

非局部随机扩散方程解的Hölder连续性

贾倩*, 王伟

天津师范大学数学科学学院, 天津

收稿日期: 2023年11月7日; 录用日期: 2023年12月7日; 发布日期: 2023年12月18日

摘要

本文的目标是获得非局部随机扩散方程解的Hölder连续性。利用Campanato估计和Sobolev嵌入定理, 首先证明了非局部随机扩散方程的温和解的Hölder连续性, 即解 u 属于空间 $C^\beta(D_T; L^p(\Omega))$ 。其次, 通过使用尾估计, 得到了 $L^p(\Omega; C^{\beta^*}(D_T))$ 中的温和解的估计。

关键词

分数布朗运动, Hölder连续性, L^∞ 估计, 尾估计

Hölder Continuous of the Solutions to Nonlocal Stochastic Diffusion Equations

Qian Jia*, Wei Wang

College of Mathematical Sciences, Tianjin Normal University, Tianjin

Received: Nov. 7th, 2023; accepted: Dec. 7th, 2023; published: Dec. 18th, 2023

Abstract

In this paper, we aim to obtain the Hölder continuous of solutions to nonlocal stochastic equations. By using Campanato estimates and Sobolev embedding theorem, we first prove the Hölder continuous of the mild solution of nonlocalstochastic diffusion equations in the sense that the solution u belongs to the space $C^\beta(D_T; L^p(\Omega))$. Then by using tail estimates, we obtain the estimates of the mild solution in $L^p(\Omega; C^{\beta^*}(D_T))$.

*通讯作者。

Keywords

Fractional Brownian Motion, Hölder Continuity, L^∞ Estimates, Tail Estimates

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 $T > 0$, $D \subset \mathbb{R}$ 并且 $D_T := [0, T] \times D$. 设 $\{\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}\}$ 是一个给定的过滤概率空间. 文章[1] [2] 获得了 $\mathcal{L}^{p, \theta}((D_T; \delta); L^p(\mathbb{R}))$ 空间(见定义 2.1)的奇异随机积分的正则性, 其中 $p > 1, \theta > 0, \delta > 0$. 进一步, 借助 Sobolev 嵌入定理对于任意的 $\theta > 1$, $\mathcal{L}^{p, \theta}(D; \delta) \mapsto C^\gamma(D_T; L^p(\Omega))$, 获得了在 Hölder 空间 $C^\gamma(D_T; L^p(\Omega))$ ($\gamma = \frac{3(\theta-1)}{p}$) 中解的估计. 本文的目标是得到 $L^p(\Omega; C^\beta(D_T))$ ($\beta = \frac{3(\theta-1)}{p}$) 中解的估计, 我们考虑如下方程

$$du_t = \Delta^\alpha u dt + g(t, x) dB_t^h, u|_{t=0} = 0, \quad (1)$$

其中 $\Delta^\alpha = -(-\Delta)^\alpha$, B_t^h 为具有 Hurst 参数 $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的一维分数布朗运动. 设方程(1)的 mild 解记为

$$\mathcal{K}g(t, x) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(t-r, y) g(r, x-y) dy dB^h(t).$$

非局部扩散方程的起源可以追溯到 1899 年分子间作用力的发现, 分子间作用力的发现打破了牛顿的传统力学体系. 于是, 物理学上的突破也引申到数学上, 与牛顿力学体系对应的是我们熟知的局部扩散方程. 而与分子间作用力对应的方程是非局部扩散方程, 作为微分方程的重要分支, 非局部扩散方程从 20 世纪 70 年代才开始逐步发展并且成熟起来. 非局部扩散方程比很多其他方程有更广泛的应用, 渗透在生物模型, 化学反应模型, 物理模型等各个方面.

让我们首先回顾一下关于随机偏微分方程(SPDE)解的正则性的相关结论. 与确定性抛物方程一样, 随机偏微分方程的正则性研究主要包括两个部分: 一个是 L_p 理论, 另一个是 Schauder 理论(Hölder 连续估计). 关于 L_p 理论的最早结果出现在 Krylov 的[3] [4]中. Kim-Kim [5]考虑了由 Lévy 过程驱动的随机偏微分方程的 L_p 理论. Zhang [6]获得了一般测度空间上半线性随机偏微分方程的 L_p 理论并且[7]证明了确定性非局部抛物偏微分方程的 L_p 极大正则性和 Cauchy 过程驱动的随机微分方程的 Krylov 估计.

分数布朗运动出现在许多复杂现象模型的应用中. 当分数布朗运动的 Hurst 参数 $h = \frac{1}{2}$ 时, 分数布朗运动成为标准布朗运动. 分数布朗运动与标准布朗运动的不同之处在于分数布朗运动缺少半鞅性、马尔可夫性和其他经典的随机过程理论[8]. 分数布朗运动作为一个中心高斯过程, 它的特点是其增量的平稳性和中或长记忆的性质. 长记忆特性使分数布朗运动成为许多领域建模的候选者[9]. 对于与分数布朗运动有关的数学模型是近年来的研究热点. 如 Boufoussi 和 Hajji [10]研究了由分数布朗运动驱动的中立型随机泛函微分方程解的存在唯一性和指数渐近行为; Caraball 等[11]研究了具有分数布朗运动驱动的随机延迟演化方程解的存在性和指数行为; Li 和 Yan [12]讨论了在希尔伯特空间上由分数布朗运动驱动的一类中立随机泛函微分方程的遍历性和平稳解; Xu 等[13]讨论了由分数布朗运动驱动的二阶中立型随机泛

函数微分方程的全局吸引集和指数衰减。

许多作者对随机偏微分方程的 Hölder 估计越来越感兴趣。Hsu 等[14]建立了半线性随机偏微分方程的随机 De Giorgi 迭代和正则性。Du 和 Liu [15]获得了随机偏微分方程解的 Schauder 估计。结合确定性理论和卷积性质, Debussche 等[16]建立了抛物型拟线性随机偏微分方程的正则性结果。Kuksin 等[17]获得了有界域上抛物型随机偏微分方程解的 Hölder 估计。最近, Tian 等[18]利用尾估计获得了非局部随机扩散方程温和解的 Hölder 估计。论文[19]考虑了由布朗运动驱动的非局部随机抛物型偏微分方程的正则性。本文旨在将[19]的结果推广到由 Hurst 参数 $h \in (0, 1/2)$ 的分数布朗运动驱动的抛物型非局部随机偏微分方程的正则性。

2. 预备知识

假设对于 $X = (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $Y = (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 有

$$\delta(X, Y) := \max \left\{ |x - y|, |t - s|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

