一道初中平面几何题为例，来谈一题多解对于促进学生跳出题海包围圈的关键作用[1] [2]。

2. 案例分析

问题呈现：如图 1，在 ΔABC 中，$\angle ACB = \angle ACF = 90^{\circ}$，$D$ 为 AC 中点，E 为 AB 上一点，连接 ED，BC 的延长线交于点 F，$\angle F = 30^{\circ}$，$ED = 2$，$DF = 6$，$EB = 2\sqrt{7}$。则 BC 的长为

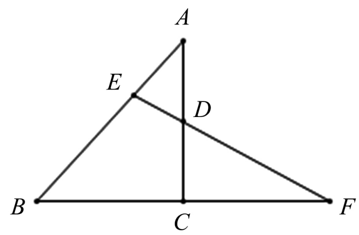

Figure 1. Master map
图 1. 原图

【试题解析】本题是一道经典的初中平面几何问题，几何是初中数学的重要知识点，几何的许多问题需要借助相似三角形来解决，添加不同的辅助线构造相似三角形往往是学生解题时的第一选择。本题题设条件简明，并且给出多个已知线段长度，学生解题时往往会容易着手。

解法 1

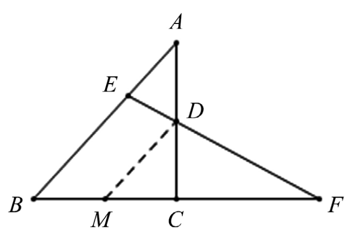

Figure 2. Figure of solution one
图 2. 第一个解法图

【试题分析】如图 2，已有的条件不能直接求出线段 BC 的长度，那么只需构造辅助线即可，过点 D 做 $DM \parallel AB$，根据 $\Delta DMF \sim \Delta EBF$ 相似，求出 MD 的长度，在由勾股定理得到 MC 的长度，根据中位线原

理 $BC = 2MC$。

过点 D 做 $DM \,//\, AB$，交 BC 于 M。易知 $\Delta DMF \sim \Delta EBF$ 得 $\frac{MD}{BE} = \frac{DF}{EF}$，$\frac{MD}{2\sqrt{7}} = \frac{6}{8}$，即 $MD = \frac{3\sqrt{7}}{2}$。因为 $\angle F = 30^\circ$，$DF = 6$，所以 $CD = 3$。在 ΔDMC 中，由勾股定理得 $MC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，又因为 M 是 BC 中点，所以 $BC = 2MC = 3\sqrt{3}$。

解法 2

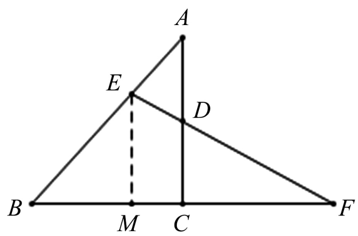

Figure 3. Figure of solution two
图 3. 第二个解法图

【试题分析】如图 3，过点 E 作 $EM \perp BF$，交 BF 与点 M，要想求 BC 的长度，那么只需求 BM，MC 长度即可。即 $\Delta DCF \sim \Delta EMF$，求出 MF，ME 的长度，再根据勾股定理得到 BM 的长度。

过点 E 作 $EM \perp BF$，交 BF 与点 M，即 $\Delta DCF \sim \Delta EMF$，因为 $\angle F = 30^\circ$，$DF = 6$，$\angle ACB = \angle ACF = \angle EMF = 90^\circ$，所以 $CD = 3$，$ME = 4$，由勾股定理可得 $CF = 3\sqrt{3}$。由 $\Delta DCF \sim \Delta EMF$ 可得，$\frac{DF}{EF} = \frac{CF}{MF}$，$\frac{6}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{MF}$，即 $MF = 4\sqrt{3}$，$MC = MF - CF = \sqrt{3}$，在 ΔBEM 中，$BE = 2\sqrt{7}$，$ME = 4$，由勾股定理可得 $BM = 2\sqrt{3}$，$BC = BM + MC = 3\sqrt{3}$。

解法 3

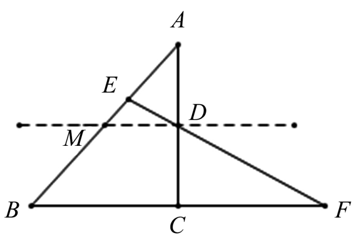

Figure 4. Figure of solution three
图 4. 第三个解法图

【试题分析】如图 4，构造辅助线，即过点 D 作 $DM \,//\, FB$，交 AB 于点 M。只要求出 MD 的长度，根据中位线原理，$BC = 2MD$。

过点 D 作 $DM \,//\, FB$，交 AB 于点 M，$\Delta DEM \sim \Delta FEB$。因为 $\angle F = 30^\circ$，$\angle ACF = 90^\circ$，所以 $CD = 3$，$CF = 3\sqrt{3}$。D 是 AC 的中点，设 $MD = X$，$BC = 2X$，$\frac{MD}{BF} = \frac{ED}{EF}$，$\frac{X}{2X + 3\sqrt{3}} = \frac{2}{8}$，$X = MD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，$BC = 2X = 3\sqrt{3}$。

