

Finite-Time Consensus for Leader-Following Second-Order Multi-Agent Systems

Zhichao Li

Department of Mathematics, School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing
Email: lizhichao0522@sina.com

Received: Aug. 30th, 2016; accepted: Sep. 13th, 2016; published: Sep. 20th, 2016

Copyright © 2016 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In recent years, with the wide application of distributed networks and multi-agent systems, coordination and control problems have become a hot spot of research in related fields. In this paper, the finite-time consensus problems for leader-following second-order multi-agent systems are studied. Firstly, a class of nonlinear finite-time tracking control protocol is proposed, based on state feedbacks containing full information of position and velocity. Secondly, under the fixed and undirected network topology containing a spanning tree, with the help of Lyapunov stability theory and homogeneity theory, we prove that the control protocol enables each agent in the system to reach an agreement with the leader in finite time. Then, we expand the current protocol. Based on the dynamic output feedback with only relative position information, we propose the corresponding control protocol and prove its finite-time consistency. Finally, using Matlab to simulate the two kind of protocol, we prove the effectiveness of our results.

Keywords

Second-Order Multi-Agent, Finite-Time Consensus, Leader, Lyapunov Stability, Homogeneity Theory

带领航者的二阶多智能体系统的有限时间一致性

李智超

北京工商大学理学院数学系, 北京

Email: lizhichao0522@sina.com

收稿日期: 2016年8月30日; 录用日期: 2016年9月13日; 发布日期: 2016年9月20日

摘要

近年来, 随着分布式网络和多智能体系统的广泛应用, 协调控制问题成为了相关领域的研究热点。本文研究了带领航者的二阶多智能体系统的有限时间一致性问题。首先, 基于包含完整位置和速度信息的状态反馈, 提出了一类非线性有限时间控制协议。其次, 在含有生成树的固定无向网络拓扑结构下, 利用Lyapunov稳定性理论和齐次性理论, 证明了该控制协议能够使系统中的各智能体在有限时间内与领航者的状态达到一致。然后, 在上述协议的基础上进行了拓展。基于只包含位置信息的动态输出反馈, 给出了相应的控制协议, 并证明了其有限时间一致性。最后, 利用Matlab分别对以上两种协议进行了数值仿真, 证明了结论的有效性。

关键词

二阶多智能体, 有限时间一致, 领航者, Lyapunov稳定性, 齐次理论

1. 引言

近年来, 随着分布式网络和多智能体系统的广泛应用, 协调控制问题成为了相关领域的研究热点。一致性作为协调控制的基础, 具有很强的现实意义和理论价值。然而, 关于有限时间一致性问题, 大多数文献仅仅局限于一阶多智能体系统, 对于二阶或更高阶的系统却很少有涉及。文献[1]提出了一类二阶多智能体有限时间跟踪控制协议, 本文仿照其方法对原文的控制协议进行了推广, 使之具有更强适的适用性。

2. 预备知识

2.1. 图论

图论是研究多智能体行为方式的重要工具。对于一个多智能体系统, 每个智能体都可看作是一个节点, 相邻智能体之间的信息传递关系都可看作是一条边, 因此我们可以很方便的运用有向图或无向图来模拟多智能体系统的通信关系。

称 $G = \langle V, E, A \rangle$ 为一个加权有向图, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示图 G 的顶点集, 顶点 v_i 表示第 i 个智能体, $E \subseteq V \times V$ 表示图 G 的边集, A 表示权重邻接矩阵。记图 G 的一条有向边为一个有向对 $(v_i, v_j) \in E$, 有向边 (v_i, v_j) 表示智能体 j 能够接收到智能体 i 发来的信息。如果是无向图则表示智能体 j 和智能体 i 之间能够接收到彼此的状态信息。智能体 j 是智能体 i 的一个邻居当且仅当智能体 i 能够接收到智能体 j 发送的信息。将第 i 个智能体的所有邻居集合记为 $N_i = \{j \in V \mid (v_j, v_i) \in E\}$ 。一列有序边 $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ 叫做顶点 v_1 到 v_k 的一条有向路径。如果一个图中有一个节点到其它任意一个节点都有一条有向路径, 则称此图包含有向生成树。一个图称作是强连通的, 如果任意两个不同的节点之间都有一条有向路径。对于无向图, 如果任意的两个节点之间都有一条路径, 那么此图称作是连通的。