假设 $Q_c(X)$ 是一个以 $X = (t, x)$ 为圆心, $c > 0$ 为半径的球, 即

$$Q_c(X) := \{Y = (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \delta(X, Y) < c\} = (t - c^2, t + c^2) \times B_c(x).$$

固定任意的 $T \in (0, \infty)$, $\mathcal{O}_T := (0, T) \times \mathbb{R}$ 表示一个光滑的区域。设 D 是一个有界区域 $D \in \mathbb{R}$, 对于一个点 $X \in D_T$, $D(X, r) := D_T \cap Q_r(X)$ 并且 $d(D) = \text{diam}(D)$ 。我们首先介绍 Campanato 空间的定义。

定义 2.1 [20] 设 $p \geq 1$, $\theta \geq 0$ 。如果一个函数 u 满足

$$[u]_{\mathcal{L}^{p, \theta}(D_T; \delta)} = \left(\sup_{X \in D_T, d(D) \geq \rho > 0} \frac{1}{|D(X, \rho)|^\theta} \int_{D(X, \rho)} |u(Y) - u_{X, \rho}|^p dY \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, u \in L^p(D_T),$$

其中 $|D(X, \rho)|$ 表示 Borel 集 $D(X, \rho)$ 的 Lebesgue 测度并且

$$u_{X, \rho} := \frac{1}{|D(X, \rho)|} \int_{D(X, \rho)} u(Y) dY,$$

则称 u 属于 Campanato 空间 $\mathcal{L}^{p, \theta}(D; \delta)$, 该空间为 $L^p(D)$ 的子空间。对于 $u \in \mathcal{L}^{p, \theta}(D_T; \delta)$, 定义

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p, \theta}(D_T; \delta)} := \left(\|u\|_{L^p(D_T)}^p + [u]_{\mathcal{L}^{p, \theta}(D_T; \delta)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

定义 2.2 [19] 设 $0 < \gamma \leq 1$, 如果函数 u 满足

$$[u]_{C^\gamma(\bar{D}_T; \delta)} := \sup_{X \in D_T, d(D) \geq \rho > 0} \frac{|u(X) - u(Y)|}{\delta(X, Y)^\gamma} < \infty,$$

则称 u 属于 Hölder 空间 $C^\gamma(\bar{D}_T; \delta)$ 。对于 $u \in C^\gamma(\bar{D}_T; \delta)$, 定义

$$\|u\|_{C^\gamma(\bar{D}_T; \delta)} := \sup_{D_T} |u| + [u]_{C^\gamma(\bar{D}_T; \delta)}.$$

定义 2.3 设 $D_T \subset \mathbb{R}$ 是一个域, 如果存在 $A > 0$ 使得对于任意的 $X \in D_T$, $0 < \rho \leq d(D)$, 使得 $|D_T(X, \rho)| = |D_T \cap Q_\rho(X)| \geq A|Q_\rho(X)|$, 那么域 D_T 叫做 A -类。

下面是一些符号说明。

给定两个集合 B_1 和 B_2 , 关系 $B_1 = B_2$ 意味着 $B_1 \subset B_2$ 并且 $B_2 \subset B_1$ 。符号 $f(x) \approx g(x)$ 表示有一个独立于 x 的数字 $0 < C < \infty$, 即一个常数, 这样对于每个 x , 我们都有 $C^{-1}f(x) \leq g(x) \leq Cf(x)$ 。然后我们有下面关于上面定义的两个空间的比较的关系。

命题 2.4 设 D_T 是一个有界区域, 则对于任意 $p \geq 1$ 和 $1 < \theta < 1 + \frac{p}{3}$, 有 $L^{p,\theta}(D_T; \delta) \cong C^\gamma(\bar{D}_T; \delta)$, 其中 $\gamma = \frac{3(\theta-1)}{p}$ 。

我们想用尾估计来得到随机偏微分方程的解 u 的有界性结果

$$\mathbb{E}\|u\|_{C^\gamma([0,T] \times D)}^p \leq C, \quad p \geq 1.$$

将使用尾估计和 Hölder 空间与 Campanato 空间之间的等价, 事实上对于任意常数 $M > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(|X|^p\right) &= \int_{\Omega} |X|^p \, d\mathbb{P}(\omega) \\ &= p \int_0^\infty \mathbb{P}\{|X| > a\} a^{p-1} da \\ &= p \int_0^M \mathbb{P}\{|X| > a\} a^{p-1} da + p \int_M^\infty \mathbb{P}\{|X| > a\} a^{p-1} da \\ &\leq M^p + p \int_M^\infty \mathbb{P}\{|X| > a\} a^{p-1} da, \end{aligned}$$

为了得到 L^p 有界性, 根据上面的不等式, 我们只需要证明第二个积分是有界的。

命题 2.5 [21] 设 $u_0 \in L^p(\mathbb{R}, \Omega)$ 。考虑柯西问题

$$\partial_t u(t, x) = \Delta^\alpha u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u(0, x) = u_0(x), \tag{2}$$

那么对于任意的 $0 < \beta < 1$, $\|u(t, \cdot)\|_{C^\beta(\mathbb{R})} \leq Ct^{-\frac{\beta-1}{2\alpha}-\frac{1}{2p\alpha}} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}$, 并且对于任意的 $\tau > 0$,

$$|u(t+\tau, x) - u(t, x)| \leq Ct^{-\beta-\frac{1}{2p\alpha}} \tau^\beta \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

我们回顾一些满足 $K_t = \Delta^\alpha K$ 的核函数 $K(t, x, y)$ 的一些性质(参见[21] [22] [23] [24])。

- 1) 对于任意的 $t > 0$, $\|K(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$;
- 2) 对于每一个 $t > 0$, $K(t, x, y)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 中属于 C^∞ ;
- 3) 对于任意的 $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $K(t, x)$ 的渐进估计为 $|\nabla_x K(t, x, y)| \approx |y-x| \min\left\{\frac{t}{|y-x|^5}, t^{\frac{3}{2}}\right\}$ 。

最后, 我们介绍关于分数布朗运动的维纳积分的一些基本结果。设 $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}\}$ 是一个过滤概率空间。假设 $B^h(t)$, $t \in [0, T]$ 是具有 Hurst 参数 $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的一维分数布朗运动。这意味着 B^h 是一个中心高斯过程, 协方差函数为

$$R_h(t, s) = \mathbb{E}(B_t^h B_s^h) = \frac{1}{2}(t^{2h} + s^{2h} - |t-s|^{2h}),$$