解法 4

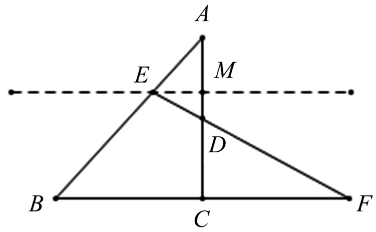

Figure 5. Figure of solution four
图 5. 第四个解法图

【试题分析】如图 5，作 $EM // BF$，交 AC 于点 M，只要求出 AE 的长度，根据三角形勾股定理即可求出 BC 的长度。由 $\Delta EMD \sim \Delta FCD$，求出 MD 的长度。在由勾股定理求出 EM 长度，进而求出 AE 的长度。

作 $EM // BF$，交 AC 于点 M，即 $\Delta EMD \sim \Delta FCD$，由 $\angle ACF = 90^{\circ}$，$\angle F = 30^{\circ}$，$DF = 6$，得 $CD = AD = 3$，$\dfrac{MD}{CD} = \dfrac{ED}{DF}$，得 $\dfrac{MD}{3} = \dfrac{2}{6}$，得 $MD = 1$，$AM = AD - MD = 2$，在 ΔEMD 中，$\angle EMD = 90^{\circ}$，由勾股定理得 $EM = \sqrt{3}$。在 ΔAEM 中，$EM = \sqrt{3}$，$AM = 2$，由勾股定理得 $AE = \sqrt{7}$，即 $AB = 3\sqrt{7}$，在 ΔABC 中，$AB = 3\sqrt{7}$，$AC = 6$，由勾股定理得 $BC = 3\sqrt{3}$。

解法 5

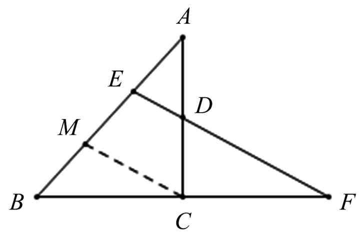

Figure 6. Figure of solution five
图 6. 第五个解法图

【试题分析】如图 6，构造辅助线，过点 C 作 $CM // FE$，交 AB 于点 M，由勾股定理得 $FC = 3\sqrt{3}$，再根据中位线原理得到 $MC = 2ED$。在由 $\Delta BMC \sim \Delta BEF$，即可得到 BC 的长度。

过点 C 作 $CM // FE$，交 AB 于点 M，即 $\Delta AED \sim \Delta AMC$，由 $\angle ACF = 90^{\circ}$，$\angle F = 30^{\circ}$，$DF = 6$，得 $CD = AD = 3$，由勾股定理得 $CF = 3\sqrt{3}$，因为 D 是 AC 的中点，$ED // MC$，即 $MC = 2ED = 4$，又因为 $MC // EF$，所以在 $\Delta BMC \sim \Delta BEF$，设 $BC = X$，即 $\dfrac{BC}{BF} = \dfrac{MC}{EF}$，$\dfrac{X}{X + 3\sqrt{3}} = \dfrac{4}{8}$，$X = BC = 3\sqrt{3}$。

解法 6

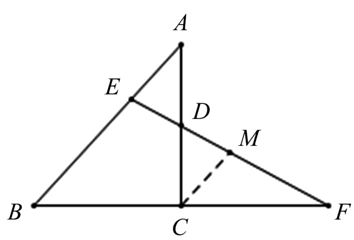

Figure 7. Figure of solution six
图 7. 第六个解法图

【试题分析】如图 7，构造辅助线，过点 C 作 $CM \parallel BA$，交 EF 于点 M。由 $\Delta AED \cong \Delta CMD$，得到 DM 长度，再由勾股定理得到 CF，MF 的长度。进而根据 $\Delta FCM \sim \Delta FBE$，得到 BC 的长度。

过点 C 作 $CM \parallel BA$，交 EF 于点 M，因为 $\angle ADE = \angle CDM$，$\angle BAC = \angle ACM$，$AD = CD$，所以 $\Delta AED \cong \Delta CMD$ (ASA)，即 $ED = MD = 2$，$FM = FD - MF = 4$。由 $\angle DCF = 90^\circ$，$\angle F = 30^\circ$，$DF = 6$，可得 $CD = 3$，$CF = 3\sqrt{3}$。又因为 $CM \parallel BA$，即 $\Delta FCM \sim \Delta FBE$，$\dfrac{MF}{EF} = \dfrac{CF}{BF}$，$\dfrac{4}{8} = \dfrac{3\sqrt{3}}{BF}$，$BF = 6\sqrt{3}$，即 $BC = BF - CF = 3\sqrt{3}$。

解法 7

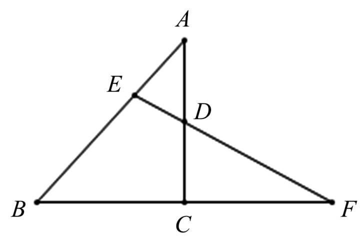

Figure 8. Figure of solution seven
图 8. 第七个解法图

【试题分析】如图 8，当学生构造辅助线的方法已用完后，不妨进一步发散思维。已知 BE，EF 的长度，$\angle F = 30^\circ$，那么根据余弦定理得到 BF 的长度，进而得到 BC 的长度。

