Statistical and Application 统计学与应用, 2013, 2, 61-63
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2013.23008 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/sa.html)

A Bivariate Probability Model Based on the F-G-M Copula

Feng Gao

Faculty of Mathematics and Physics, Huaiyin Institute of Technology, Huaian
Email: hagaofeng000000@163.com

Received: Jul. 29th, 2013; revised: Aug. 6th, 2013; accepted: Aug. 18th, 2013

Abstract: In this paper, a bivariate probability model based on the F-G-M copula is derived by improving the weaker component of the F-G-M bivariate exponential distribution. The reliability of the series system after improving the weaker conponent is computed by using this model.

Keywords: F-G-M Copula; F-G-M Bivariate Exponential Distribution; Weaker Component; Reliability

基于 F-G-M Copula 的一个二元概率模型

高　峰

淮阴工学院数理学院，淮安
Email: hagaofeng000000@163.com

收稿日期：2013 年 7 月 29 日；修回日期：2013 年 8 月 6 日；录用日期：2013 年 8 月 18 日

摘　要：本文通过对 F-G-M 二元指数分布的弱成分进行改进，得到了一个基于 F-G-M Copula 的二元概率模型，利用这个模型，讨论了弱成分改进后的串联系统可靠度。

关键词：F-G-M Copula；F-G-M 二元指数分布；弱成分；可靠度

1. 引言

二元 copula 函数是定义在区域$I^2=[0,1]\times[0,1]$上的以标准均匀分布为边缘分布的一个二元分布函数，记为$C(u,v)$；具体而言，$C(u,v)$应该满足下面三个条件[1]：

1) $C(u,0)=C(0,v)=0,\quad \forall u\in[0,1],\forall v\in[0,1]$；

2) $C(u,1)=u,C(1,v)=v,\quad \forall u\in[0,1],\forall v\in[0,1]$；

3) 若$0\le u_1\le u_2\le 1, 0\le v_1\le v_2\le 1$，则有
$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1)\ge 0$。

二元copula在研究二元连续型概率模型中具有重要作用，Sklar 定理为其奠定了重要的基础，Sklar 定理表明，任一具有联合分布函数$H(x,y)$和边缘分布$F(x),G(y)$的二维随机变量(X,Y)，一定存在一个二元 copula 函数$C(u,v)$，使得$H(x,y)=C(F(x),G(y))$；其次，度量二维随机变量相依性的三个秩相关系数 Kendell 的τ，Spearman 的ρ，Gini 的γ，都等于$C(u,v)$的二重积分表达式，因此，借助于$C(u,v)$，我们可以把二维随机变量(X,Y)的相依性信息从联合分布函数$H(x,y)$中抽象出来，同时也为构造具有共同相依关系而边缘不同的二元分布提供了一种有效的途径。所以 copula 的产生使得人们能够以新的视角来研究二维随机变量，比如可以应用 copula 来研究和、积、商的分布[2]。

F-G-M copula[3]是一个常用的二元 copula，定义

为：

$$C_\alpha^{FGM}(u,v)=uv\left[1+\alpha(1-u)(1-v)\right],\quad -1\le\alpha\le 1 \quad (1)$$

由于其 Spearman 秩相关系数 $\rho=\frac{\alpha}{3}\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$，所以可以用来建模弱相依性的二元模型。

若取边缘为 $X\sim\mathrm{Exp}\{\lambda_1\},Y\sim\mathrm{Exp}\{\lambda_2\}$，$\mathrm{Exp}\{\lambda\}$ 表示参数为 λ 的指数分布，则边缘分布函数为：

$$F(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\quad x>0,\quad G(y)=1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\quad y>0$$

利用 Sklar 定理，由 $C_\alpha^{FMG}(u,v)$ 可产生一个二元分布：

$$\begin{aligned}H(x,y)=&\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\right)\\&\times\left(1+\alpha\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}\right),\quad x>0,y>0\end{aligned}\quad (2)$$

该分布称为 F-G-M 二元指数分布，其中分布参数 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,-1\le\alpha\le 1$。

记 $X>_r Y$ 表示随机变量 X 随机大于 Y [4]，即满足：

1) $P(X\ge z)\ge P(Y\ge z),\forall z\in R$，
2) 存在一个 $a\in R$，使得当 $z\ge a$，有

$$P(X\ge z)>P(Y\ge z)。$$

定义[5]：设 (X,Y) 的联合概率累积分布函数为 $H(x,y)$，若 $Y>_r X$，则称 X 为分布 $H(x,y)$ 的弱成分。

分布的弱成分具有如下的实际意义：弱成分对应的元件可靠度比较低，因此在此元件上备份一个同类元件，可以提高系统的可靠度。“备份”是提高系统可靠性的一个常用手段，它是在原来的元件上并联一个或多个同类元件，并联线路上装有开关，当原来的元件失效时，开关自动闭合，第一个备份元件开始工作，以此类推。

在分析两元件串联系统或并联系统的可靠性时，常常假设元件的工作是相互独立的；但是独立性的假设并非总是符合实际情况的，系统的功能结构和工作环境，常常会导致元件的工作具有某种相依结构，这时系统的建模就要使用二元概率模型，常用的二元概率模型有 Marshall-Olkin 二元指数分布、F-G-M 二元指数分布等。

现考察一两元件串联系统，设两元件的寿命 (X,Y) 服从 F-G-M 二元指数分布(2)，则当 $t>0$ 时，

$$\begin{aligned}&P(Y\ge t)>P(X\ge t)\\&\Leftrightarrow\exp\{-\lambda_2 t\}>\exp\{-\lambda_1 t\}\Leftrightarrow\lambda_1>\lambda_2\end{aligned}$$