$A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$ 称为图 G 的权重邻接矩阵, 其中 $a_{ij} \geq 0$ 。如果 $j \in N_i$, 即图 G 中含有有向边 (v_j, v_i) , 则邻接矩阵 A 中 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。此外, 由于不考虑自环, 我们假设对于 $\forall i \in 1, 2, \dots, N$ 有 $a_{ii} = 0$ 。

对于无向图, 如果存在一条边 (v_j, v_i) , 则邻接矩阵 A 中 $a_{ij} = a_{ji} > 0$ 。顶点 i 的入度和出度分别定义为 $\deg_{in}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 和 $\deg_{out}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ 。图 G 是一个平衡图当且仅当每个顶点的入度和出度相等, 即 $\deg_{in}(i) = \deg_{out}(i)$, $\forall i \in 1, 2, \dots, N$ 。显然, 无向图是一个平衡图。

图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L = D - A$; 其中度矩阵 $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 是对角元为 $d_i = \deg_{in}(i)$, 其它元为零的对角矩阵。即有 $L = [l_{ij}]$, $l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i \\ \sum_{j=1}^N a_{ij}, & j = i \end{cases}$ 。对于无向图 G , 其的拉普拉斯矩阵 L 为一个对称矩阵。

定理 2.1.1. [2] 如果 $G = \{V, E, A\}$ 是一个无向连通图, 那么图 G 的拉普拉斯矩阵 $L(A)$ 是一个对称半正定矩阵, $L(A)$ 有 n 个实特征值, 它们以如下的升序排列: $0 = \lambda_1(L) < \lambda_2(L) \leq \dots \leq \lambda_n(L) = \lambda_{\max}$ 。

定理 2.1.2. [2] 若无向图连通, 对于向量 $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$, $b_i \geq 0$, $b \neq 0$, 那么矩阵 $L(A) + \text{diag}(b)$ 是正定的。

2.2. 代数

定理 2.2.1. [3] 正定矩阵一定是非奇异的。

定理 2.2.2. [4] 设状态空间方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$, 引入坐标变换矩阵 P , 且 $\det P \neq 0$, 则变换后的系统与原系统有相同的特征多项式和特征值, 即通过非退化线性替换后, 系统稳定性保持不变。

2.3. 稳定性理论

考虑下列非线性系统

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2-1)$$

式中 $x \in R^n$ 为状态向量, $t \geq 0$ 是连续时间变量。

定义 2.3.1. 如果式(2-1)中对所有的 $t \geq 0$ 满足 $f(x^*, t) = 0$, 则称 x^* 是系统(2-1)的一个平衡点。

我们可以通过一个简单的变换可以将系统(2-1)的平衡点 x^* 平移至原点而不改变其稳定性, 因此我们假设 $x = 0$ 为系统(2-1)的平衡点。

直观地说, 如果式(2-1)的初始状态 $x_0(t)$ 在原点的邻域内, 其运动轨迹 $x(t)$ 最终也能保持在原点适当小的邻域内, 则称 $x = 0$ 是系统(2-1)的稳定平衡点。