由 $\angle DCF = 90^\circ$，$\angle F = 30^\circ$，$DF = 6$，可得 $CD = 3$，由勾股定理可得 $CF = 3\sqrt{3}$。由 $BE = 2\sqrt{7}$，$EF = 8$，$\angle F = 30^\circ$。根据余弦定理 $COS\angle F = \dfrac{EF^2 + BF^2 - BE^2}{2EF \times BF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $BF = 6\sqrt{3}$，$BF = 2\sqrt{3}$（舍去）$BC = BF - CF = 3\sqrt{3}$。

解法 8

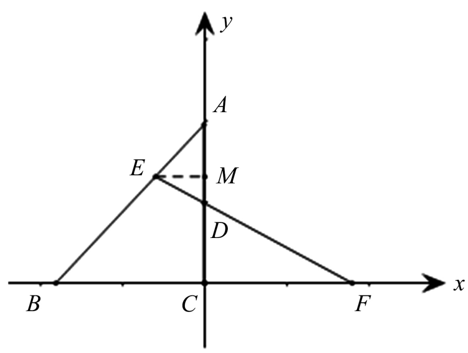

Figure 9. Figure of solution eight
图 9. 第八个解法图

【试题分析】如图 9，解析法是在平面直角坐标系的基础上，把几何问题转化为代数问题。以 CF 为 X 轴、CA 为 Y 轴建立平面直角坐标系；其关键在于如何求 E、B 点的坐标。根据 D、F 两点坐标求出 FE 直线方程。再根据 A，E 求出 AB 的直线方程。最后即可求出 B 的坐标，即 BC 长度。

以 C 为原点，CF 为 X 轴，CA 为 Y 轴，建立平面直角坐标系。过 E 作 $EM \perp AD$，即 $\Delta EMD \sim \Delta FCD$，

$\frac{DF}{DE}=\frac{CD}{MD}$，$\frac{6}{2}=\frac{3}{MD}$，即 $MD=1$。由勾股定理的 $EM=\sqrt{3}$，即 $D(0,3)$，$F\left(3\sqrt{3},0\right)$。设直线 FE 的方程为 $y_1=kx+b$，$\begin{cases}b=3\\3\sqrt{3}k+3=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b=3\\k=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$，直线 FE 的方程 $y_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$，当 $X=-\sqrt{3}$ 时，$Y=4$。即 $E\left(-\sqrt{3},4\right)$。设直线 AB 方程 $y_2=k_1X+b_1$。由 $E\left(-\sqrt{3},4\right)$，$A(0,6)$ 得 $\begin{cases}b_1=6\\-\sqrt{3}k_1+b_1=4\end{cases}$，即 $\begin{cases}b_1=6\\k_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$，直线 AB 的方程为 $y_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}X+6$，令 $y_2=0$，可得 $X=-3\sqrt{3}$，$B\left(-3\sqrt{3},0\right)$，$|BC|=3\sqrt{3}$。

3. 小结

上述的八种解法不仅用到了三角形勾股定理，余弦定理，全等三角形的判定及性质，还用到了添加辅助线，构造平面直角坐标系等知方法。这种题目，不仅能够帮助学生将所学的知识点联系起来，同时还能培养学生的数学思维能力，提高问题发现能力，问题解决能力，问题探究能力。教师在进行习题的讲解时，应充分引导学生发散思维，如这道题只有一种辅助线构造方法吗？除了辅助线的构造还有别的方法吗？你能借助不一样的知识点来解题吗？这样的教学方法对当下中学生数学思维能力大有益处。

4. 一题多解的价值分析

1) 一题多解有利于促进学生的核心素养

一题多解的教学模式有利于培养学生的数学推理、分析、思考和观察等能力。学生在认识数学、理解数学乃至创造数学的过程中，能建立起积极向上的学习态度，实现用数学的眼光看待现实世界。用数学的语言表达现实世界，用数学的思维分析现实世界，最终使学生的核心素养不断提升[3]。

2) 一题多解促进学生知识迁移

一题多解是梳理知识与思想方法的有效方式之一，它不仅可以实现知识的迁移与融会贯通，还可以使学生的解题思路得到发展。学生在学习数学的过程中，不应该单纯地记忆数学公式、概念和定理，还应形成固定的解题方法，从而节约解题时间。由此可见，一题多解不仅能强化基础知识、明晰解题思路，还能提升学习效率[4]。

参考文献

[1] 张世凡, 冉雪琴, 张晓斌. 体现数学本质的一题多解教学[J]. 数学教学通讯, 2022(6): 9-11.

[2] 徐飞雷, 王颖. 初中数学一题多解的探究[J]. 中学教学参考, 2020(35): 27-28.

[3] 程华. 从"一题多解"审思解题教学的思维培养[J]. 数学通报, 2020, 59(8): 50-54.

[4] 赵弘, 杜梦雅. 中小学生数学创造力的测量与培养——以一题多解为进路[J]. 数学通报, 2020, 59(4): 11-17.