所以，X 为弱成分等价于 $\lambda_1>\lambda_2$，本文后面总是假设 $\lambda_1>\lambda_2$ 成立的。

为了提高系统的使用寿命，我们在弱成分 X 对应的元件上备份一个同型元件，设其寿命为 X_0，则 X_0 与 X 独立同分布，记 $X^*=X+X_0$，此时系统的使用寿命为 $T^*=\min(X^*,Y)$，它取决于 (X^*,Y) 的联合分布。

本文研究 (X^*,Y) 的联合分布，并且以此为基础，研究了弱成分改进后的串联系统的可靠度情况。

2. 主要结果

2.1. (X^*,Y)的联合分布

(X^*,Y) 的相依性未变，即仍然服从 F-G-M copula (1)，由于 X_0 与 X 独立同分布于 $\mathrm{Exp}\{\lambda_1\}$，而 $\mathrm{Exp}\{\lambda_1\}=Ga(1,\lambda_1)$，利用 Gamma 分布的可加性，有

$$X^*=X+X_0\sim Ga(2,\lambda_1)$$

其分布函数为

$$F_{X^*}(x)=1-(1+\lambda_1 x)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\quad x>0$$

于是 (X^*,Y) 的联合分布为

$$\begin{aligned}H_*(x.y)&=C_\alpha^{FGM}\left[F_{X^*}(x),G(y)\right]\\&=F_{X^*}(x)G(y)+\alpha F_{X^*}(x)\left[1-F_{X^*}(x)\right]G(y)\left[1-G(y)\right]\\&=\left[1-(1+\lambda_1 x)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right]\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\right)+\alpha(1+\lambda_1 x)\\&\quad\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\left[1-(1+\lambda_1 x)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right]\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\right)\\&\qquad x>0,y>0;-1\le\alpha\le 1,\lambda_1>\lambda_2>0\end{aligned}\quad (3)$$

2.2. 弱成分带备份的串联系统的可靠度

为方便计算具有相依结构的系统的可靠度，我们利用联合生存函数的概念，设 (X,Y) 具有联合分布函数 $H(x,y)$，边缘分布为 $F(x)$ 和 $G(y)$，则其联合生存函数定义为[1]：

$$\bar{H}(x,y)=P(X>x,Y>y)=1-F(x)-G(y)+H(x,y)$$

设弱成分带备份的串联系统寿命为 T^*，可靠度为

$R^*(t)$，则

$$T^* = \min\left(X^*, Y\right), \quad R^*(t) = P\left(T^* > t\right)$$

由于$\left(X^*, Y\right)$的联合生存分布为

$$\begin{aligned}
\bar{H}_*(x.y) &= 1 - F_{X^*}(x) - G(y) + H_*(x.y) \\
&= \left(1+\lambda_1 x\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} + \left[1-\left(1+\lambda_1 x\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right]\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\right) \\
&\quad + \alpha\left(1+\lambda_1 x\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\left[1-\left(1+\lambda_1 x\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right] \\
&\quad \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\right) - 1 \qquad x>0, y>0
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
R^*(t) &= P\left(X^* > t, Y > t\right) = \bar{H}_*(t,t) \\
&= \left(1+\lambda_1 t\right)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\left\{1+\alpha\left[1-\left(1+\lambda_1 t\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\right]\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{4}$$

2.3 可靠度的比较

下面我们来研究串联系统与弱成分带备份的串联系统的可靠度的比较。

对于原串联系统，两元件的寿命$\left(X, Y\right)$服从 F-G-M 二元指数分布(2)，系统的寿命与可靠度分布为$T = \min\left(X, Y\right), R = P\left(T > t\right)$，由于$\left(X, Y\right)$的生存函数为：

$$\begin{aligned}
\bar{H}(x,y) &= \mathrm{e}^{-\lambda_1 x} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 y} + \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\right) \\
&\quad \cdot\left(1+\alpha \mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}\right) - 1, \quad x>0, y>0; -1\le\alpha\le 1
\end{aligned}$$

所以

$$R(t) = \bar{H}(t,t) = \left[1+\alpha\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)\right]\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \tag{5}$$

由(4)(5)两式得

$$\begin{aligned}
\Delta R(t) &= R^*(t) - R(t) \\
&= \lambda_1 t \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\left\{1+\alpha\left[1-\left(2+\lambda_1 t\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\right]\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)\right\} \\
&= \lambda_1 t \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\delta(t)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= 1+\alpha\left[1-\left(2+\lambda_1 t\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\right]\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right) \\
&= 1+\alpha\left[1-\varphi(t)\right]\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)
\end{aligned}$$

此处$\varphi(t) = \left(2+\lambda_1 t\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}$。由于当$t>0$时，$\varphi'(t)<0, \varphi(0)=2, \varphi(+\infty)=0$，所以$0<\varphi(t)<2$，因此$\delta(t)>0 \Rightarrow R_*(t) > R(t)$，即弱成分带备份的串联系统的可靠度大于原串联系统的可靠度，改进量为$\lambda_1 t \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\left\{1+\alpha\left[1-\left(2+\lambda_1 t\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\right]\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)\right\}$。

参考文献 (References)

[1] R. B. Nelson. An introduction to copulas. New York: Springer, 2006.

[2] 高峰, 刘绪庆. 随机变量的和、积、商分布的一种新表示[J]. 大学数学, 2012, 28(3): 119-122.

[3] C. Amblard, S. Girard. A new extension of bivariate FGM copulas. Metrika, 2009, 70: 1-17.

[4] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京: 科学出版社, 1981.

[5] 高峰, 刘绪庆. Weaker component test of MOBVE Distribution with censored data. Recent Advance in Statistics Application and Related Areas-Conference Proceedings of 2009 International Institute of Applied Statistics Studies, Riverwood: Aussino Academic Publishing House, 2009: 2720-2724.