考虑核

$$K_h(t, s) = c_h \left[\left(\frac{t}{s}\right)^{h-\frac{1}{2}} (t-s)^{h-\frac{1}{2}} - \left(h-\frac{1}{2}\right) s^{\frac{1}{2}-h} \int_s^t (u-s)^{h-\frac{1}{2}} u^{h-\frac{3}{2}} du \right], \quad 0 < h < \frac{1}{2}, \quad t > s,$$

其中 $c_h = \sqrt{\frac{\hbar}{(1-2\hbar)\beta\left(1-2\hbar, \hbar + \frac{1}{2}\right)}}$, $\beta(\cdot, \cdot)$ 表示 Beta 函数。如果 $t \leq s$, 则 $K_h(t, s) = 0$ 。由上式可知

$$|K_h(t, s)| \leq 2c_h \left((t-s)^{\hbar-\frac{1}{2}} + s^{\hbar-\frac{1}{2}} \right). \tag{3}$$

由[25]知,

$$\left| \frac{\partial K_h}{\partial t}(t, s) \right| \leq c_h \left(\frac{1}{2} - \hbar \right) (t-s)^{\hbar-\frac{3}{2}}. \tag{4}$$

考虑从 \mathcal{H} 到 $L^2([0, T])$ 的算子 $K_{h,T}^*$ [13],

$$(K_{h,T}^* \varphi)(s) = K_h(T, s)\varphi(s) + \int_s^T (\varphi(r) - \varphi(s)) \frac{\partial K_h}{\partial r}(r, s) dr, \tag{5}$$

则 $K_{h,T}^*$ 是一个 \mathcal{H} 和 $L^2([0, T])$ 之间的等距算子。

考虑 $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$, 定义 $W_t = B^h \left((K_h^*)^{-1} (1_{[0,t]}) \right)$, 则 W 是一个维纳过程, 并且过程 B^h 有积分表示 $B^h(t) = \int_0^t K_h(t, s) dW(s)$ 。此外, 对于任何一个 $\varphi \in \mathcal{H}$, 我们都有

$$\int_0^T \varphi(s) dB^h(s) = \int_0^T (K_h^* \varphi)(t) dW(t). \tag{6}$$

3. Hölder 估计

本文的假设如下:

(H1) 对于任意的 $t, s \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$ 且 $q > 1$, 有 $\int_{\mathbb{R}} |K(t, z) - K(s, z)|^q dz \leq (t-s)^{\gamma_1}$, 其中 γ_1 为一个依赖于 q 的常数。

(H2) 对于任意的 $t, s \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$ 且 $p > 1$, 有 $\int_{\mathbb{R}} |g(t, z) - g(s, z)|^p dz \leq (t-s)^{\gamma_2}$, 其中 γ_2 为一个依赖于 p 的常数。

定理 3.1 设 D 是一个 A-类有界域使得 $\bar{D} \subset \mathcal{O}_T$ 。假设对于 $p > \frac{1}{\alpha}$, $g \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^p(\Omega \times \mathbb{R}))$ 是一个 \mathcal{F}_t 适应过程, $0 < \beta < \alpha$ 且 $(\alpha - \beta)p - 1 \geq 0$ 。(H1)和(H2)成立。则方程(1)存在 mild 解 u , 使得

$u \in \mathcal{L}^{p,\theta}((D_T; \delta); L^p(\Omega)) \cap L^p(\Omega; C^\beta(D_T))$, 且

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}((D_T; \delta); L^p(\Omega))} \leq C \|g\|_{L^\infty([0, T]; L^p(\Omega \times \mathbb{R}))}, \tag{7}$$

$$\|u\|_{C^\beta(D_T; L^p(\Omega))} \leq C \|g\|_{L^\infty([0, T]; L^p(\Omega \times \mathbb{R}))}, \tag{8}$$

其中 $\theta = 1 + \frac{\beta p}{3}$ 。进一步, 取 $0 < \epsilon < \frac{\beta p}{2}$, $q > \frac{3}{\epsilon}$, 对于任意的 $1 < r < q$,

$$\|u\|_{L^r(\Omega; C^{\beta^*}(D_T))} \leq C \|g\|_{L^\infty([0, T]; L^{pq}(\Omega \times \mathbb{R}))}, \tag{9}$$

其中 $\beta^* = \beta - \frac{2\epsilon}{p}$ 。

证明: 在上述假设下方程(1)温和解的存在性是一个经典结果。现在我们证明不等式(7)。由于 Campanato 空间的定义, 只需证明 $\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\theta}((D_T; \delta); L^p(\Omega))}^p < \infty$ 。

首先, 根据定义 2.1 有,

$$\begin{aligned}
 [u]_{L^{p,\theta}(D_T;\delta);L^p(\Omega)}^p &\leq \sup_{D(X,c), X \in D_T, 0 < c \leq d(D)} \frac{1}{|D(X,c)|^{1+\theta}} \mathbb{E} \int_{D(X,c)} \int_{D(X,c)} |u(t,x) - u(s,y)|^p dt dx ds dy \\
 &\leq \sup_{D(X,c), X \in D_T, 0 < c \leq d(D)} \frac{1}{|D(X,c)|^{1+\theta}} \mathbb{E} \int_{D(X,c)} \int_{D(X,c)} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(t-r, x-z) g(r,z) dz dB^h(r) \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^s \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) dz dB^h(r) \right|^p dt dx ds dy \\
 &:= \sup_{D(X,c), X \in D_T, 0 < c \leq d(D)} \frac{1}{|D(X,c)|^{1+\theta}} \int_{D(X,c)} \int_{D(X,c)} \mathbb{E} Y dt dx ds dy.
 \end{aligned}$$