定义 2.3.2. [5] (Lyapunov 意义下的稳定性) 如果对任意给定的 $t_0 \geq 0$, 及任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, 使当任一 x_0 满足

$$\|x_0\| \leq \delta$$

时, 系统(2-1)的由初始条件 $x(t_0) = x_0$ 确定的解 $x(t)$ 均有

$$\|x(t)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0$$

则称系统(2-1)的平衡点 $x = 0$ 是稳定的。

定义 2.3.3. [5] (渐近稳定性) 如果系统(2-1)的平衡点 $x = 0$ 是稳定的且是吸引的, 即对所有的 $t_0 \geq 0$, 存在 $\delta(t_0) > 0$ 使得

$$x_0 < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

则称平衡点 $x = 0$ 为渐近稳定的。

定理 2.3.1. [5] 对于系统方程(2-1), 如果存在正定函数 $V(x, t)$, 且 $V(x, t)$ 沿系统(2-1)解的轨迹对时间 t 的导数满足:

$$\dot{V}(x,t) < 0$$

且连续, 则称系统(2-1)的平衡点 $x=0$ 是稳定的。

定理 2.3.2. 设系统的状态方程为

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^n$$

如果存在一个标量函数 $V(x)$ 具有一阶偏导数, 并且满足: 1) $V(x)$ 为正定; 2) $\dot{V}(x)$ 为半负定; 3) 除去 $x=0$ 外, 对 $x \neq 0$, $\dot{V}(x)$ 不恒为零; 那么原点平衡状态是渐近稳定的。如果进一步还有当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x) \rightarrow \infty$, 则系统是大范围渐近稳定的。

2.4. 有限时间稳定性

定义 2.4.1. [6] 考虑下列非线性系统

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^n \quad (2-2)$$

其中 $f: R^n \rightarrow R^n$, $f = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$ 是一个连续向量集。令 $(r_1, \dots, r_n)^T \in R^n$, $r_i > 0, i = 1, \dots, n$ 。 $f(x)$ 被称为与带有扩张 (r_1, \dots, r_n) 的度 $k \in R$ 是同质或齐次的, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$f_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall x \in R^n$$

系统(2-2)被称为齐次的, 如果 $f(x)$ 是齐次的。

定理 2.4.1. [7] 考虑下列非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \hat{f}(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in R^n \quad (2-3)$$

其中 $f(x)$ 是一个连续向量集且与带有扩张 (r_1, \dots, r_n) 的度 $k < 0$ 是齐次的, $\hat{f}(0) = 0$ 。假设 $x=0$ 是系统 $\dot{x} = f(x)$ 的一个渐进稳定平衡点。那么 $x=0$ 是系统(2-3)的一个局部有限时间稳定平衡点, 如果

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{f}_i(\varepsilon^{r_1} x_1, \dots, \varepsilon^{r_n} x_n)}{\varepsilon^{k+r_i}} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall x \neq 0$$

定理 2.4.2. [7] 如果满足定理 2.4.1 的稳定平衡点 $x=0$ 在系统(2-3)上是全局渐进稳定的, 那么 $x=0$ 是系统(2-3)的全局有限时间稳定平衡点。

定理 2.4.3. [8] 如果齐次系统的度 $k < 0$, 那么 $x=0$ 是该系统的有限时间稳定平衡点, 当且仅当系统 $x=0$ 渐进稳定。

3. 带领导者的二阶多智能体系统的有限时间一致性

3.1. 系统描述

本章我们主要考虑由 1 个领导者和 N 个跟随者组成的多智能体系统。其中 0 表示多智能体系统中的领导者, $i = 1, 2, \dots, n$ 表示跟随者。假设领导者的运动状态是独立的, 不受其他节点的影响, 而每个跟随者的运动状态则要受到领导者和其他跟随者的共同影响。

我们用 x_i 表示智能体的位置状态, 用 v_i 表示智能体的速度状态。下面给出多智能体系统在连续时间下的模型表述:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = u_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \\ \dot{v}_0 = 0 \end{cases} \quad (3-2)$$

其中 $x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n$ 分别表示跟随者的位置和速度状态; x_0 和 v_0 分别表示领导者的位置和速度状态。为简单起见, 我们对(3-1) (3-2)的拓扑结构作如下假设:

假设(1)跟随者之间的通讯网络拓扑是固定无向的。

假设(2)领导者在无向网络中全局可达。

分析带领导者的二阶多智能体有限时间一致性问题, 即是要找到一个合适的控制协议 $u_i(t)$ 使得:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} (x_0(t) - x_i(t)) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow T} (v_0(t) - v_i(t)) = 0 \end{cases}, \quad 0 < t < T$$

$$\begin{cases} x_0(t) - x_i(t) = 0 \\ v_0(t) - v_i(t) = 0 \end{cases}, \quad t \geq T$$

3.2. 基于状态反馈下的多智能体有限时间一致性

在各个智能体位置和速度信息已知的情况下, 我们给出控制协议如下:

$$u_i(t) = -l_1 \varphi_1 \left[\text{sig} \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} (x_i - x_j) \right)^{\alpha_1} \right] - l_2 \varphi_2 \left[\text{sig} \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} (v_i - v_j) \right)^{\alpha_2} \right] \quad (3-3)$$

其中 $l_1, l_2 > 0$ 为系统的反馈增益; α_1, α_2 为待定参数; $\varphi_k(x)$ 为奇函数, 且在原点处可线性化, 有 $\varphi_k(x) = c_k x + o(x)$, $a_k > 0, k = 1, 2$ 。

将控制协议(3-3)带入系统(3-1)中有:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = -l_1 \varphi_1 \left[\text{sig} \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} (x_i - x_j) \right)^{\alpha_1} \right] - l_2 \varphi_2 \left[\text{sig} \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} (v_i - v_j) \right)^{\alpha_2} \right] \end{cases} \quad (3-4)$$

为了表示跟随者能够追上领导者, 我们定义误差变量 \tilde{x}_i 和 \tilde{v}_i 如下:

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = x_i - x_0 \\ \tilde{v}_i = v_i - v_0 \end{cases} \quad (3-5)$$

将其求到后带入(3-2) (3-4)有:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i(t) = \tilde{v}_i(t) \\ \dot{\tilde{v}}_i(t) = -l_1 \varphi_1 \left[\text{sig} \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) \right)^{\alpha_1} \right] - l_2 \varphi_2 \left[\text{sig} \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) \right)^{\alpha_2} \right] \end{cases} \quad (3-6)$$

由于从(3-4)到(3-6)作的是一次非退化线性变换(3-5), 根据定理 2.2.2.可知, 系统(3-6)与系统(3-4)有相同的特征值。所以, 证明系统(3-6)的有限时间一致性即能说明原系统的有限时间一致性。

定理 3.2.1.在假设 1 和假设 2 下, 控制协议(3-3)能够使系统(3-1) (3-2)实现有限时间一致, 如果 $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1}$ 。

证明:

令 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T$, $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)^T$, $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)$

$$\Phi(x) = [\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)]^T, \quad \text{sig}(x) = [\text{sign}(x_1)|x_1|, \dots, \text{sign}(x_n)|x_n|]^T$$

$$\int_0^x(s) ds = \left[\int_0^{x_1}(s) ds, \dots, \int_0^{x_n}(s) ds \right]^T, \quad |x| = [|x_1|, \dots, |x_n|]^T$$

$$L = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^n a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{10} & & & \\ & a_{20} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n0} \end{bmatrix}$$

为简便起见, 将系统(3-6)用向量表示为:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{v}(t) \\ \dot{\tilde{v}}(t) = -l_1 \Phi_1 \left[\text{sig}((L+B)\tilde{x})^{\alpha_1} \right] - l_2 \Phi_2 \left[\text{sig}((L+B)\tilde{v})^{\alpha_2} \right] \end{cases} \quad (3-7)$$

作线性变换, 令

$$\begin{cases} X = (L+B)\tilde{x} \\ Y = (L+B)\tilde{v} \end{cases}$$

对其求导, 并带入(3-7)中有:

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -l_1 (L+B)\Phi_1 \left(\text{sig}(X)^{\alpha_1} \right) - l_2 (L+B)\Phi_2 \left(\text{sig}(Y)^{\alpha_2} \right) \end{cases} \quad (3-8)$$

由定理 2.1.2.知, 在假设 1 和假设 2 下, $L+B$ 为一正定矩阵, 又由定理 2.2.1.知正定矩阵是非奇异的, 因此从系统(3-7)到(3-8)的线性变换是非退化的。根据定理 2.2.2, 系统(3-6) (3-7) (3-8)有着相同的稳定性。因此, 我们可以通过证明系统(3-8)的有限时间一致性来说明系统(3-1) (3-2)的有限时间一致性。

对系统(3-8)选取相应的 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} Y^T Y + l_1 (L+B) \int_0^X \Phi_1(\text{sig}(s)^{\alpha_1}) ds$$

易知, 当 $Y \neq 0$ 时, $Y^T Y > 0$, 又 $\Phi_1(x)$ 和 $\text{sig}(x)^{\alpha_1}$ 都为奇函数, 因此 X 与 $\Phi_1(\text{sig}(X)^{\alpha_1})$ 同号, 所以当 $X \neq 0$ 时, $\int_0^X \Phi_1(\text{sig}(s)^{\alpha_1}) ds > 0$ 。因此有 $V_1 > 0$ 。对 V_1 沿着(3-8)的轨迹求导可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{1}{2} Y^T \dot{Y} + \frac{1}{2} \dot{Y}^T Y + l_1 \dot{X}^T (L+B) \Phi_1(\text{sig}(X)^{\alpha_1}) \\ &= Y^T \dot{Y} + l_1 Y^T (L+B) \Phi_1(\text{sig}(X)^{\alpha_1}) \\ &= Y^T \left[-l_1 (L+B) \Phi_1(\text{sig}(X)^{\alpha_1}) - l_2 (L+B) \Phi_2(\text{sig}(Y)^{\alpha_2}) \right] \\ &\quad + l_1 Y^T (L+B) \Phi_1(\text{sig}(X)^{\alpha_1}) \\ &= -l_2 Y^T (L+B) \Phi_2(\text{sig}(Y)^{\alpha_2}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

注意, 当 $\dot{V}_1 \equiv 0$ 时有 $Y \equiv 0$, 又当 $Y \equiv 0$ 时有,

$$\dot{Y} \equiv -l_1 (L+B) \Phi_1(\text{sig}(X)^{\alpha_1}) - l_2 (L+B) \Phi_2(\text{sig}(Y)^{\alpha_2}) \equiv 0 \Rightarrow X \equiv 0$$

由定理 2.3.2.知系统(3-8)是渐进稳定的。

因为奇函数 $\Phi_k(x)$ 在原点附近有 $\Phi_k(x) = c_k x + o(x)$ 的性质, 因此在原点的邻域附近系统(3-8)可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -l_1 c_1 (L+B) \text{sig}(X)^{\alpha_1} - l_2 c_2 (L+B) \text{sig}(Y)^{\alpha_2} + \hat{f}(X, Y) \end{cases} \quad (3-9)$$

其中 $\hat{f}(X, Y) = o(\text{sig}(X)^{\alpha_1}) + o(\text{sig}(Y)^{\alpha_2})$ 。

提取系统(3-9)的线性部分有:

$$\begin{cases} \dot{X} = Y \\ \dot{Y} = -l_1 c_1 (L+B) \text{sig}(X)^{\alpha_1} - l_2 c_2 (L+B) \text{sig}(Y)^{\alpha_2} \end{cases} \quad (3-10)$$

对系统(3-10)选取相应的 Lyapunov 函数:

$$V_2 = \frac{1}{2} Y^T Y + \frac{l_1 c_1}{1 + \alpha_1} (L+B) |X|^{1 + \alpha_1} > 0$$