由公式(5)和(6), 有

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} Y &\leq 2^{p-1} \left| \int_0^s \int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz dB^h(r) \right|^p \\
 &\quad + 2^{p-1} \left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) dz dB^h(r) \right|^p \\
 &\leq 2^{p-1} \left| \int_0^s K_h^* \left[\int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz \right] (r) dW(r) \right|^p \\
 &\quad + 2^{p-1} \left| \int_s^t K_h^* \left[\int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) dz \right] (r) dW(r) \right|^p \\
 &\leq 2^{p-1} \left| \int_0^s \left[K_h(s,r) \int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz(r) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_r^s \int_{\mathbb{R}} (K(t-m, x-z) - K(s-m, y-z)) g(m,z) dz(r) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz(r) \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m,r) dm \right] dW(r) \right|^p \\
 &\quad + 2^{p-1} \left| \int_s^t \left[K_h(t,r) \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) dz \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_r^t \int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m,z) dz - \int_{\mathbb{R}} K(t-r, x-z) g(r,z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m,r) dm \right] dW(r) \right|^p \\
 &\leq 2^{2p-2} \left| \int_0^s K_h(s,r) \int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz(r) dW(r) \right|^p \\
 &\quad + 2^{2p-2} \left| \int_0^s \int_r^s \int_{\mathbb{R}} (K(t-m, x-z) - K(s-m, y-z)) g(m,z) dz \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m,r) dm dW(r) \right|^p \\
 &\quad + 2^{2p-2} \left| \int_s^t K_h(t,r) \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) dz dW(r) \right|^p \\
 &\quad + 2^{2p-2} \left| \int_s^t \int_r^t \int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m,z) dz - \int_{\mathbb{R}} K(t-r, x-z) g(r,z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m,r) dm dW(r) \right|^p \\
 &= 2^{2p-2} \left| \int_0^s K_h(s,r) \int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz(r) dW(r) \right|^p \\
 &\quad + 2^{2p-2} \left| \int_0^s \int_r^s \int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m,z) - K(t-r, x-z) g(r,z) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) - K(s-m, y-z) g(m,z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m,r) dm dW(r) \right|^p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2^{2p-2} \left| \int_s^t K_h(t,r) \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) dz dW(r) \right|^p \\
 & + 2^{2p-2} \left| \int_s^t \int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m,z) dz - \int_{\mathbb{R}} K(t-r, x-z) g(r,z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m,r) dm dW(r) \right|^p \\
 = & C_1 \left| \int_0^s \left[K_h(s,r) \int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz(r) \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 & + C_1 \left| \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m,z) - K(t-r, x-z) g(r,z) dz \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) - K(s-m, y-z) g(m,z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m,r) dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 & + C_1 \left| \int_s^t \left[K_h(t,r) \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r,z) dz \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 & + C_1 \left| \int_s^t \left[\int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m,z) dz - \int_{\mathbb{R}} K(t-r, x-z) g(r,z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m,r) dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 := & C_1 (H_1 + H_2 + H_3 + H_4),
 \end{aligned}$$

其中 C_1 为一个常数。下面, 分别估计 H_1, H_2, H_3, H_4 。利用不等式(3)和假设(H1), 有

$$\begin{aligned}
 H_1 = & \left| \int_0^s \left[K_h(s,r) \int_{\mathbb{R}} (K(t-r, x-z) - K(s-r, y-z)) g(r,z) dz(r) \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 \leq & 2^{\frac{p}{2}} \left| \int_0^s |K_h(s,r)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z) - K(s-r, x-z)| \cdot |g(r,z)| dz(r) \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 & + 2^{\frac{p}{2}} \left| \int_0^s |K_h(s,r)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s-r, x-z) - K(s-r, y-z)| \cdot |g(r,z)| dz(r) \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 \leq & 2^{\frac{p}{2}} \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \int_0^s |K_h(s,r)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z) - K(s-r, x-z)|^q dz(r) \right]^{\frac{2}{q}} dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 & + 2^{\frac{p}{2}} \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \int_0^s |K_h(s,r)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s-r, x-z) - K(s-r, y-z)|^q dz(r) \right]^{\frac{2}{q}} dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 \leq & 2^{2p} (C_h)^p C \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \int_0^s [(s-r)^{2h-1} + r^{2h-1}] (t-s)^{2\gamma_1} dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 & + 2^{2p} (C_h)^p C \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R})))}^p |x-y|^{\beta p} \left| \int_0^s (s-r)^{\frac{\beta-1}{\alpha} - \frac{1}{p\alpha}} [(s-r)^{2h-1} + r^{2h-1}] dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 = & 2^{2p} (C_h)^p C \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \hbar^{-\frac{p}{2}} s^{hp} (t-s)^{\gamma_1 p} \\
 & + 2^{2p} (C_h)^p C \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0,T]; L^p(\mathbb{R})))}^p |x-y|^{\beta p} \left| \frac{1}{\alpha - \frac{1}{p\alpha} + 2\hbar} s^{\frac{\beta-1}{\alpha} - \frac{1}{p\alpha} + 2\hbar} + \beta \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{p\alpha}, 2\hbar \right) s^{\frac{\beta-1}{\alpha} - \frac{1}{p\alpha} + 2\hbar} \right|^{\frac{p}{2}}.
 \end{aligned}$$