对 V_2 沿着(3-10)的轨迹求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \frac{1}{2} Y^T \dot{Y} + \frac{1}{2} \dot{Y}^T Y + l_1 c_1 \dot{X}^T (L+B) \text{sig}(X)^{\alpha_1} \\ &= Y^T \dot{Y} + l_1 c_1 Y^T (L+B) \text{sig}(X)^{\alpha_1} \\ &= Y^T \left[-l_1 c_1 (L+B) \text{sig}(X)^{\alpha_1} - l_2 c_2 (L+B) \text{sig}(Y)^{\alpha_2} \right] \\ &\quad + l_1 c_1 Y^T (L+B) \text{sig}(X)^{\alpha_1} \\ &= -l_2 c_2 Y^T (L+B) \text{sig}(Y)^{\alpha_2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

注意, 当 $\dot{V}_2 \equiv 0$ 时有 $Y \equiv 0$, 又当 $Y \equiv 0$ 时有,

$$\dot{Y} \equiv -l_1 c_1 (L+B) \text{sig}(X)^{\alpha_1} - l_2 c_2 (L+B) \text{sig}(Y)^{\alpha_2} \equiv 0 \Rightarrow X \equiv 0$$

由定理 2.3.2. 知系统(3-10)是渐进稳定的。

下面证明系统(3-10)的齐次性。

根据齐次性定义 2.4.1.

$$\begin{cases} \varepsilon^{r_2} Y = \varepsilon^{r_1 + k} Y \\ (L+B) \left[-l_1 c_1 \text{sig}(\varepsilon^{r_1} X)^{\alpha_1} - l_2 c_2 \text{sig}(\varepsilon^{r_2} Y)^{\alpha_2} \right] = \varepsilon^{r_2 + k} (L+B) \left[-l_1 c_1 \text{sig}(X)^{\alpha_1} - l_2 c_2 \text{sig}(Y)^{\alpha_2} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = r_1 + k \\ r_1 \alpha_1 = r_2 + k \\ r_2 \alpha_2 = r_2 + k \end{cases}$$

根据条件 $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1}$, 可以解得, $r_1 = 2$, $r_2 = 1 + \alpha_1$, $k = \alpha_1 - 1 < 0$, 因此系统(3-10)是与带有扩张 $(2 \cdot \mathbf{1}_n^T, (1 + \alpha_1) \cdot \mathbf{1}_n^T)$ 的度 $k = \alpha_1 - 1 < 0$ 是齐次的。

因为 $\hat{f}(X, Y) = o(\text{sig}(X)^{\alpha_1}) + o(\text{sig}(Y)^{\alpha_2})$, 所以 $\hat{f}(0, 0) = o(\text{sig}(0)^{\alpha_1}) + o(\text{sig}(0)^{\alpha_2}) = 0$

又因为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\text{sig}(\varepsilon^{\alpha_1} X)^{\alpha_1}) + o(\text{sig}(\varepsilon^{\alpha_2} Y)^{\alpha_2})}{\varepsilon^{k+\alpha_2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{o(\text{sig}(\varepsilon^2 X)^{\alpha_1}) + o(\text{sig}(\varepsilon^{1+\alpha_1} Y)^{\alpha_2})}{\varepsilon^{2\alpha_1}} = 0$$

由于系统(3-10)在原点处渐进稳定, 且与带有扩张 $(2 \cdot \mathbf{1}_n^T, (1+\alpha_1) \cdot \mathbf{1}_n^T)$ 的度 $k = \alpha_1 - 1 < 0$ 是齐次的。又因 $\hat{f}(0) = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\varepsilon^{\alpha_1} X, \varepsilon^{\alpha_2} Y)}{\varepsilon^{k+\alpha_2}} = 0$ 。根据定理 2.4.1. 系统(3-9)在原点处局部有限时间稳定。