根据假设(H1), (H2)和公式(4), 有

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \left| \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m, z) - K(t-r, x-z) g(r, z) dz \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r, z) - K(s-m, y-z) g(m, z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq 2^{\frac{p}{2}} \left| \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m, z) - K(t-r, x-z) g(r, z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r, z) - K(s-m, y-z) g(m, z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq 2^p \left| \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} (K(t-m, x-z) - K(t-r, x-z)) g(m, z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} K(t-r, x-z) (g(m, z) - g(r, z)) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} (K(s-r, y-z) - K(s-m, y-z)) g(r, z) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} K(s-m, y-z) (g(r, z) - g(m, z)) dz \right] \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq 2^p \left| \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z) - K(t-m, x-z)| \cdot |g(m, z)| dz \right] \left| \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) \right| dm \right]^2 dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z)| \cdot |g(m, z) - g(r, z)| dz \right] \left| \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) \right| dm \right]^2 dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s-r, y-z) - K(s-m, y-z)| \cdot |g(r, z)| dz \right] \left| \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) \right| dm \right]^2 dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s-m, y-z)| \cdot |g(m, z) - g(r, z)| dz \right] \left| \frac{\partial K_h}{\partial m}(m, r) \right| dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq 2^p (C_h)^p \left| \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z) - K(t-m, x-z)|^q |g(m, z)| dz \right]^{\frac{1}{q}} (m-r)^{h-\frac{3}{2}} dm \right]^2 dr \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z)|^q dz \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(m, z) - g(r, z)|^p dz \right]^{\frac{1}{p}} dm (m-r)^{h-\frac{3}{2}} \right]^2 dr \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s-r, y-z) - K(s-m, y-z)|^q |g(r, z)| dz \right]^{\frac{1}{q}} (m-r)^{h-\frac{3}{2}} dm \right]^2 dr \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^s \left[\int_r^s \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s-m, y-z)|^q dz \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(m, z) - g(r, z)|^p dz \right]^{\frac{1}{p}} (m-r)^{h-\frac{3}{2}} dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^p (C_h)^p \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \frac{1}{\left(\hbar + \gamma_1 - \frac{1}{2}\right)^2 (2\hbar + 2\gamma_1)} s^{2\hbar+2\gamma_1} + \int_0^s \frac{1}{\hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} (t-r)^{\frac{q\alpha-(p-1)}{2q\alpha}} (s-r)^{\hbar+\gamma_2-\frac{1}{2}} dr \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\left(\hbar + \gamma_1 - \frac{1}{2}\right)^2 (2\hbar + 2\gamma_1)} s^{2\hbar+2\gamma_1} + \int_0^s \beta \left(\frac{3q\alpha-(p-1)}{2q\alpha}, \hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2} \right) (s-r)^{\frac{q\alpha-(p-1)}{2q\alpha} + \hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq 2^p (C_h)^p \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \frac{1}{\left(\hbar + \gamma_1 - \frac{1}{2}\right)^2 (2\hbar + 2\gamma_1)} s^{2\hbar+2\gamma_1} + \int_0^t \frac{1}{\hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} (t-r)^{\frac{q\alpha-(p-1)}{2q\alpha} + \hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} dr \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\left(\hbar + \gamma_1 - \frac{1}{2}\right)^2 (2\hbar + 2\gamma_1)} s^{2\hbar+2\gamma_1} + \int_0^s \beta \left(\frac{3q\alpha-(p-1)}{2q\alpha}, \hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2} \right) (s-r)^{\frac{q\alpha-(p-1)}{2q\alpha} + \hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq 2^p (C_h)^p \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \frac{1}{\left(\hbar + \gamma_1 - \frac{1}{2}\right)^2 (2\hbar + 2\gamma_1)} s^{2\hbar+2\gamma_1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} \frac{1}{2q\alpha} \frac{1}{q\alpha - (p-1) + \hbar + \gamma_2 + \frac{1}{2}} t^{\frac{q\alpha-(p-1)}{2q\alpha} + \hbar + \gamma_2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\left(\hbar + \gamma_1 - \frac{1}{2}\right)^2 (2\hbar + 2\gamma_1)} s^{2\hbar+2\gamma_1} \right. \\
 &\quad \left. + \beta \left(\frac{3q\alpha-(p-1)}{2q\alpha}, \hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2q\alpha} \frac{1}{q\alpha - (p-1) + \hbar + \gamma_2 + \frac{1}{2}} s^{\frac{q\alpha-(p-1)}{2q\alpha} + \hbar + \gamma_2 + \frac{1}{2}} \right|^{\frac{p}{2}},
 \end{aligned}$$

其中 $q = \frac{p}{p-1}$ 。因为 $\alpha p > 1$ ，所以 $q\alpha - (p-1) > 0$ 。由公式(3)有

$$\begin{aligned}
 H_3 &= \left| \int_s^t \left[K_h(t, r) \int_{\mathbb{R}} K(s-r, y-z) g(r, z) dz \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq \left| \int_s^t |K_h(t, r)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s-r, y-z)| \cdot |g(r, z)| dz \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \int_s^t |K_h(t, r)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |K(s-r, y-z)|^q dz \right]^{\frac{2}{q}} dr \right|^{\frac{p}{2}} \\
 &\leq 2^{2p} (C_h)^p \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \int_s^t \left((t-r)^{2\hbar-1} + r^{2\hbar-1} \right) (t-r)^{\frac{2q\alpha-(q-1)}{q\alpha}} dr \right|^{\frac{p}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\leq 2^{2p} (C_h)^p \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \frac{1}{\frac{2q\alpha - (q-1)}{q\alpha} + 2\hbar} (t-s)^{\frac{2q\alpha - (q-1)}{q\alpha} + 2\hbar} + \beta \left(2\hbar, \frac{3q\alpha - (q-1)}{q\alpha} \right) t^{\frac{2q\alpha - (q-1)}{q\alpha} + 2\hbar} \right|^{\frac{p}{2}}.$$

利用假设(H1)和公式(4), 有

$$\begin{aligned} H_4 &= \left| \int_s^t \left[\int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} K(t-m, x-z) g(m, z) - K(t-r, x-z) g(r, z) dz \right] \frac{\partial K_{\hbar}}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\ &\leq 2^p \left| \int_s^t \left[\int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} (K(t-m, x-z) - K(t-r, x-z)) g(m, z) dz \right] \frac{\partial K_{\hbar}}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t \left[\int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} K(t-r, x-z) (g(m, z) - g(r, z)) dz \right] \frac{\partial K_{\hbar}}{\partial m}(m, r) dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\ &\leq 2^p \left| \int_s^t \left[\int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z) - K(t-m, x-z)| \cdot |g(m, z)| dz \right] \left| \frac{\partial K_{\hbar}}{\partial m}(m, r) \right| dm \right]^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t \left[\int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z)| \cdot |g(m, z) - g(r, z)| dz \right] \left| \frac{\partial K_{\hbar}}{\partial m}(m, r) \right| dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\ &\leq 2^p (C_h)^p \left| \int_s^t \left[\int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z) - K(t-m, x-z)|^q |g(m, z)| dz \right]^{\frac{1}{q}} (m-r)^{\hbar - \frac{3}{2}} dm \right]^2 dr \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t \left[\int_r^t \left[\int_{\mathbb{R}} |K(t-r, x-z)|^q dz \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\mathbb{R}} |g(m, z) - g(r, z)|^p dz \right]^{\frac{1}{p}} (m-r)^{\hbar - \frac{3}{2}} dm \right]^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \\ &\leq 2^p (C_h)^p \left| \int_s^t \left[\int_r^t (m-r)^{\gamma_1} (m-r)^{\hbar - \frac{3}{2}} dm \right]^2 dr \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t \left[\int_r^t (t-r)^{\frac{q\alpha - (p-1)}{2q\alpha}} (m-r)^{\gamma_2} (m-r)^{\hbar - \frac{3}{2}} dm \right]^2 dr \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^2 \right|^{\frac{p}{2}} \\ &= 2^p (C_h)^p \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \frac{1}{\left(\hbar + \gamma_1 - \frac{1}{2}\right)^2 (2\hbar + 2\gamma_1)} (t-s)^{2\hbar + 2\gamma_1} + \int_s^t \frac{1}{\hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} (t-r)^{\frac{q\alpha - (p-1)}{2q\alpha} + \hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} dr \right|^{\frac{p}{2}} \\ &\leq 2^p (C_h)^p \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p \left| \frac{1}{\left(\hbar + \gamma_1 - \frac{1}{2}\right)^2 (2\hbar + 2\gamma_1)} (t-s)^{2\hbar + 2\gamma_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\hbar + \gamma_2 - \frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{q\alpha - (p-1)}{2q\alpha} + \hbar + \gamma_2 + \frac{1}{2}} (t-s)^{\frac{q\alpha - (p-1)}{2q\alpha} + \hbar + \gamma_2 + \frac{1}{2}} \right|^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

假设 $D(X, c) = D_T \cap Q_c$ 且 $Q_c = Q_c(t_0, x_0)$ 。根据假设 $(t, x) \in Q_c(t_0, x_0)$, $(s, y) \in Q_c(t_0, x_0)$, 有

$$0 \leq t - s \leq 2c^2, \quad |x - y| \leq |x - x_0| + |y - y_0| \leq 2c.$$

由 A-类有界区域的定义, 有

$$[u]_{L^{p,\theta}((D_T;\delta);L^p(\Omega))}^p \leq C_2 \|g\|_{L^p(\Omega;L^\infty([0,T];L^p(\mathbb{R})))}^p,$$

其中 C_2 为一个常数, $\theta = 1 + \frac{\beta p}{3}$, 即不等式(7)成立。因此利用命题 2.1 可以得到不等式(8)。

下面证明不等式(9)。为了使用尾估计, 我们首先考虑以下估计。设 $(t_0, x_0) \in D_T \subset \mathcal{O}_T$ 且

$$Q_c(t_0, x_0) = (t_0 - c^2, t_0 + c^2) \times B_c(x_0),$$

则有 $\bar{D}_T \subset Q_{d(D)}(t_0, x_0)$ 。设 $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in D_T$, $Q_i := D_T \cap Q_{c_i}(t_i, x_i), i = 1, 2$ 并且

$$F(t_i, x_i, c_i) = \frac{1}{|Q_i|^{1+\theta}} \int_{Q_i} \int_{Q_i} |u(t, x) - u(s, y)|^p dt dx ds dy = \frac{1}{|Q_i|^{1+\theta}} \int_{Q_i} \int_{Q_i} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy.$$

显然

$$\begin{aligned} F(t_1, x_1, c_1) - F(t_2, x_2, c_2) &= [F(t_1, x_1, c_1) - F(t_2, x_1, c_1)] \\ &\quad + [F(t_2, x_1, c_1) - F(t_2, x_2, c_1)] \\ &\quad + [F(t_2, x_2, c_1) - F(t_2, x_2, c_2)] \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{10}$$

对于 I_1 ,

$$\begin{aligned} I_1 &= F(t_1, x_1, c_1) - F(t_2, x_1, c_1) \\ &= \frac{1}{|Q_1|^{1+\theta}} \int_{Q_1} \int_{Q_1} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy \\ &= \frac{1}{|Q_1|^{1+\theta}} \int_{Q_1} \int_{Q_1} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy - \frac{1}{|Q_{12}|^{1+\theta}} \int_{Q_{12}} \int_{Q_{12}} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy \\ &= \frac{1}{|Q_1|^{1+\theta}} \left\{ \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy - \int_{Q_{12} \setminus Q_1} \int_{Q_{12} \setminus Q_1} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy \right\} \\ &\quad + \left[\frac{1}{|Q_1|^{1+\theta}} - \frac{1}{|Q_{12}|^{1+\theta}} \right] \int_{Q_{12}} \int_{Q_{12}} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy \\ &:= I_{11} + I_{12}, \end{aligned}$$

其中 $Q_{12} = D_T \cap Q_{c_1}(t_2, x_1)$ 。为简单起见, 我们假设 $|Q_1| \geq |Q_{12}|$ 。相反的, 我们可以改变 Q_1 和 Q_{12} 的位置。因此 $I_{12} \leq 0$ 。现在考虑 I_{11} 这一项。在给出 I_{11} 的估计之前, 我们首先回顾一下我们的目标。为了应用尾部估计, 我们希望得到 I_{11} 的估计, 即存在 $\delta > 0$, 使得 $\mathbb{E}I_{11} \leq C(t_1 - t_2)^\delta$ 。显然

$$|Q_1 \setminus Q_{12}| \leq C(t_1 - t_2)c_1, \quad |Q_1| \approx Cc_1^3.$$

假设 $t > s$, 则

$$\mathbb{E} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy = \mathbb{E} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} \mathbb{E}Y dt dx ds dy.$$

类似不等式(7)的证明有

$$\mathbb{E}Y \leq Cc_1^{\beta p} \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p.$$

因为 $(t, x) \in Q_1$, $(s, y) \in Q_1$, 所以 $0 \leq t - s \leq 2c_1^2$, $|x - y| \leq |x - x_1| + |y - x_1| \leq 2c_1$, 利用上述不等式和 A-类有界区域的性质有

$$\mathbb{E} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} \mathbb{E}Y dt dx ds dy \leq C(p, T) c_1^{\beta p} |Q_1 \setminus Q_{12}|^2 \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p.$$

因为 D_T 是一个 A-类有界区域, 所以 $2c_1 \leq |D|$,

$$\begin{aligned} A|Q_{c_1}(t_1, x_1)| &\leq |Q_1| \leq |Q_{c_1}(t_1, x_1)|, \\ A|Q_{c_1}(t_1, x_1) \setminus Q_{c_1}(t_2, x_1)| &\leq |Q_1 \setminus Q_{12}| \leq |Q_{c_1}(t_1, x_1) \setminus Q_{c_1}(t_2, x_1)|. \end{aligned}$$

注意到

$$|Q_{c_1}(t_1, x_1)| \approx Cc_1^3, |Q_{c_1}(t_1, x_1) \setminus Q_{c_1}(t_2, x_1)| \leq Cc_1 [c_1^2 \wedge (t_1 - t_2)],$$

其中 C 是一个不依赖于 c_1 的正常数。显然 $Q_1 \setminus Q_{12} \subset Q_1$, 取 $0 < \delta < \frac{\beta p}{2}$ 有

$$\mathbb{E} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} \int_{Q_1 \setminus Q_{12}} |\mathcal{K}g(t, x) - \mathcal{K}g(s, y)|^p dt dx ds dy \leq C(C_0, D, T) \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p |Q_1|^{2 + \frac{\beta p - 2\delta}{3}} |t_1 - t_2|^\delta.$$

类似地, 我们可以得到

$$\mathbb{E} \int_{Q_{12} \setminus Q_1} \int_{Q_{12} \setminus Q_1} |u(t, x) - u(s, y)|^p dt dx ds dy \leq C(D, T) \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p |Q_1|^{2 + \frac{\beta p - 2\delta}{3}} |t_1 - t_2|^\delta.$$

由 $I_{12} \leq 0$ 有

$$\mathbb{E}I_1 \leq C(D, T) \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p |t_1 - t_2|^\delta, \tag{11}$$

其中 $\theta = 1 + \frac{\beta p - 2\delta}{3}$ 。

接下来我们估计 I_2 。利用事实

$$|[D \cap Q_{c_1}(t_2, x_1)] \setminus [D \cap Q_{c_1}(t_2, x_2)]| \leq Cc_1^2 |x_1 - x_2|,$$

类似于 I_1 的估计, 可以取 $0 < \delta < \frac{\beta p}{2}$ 使得

$$\mathbb{E}I_2 = \mathbb{E}[F(t_2, x_1, c_1) - F(t_2, x_2, c_1)] \leq C(D, T) \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p |x_1 - x_2|^\delta, \tag{12}$$

其中 $\theta = 1 + \frac{\beta p - \delta}{3}$ 。

下面估计 I_3 。利用事实

$$|[D \cap Q_{c_1}(t_2, x_2)] \setminus [D \cap Q_{c_2}(t_2, x_2)]| \leq Cc_1^2 (c_1 - c_2), \quad c_1 \geq c_2,$$

类似于 I_1 的估计有

$$\mathbb{E}I_3 = \mathbb{E}[F(t_2, x_2, c_1) - F(t_2, x_2, c_2)] \leq C(D, T) \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^p |c_1 - c_2|^\delta, \tag{13}$$

其中 $\theta = 1 + \frac{\beta p - \delta}{3}$ 。因此根据公式(10), (11), (12)和(13), 有

$$\mathbb{E}|F(t_1, x_1, c_1) - F(t_2, x_2, c_2)|^q \leq C(D, T) \|g\|_{D^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^{\rho q} (|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| + |c_1 - c_2|)^{\delta q},$$

其中 $\theta = 1 + \frac{\beta p - 2\delta}{3}$, $(t_i, x_i) \in D_T$ 且 $0 < c_i \leq |D|, i = 1, 2$ 。

设 $D_T = [0, 1]^2$, $c \in [0, 2]$ 。引入一系列集合,

$$\mathcal{S}_n = \left\{ z \in \mathbb{Z}^3 \mid z2^{-n} \in (0, 1)^2 \times (0, 2) \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

对于任意的 $e = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{Z}^3$ 使得 $|e|_\infty = \max_{1 \leq i \leq 3} |e_i| = 1$, 并且对于任意的 $z, z + e \in \mathcal{S}_n$, 定义 $v_z^{n,e} = |F((z + e)2^{-n}) - F(z2^{-n})|$ 。从上面的讨论, 可以得到

$$\mathbb{E}|v_z^{n,e}|^q \leq C(\beta, C_0, D, T) \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R})))}^{\rho q} 2^{-n\delta q} := \hat{C}2^{-n\delta q}.$$

对于任意的 $\tau > 0, K > 0$,

$$\mathcal{A}_{z,\tau}^{n,e} = \left\{ \omega \in \Omega \mid v_z^{n,e} \geq K\tau^n, z, z + e \in \mathcal{S}_n \right\},$$

从而

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_{z,\tau}^{n,e}) \leq \frac{\mathbb{E}|v_z^{n,e}|^q}{K^q \tau^{qn}} \leq \frac{\hat{C}2^{-nq}}{K^q \tau^{qn}}.$$

对于每一个 n , 事件的总数 $\mathcal{A}_{z,\tau}^{n,e}, z, z + e \in \mathcal{S}_n$ 不大于 $2^3 3^3$ 。因此并集为

$$\mathcal{A}_\tau^n = \bigcup_{z, z+e \in \mathcal{S}_n} \left(\bigcup_{\|e\|_\infty=1} \mathcal{A}_{z,\tau}^{n,e} \right),$$

并集的概率为

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_\tau^n) \leq \frac{\hat{C}2^{-n\delta q}}{K^q \tau^{qn}} 2^{3n} \leq \hat{C}K^{-q} \left(\frac{2^3}{(2^\delta \tau)^q} \right)^n.$$

设 $\tau = 2^{-v\delta}$, 其中 $v > 0$ 且 $(1-v)\delta q \geq 3$ 。事件 $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{A}_\tau^n$ 发生的概率为

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) \leq C\hat{C}K^{-q}. \tag{14}$$

对于任意一点 $\xi = (t, x, c) \in (0, 1)^2 \times (0, 2)$ 有 $\xi = \sum_{i=0}^\infty e_i 2^{-i}$ ($\|e_i\|_\infty \leq 1$), $\xi_k = \sum_{i=0}^k e_i 2^{-i}$ 且 $\xi_0 = 0$ 。对于任意的 $\omega \notin \mathcal{A}$, $|F(\xi_{k+1}) - F(\xi_k)| < K\tau^{k+1}$, 这意味着

$$|F(t, x, c)| \leq \sum_{k=0}^\infty |F(\xi_{k+1}) - F(\xi_k)| < K \sum_{k=1}^\infty \tau^k \leq K(2^{v\delta} - 1)^{-1}. \tag{15}$$

设 $v_1 = \sup_{(t,x,c) \in (0,1)^2 \times (0,2)} |F(t, x, c)|$, 由于 F 是连续的, 则 $v_1 = \sup_{(t,x,c) \in (0,1)^2 \times (0,2)} |F(t, x, c)|$ 。对于 $0 < r < q$,

$$\mathbb{E}v_1^r = r \int_0^\infty a^{r-1} \mathbb{P}(v_1 \geq a) da = r \int_0^{\gamma K} a^{r-1} \mathbb{P}(v_1 \geq a) da + r \int_{\gamma K}^\infty a^{r-1} \mathbb{P}(v_1 \geq a) da. \tag{16}$$

选择 $\gamma \geq (2^{v\delta} - 1)^{-1}$, 利用(14), (15)和(16)有

$$\mathbb{E}v_1^r \leq (\gamma K)^r + C\hat{C}^q r \int_{\gamma K}^\infty a^{r-1-q} da \leq (\gamma K)^r + C\hat{C}r(cK)^{r-q},$$

从而

$$\mathbb{E}v_1^r \leq C(D, d, T) \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R}^d)))}^{pr},$$

如果选择 $K = \|g\|_{L^p(\Omega; L^\infty([0, T]; L^p(\mathbb{R}^d)))}$ 。通过使用嵌入不等式 $L^p(\Omega; \mathcal{L}^{p, \theta}(D_T; \delta)) \cong L^p(\Omega; C^\gamma(\bar{D}_T; \delta))$, 得到不等式(9)。

4. 总结

本文利获得了非局部随机扩散方程解的 Hölder 连续性。首先利用 Campanato 估计证明了非局部随机扩散方程的温和解的 Hölder 连续性, 即解 u 属于空间 $C^\beta(D_T; L^p(\Omega))$, 其中 β 为确定的 Hölder 连续指数。其次, 通过使用尾估计和 Sobolev 嵌入定理得到了 $L^p(\Omega; C^{\beta^*}(D_T))$ 中温和解的估计。更重要的是, 我们在 β 和 β^* 两个指数之间给出了一个明确的公式。

基金项目

天津师范大学研究生科研创新项目资助(2022KYCX114Y)。

参考文献

- [1] Kim, I. (2015) A BMO Estimate for Stochastic Singular Integral Operators and Its Application to SPDEs. *Journal of Functional Analysis*, **269**, 1289-1309. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.05.015>
- [2] Lv, G., Gao, H., Wei, J. and Wu, J.L. (2019) BMO and Morrey-Campanato Estimates for Stochastic Convolutions and Schauder Estimates for Stochastic Parabolic Equations. *Differential Equations*, **266**, 2666-2717. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.08.042>
- [3] Krylov, N.V. (1999) An Analytic Approach to SPDEs. In: *Stochastic Partial Differential Equations: Six Perspectives*, Vol. 64, AMS, Providence, 185-242. <https://doi.org/10.1090/surv/064/05>
- [4] Krylov, N.V. (1996) On L_p -Theory of Stochastic Partial Differential Equations in the Whole Space. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **27**, 313-340. <https://doi.org/10.1137/S0036141094263317>
- [5] Kim, I. and Kim, K.H. (2016) An L_p -Theory for Stochastic Partial Differential Equations Driven by Lévy Processes with Pseudo-Differential Operators of Arbitrary Order. *Stochastic Processes and their Applications*, **126**, 2761-2786. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2016.03.001>
- [6] Zhang, X. (2006) L_p -Theory of Semi-Linear SPDEs on General Measure Spaces and Applications. *Journal of Functional Analysis*, **239**, 44-75. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.01.014>
- [7] Zhang, X. (2013) L^p -Maximal Regularity of Nonlocal Parabolic Equations and Applications. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C*, **30**, 573-614. <https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2012.10.006>
- [8] Duncan, T.E., Pasik-Duncan, B. and Maslowski, B. (2002) Fractional Brownian Motion and Stochastic Equations in Hilbert Spaces. *Stochastics and Dynamics*, **2**, 225-250. <https://doi.org/10.1142/S0219493702000340>
- [9] Comte, F. and Renault, E. (1996) Long Memory Continuous Time Models. *Journal of Econometrics*, **73**, 101-149. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(95\)01735-6](https://doi.org/10.1016/0304-4076(95)01735-6)
- [10] Boufoussi, B. and Hajji, S. (2012) Neutral Stochastic Functional Differential Equations Driven by a Fractional Brownian Motion in a Hilbert Space. *Statistics and Probability Letters*, **82**, 1549-1558. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2012.04.013>
- [11] Caraballo, T., Garrido-Atienza, M.J. and Taniguchi, T. (2011) The Existence and Exponential Behavior of Solutions to Stochastic Delay Evolution Equations with a Fractional Brownian Motion. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **74**, 3671-3684. <https://doi.org/10.1016/j.na.2011.02.047>
- [12] Li, Z. and Yan, L. (2019) Ergodicity and Stationary Solution for Stochastic Neutral Retarded Partial Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion. *Journal of Theoretical Probability*, **32**, 1399-1419. <https://doi.org/10.1007/s10959-018-0810-8>
- [13] Xu, L., Li, Z. and Luo, J. (2017) Global Attracting Set and Exponential Decay of Second-Order Neutral Stochastic Functional Differential Equations Driven by fBm. *Advances in Difference Equations*, **2017**, Article No. 134. <https://doi.org/10.1186/s13662-017-1186-2>
- [14] Hsu, E.P., Wang, Y. and Wang, Z. (2017) Stochastic De Giorgi Iteration and Regularity of Stochastic Partial Differential Equations. *The Annals of Probability*, **45**, 2855-2866. <https://doi.org/10.1214/16-AOP1126>

-
- [15] Du, K. and Liu, J. (2016) A Schauder Estimate for Stochastic PDEs. *Comptes Rendus Mathematique*, **354**, 371-375. <https://doi.org/10.1016/j.crma.2016.01.010>
- [16] Debussche, A., De Moor, S. and Hofmanová, M. (2015) A Regularity Result for Quasilinear Stochastic Partial Differential Equations of Parabolic Type. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **47**, 1590-1614. <https://doi.org/10.1137/130950549>
- [17] Kuksin, S.B., Nadirashvili, N.S. and Piatnitski, A.L. (2003) Hölder Estimates for Solutions of Parabolic SPDEs. *Theory of Probability and Its Applications*, **47**, 157-163. <https://doi.org/10.1137/S0040585X97979524>
- [18] Tian, R., Ding, L., Wei, J. and Zheng, S. (2019) Hölder Estimates of Mild Solutions for Nonlocal SPDEs. *Advances in Difference Equations*, **2019**, Article No. 159. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2097-1>
- [19] Lv, G., Gao, H., Wei, J. and Wu, J.L. (2023) On the Campanato and Hölder Regularity of Local and Nonlocal Stochastic Diffusion Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, **28**, 1244. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2022119>
- [20] Chen, Y.Z. (2003) Second Order Parabolic Partial Differential Equations. Peking University Press, Beijing.
- [21] Bogdan, K. and Jakubowski, T. (2007) Estimates of Heat Kernel of Fractional Laplacian Perturbed by Gradient Operators. *Communications in Mathematical Physics*, **271**, 179-198. <https://doi.org/10.1007/s00220-006-0178-y>
- [22] Bogdan, K., Stós, A. and Sztonyk, P. (2003) Harnack Inequality for Stable Processes on d-Sets. *Studia Mathematica*, **158**, 163-198. <https://doi.org/10.4064/sm158-2-5>
- [23] Chen, Z.Q. and Hu, E. (2015) Heat Kernel Estimates for $\Delta + \Delta^\alpha/2$ under Gradient Perturbation. *Stochastic Processes and Their Applications*, **125**, 2603-2642. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2015.02.016>
- [24] Imbert, C. (2005) A Non-Local Regularization of First Order Hamilton-Jacobi Equations. *Journal of Differential Equations*, **211**, 218-246. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2004.06.001>
- [25] Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B. and Zhang, T. (2008) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. Springer Science and Business Media, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-797-8>