由于前面证得原点是系统(3-8)在原点处全局渐进稳定, 因此由定理 2.4.2 知, 原点是系统(3-8)的一个全局有限时间稳定平衡点。即可得到系统(3-1) (3-2)在控制协议(3-3)下有限时间一致。证毕。

3.3. 基于输出反馈下的多智能体有限时间一致性

在实际中, 我们不一定能够得到位置和速度信息的完整状态反馈, 因此设计一个基于输出反馈的控制算法具有很强的现实意义。下面类似于[7], 我们给出一种在速度信息缺失情况下的控制协议。

$$\begin{cases} u_i = -l_1 \varphi_1(\text{sig}(\theta_i)^{\alpha_1}) - l_2 \varphi_2(\text{sig}(\eta_i)^{\alpha_2}) \\ \dot{\theta}_i = \eta_i - l_3 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_1} \\ \dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (u_i - u_j) + a_{i0} u_i - l_4 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_2} \end{cases} \quad (3-11)$$

$$\begin{cases} p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_i - x_j) + a_{i0} (x_i - x_0) \\ q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (v_i - v_j) + a_{i0} (v_i - v_0) \end{cases} \quad (3-12)$$

其中 $l_j > 0, j = 1, 2, 3, 4$ 为系统的反馈增益; $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1, \sigma_2$ 为待定参数; $\theta_i, \eta_i \in R^n$ 为系统状态, 用于估计辅助变量 p_i 和 q_i ; 辅助变量 p_i 和 q_i 分别表示第 i 个智能体与其他智能体之间的相对位置和相对速度。 $\varphi_k(x)$ 为奇函数, 且在原点处可线性化, 有 $\varphi_k(x) = c_k x + o(x)$, $a_k > 0, k = 1, 2$ 。

注意: 控制协议(3-11)并没有出现速度的相对状态 q_i , 因此它能够适用于速度信息不可测的多智能体系统。

将(3-11)带入系统(3-1)有:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = -l_1 \varphi_1(\text{sig}(\theta_i)^{\alpha_1}) - l_2 \varphi_2(\text{sig}(\eta_i)^{\alpha_2}) \end{cases} \quad (3-13)$$

其中:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \eta_i - l_3 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_1} \\ \dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (u_i - u_j) + a_{i0} u_i - l_4 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_2} \end{cases} \quad (3-14)$$

对(3-12)求导后带入(3-1)(3-2)有:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = q_i \\ \dot{q}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} (u_i - u_j) + a_{i0} u_i \end{cases} \quad (3-15)$$

继续引用前文提到的误差变量 \tilde{x}_i 和 \tilde{v}_i

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = x_i - x_0 \\ \tilde{v}_i = v_i - v_0 \end{cases}$$

对其求导后带入(3-1)(3-2)(3-13)有:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = -l_1 \varphi_1(\text{sig}(\theta_i)^{\alpha_1}) - l_2 \varphi_2(\text{sig}(\eta_i)^{\alpha_2}) \end{cases} \quad (3-16)$$

其中:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = \eta_i - l_3 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_1} \\ \dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(u_i - u_j) + a_{i0}u_i - l_4 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_2} \end{cases}$$

由于从(3-13)到(3-16)作的是一次非退化线性变换,因此我们只需证明系统(3-16)的有限时间一致性即能说明系统(3-13)的有限时间一致性。

定理 3.3.1. 在假设 1 和假设 2 下,控制协议(3-11)能够使系统(3-1) (3-2)实现有限时间一致, 如果 $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 = \frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}$, $0 < \sigma_2 < 1$, $\sigma_1 = \frac{1+\sigma_2}{2}$ 。

证明:

令

$$\begin{cases} \tilde{p}_i = \theta_i - p_i \\ \tilde{q}_i = \eta_i - q_i \end{cases}$$

对其求导并带入(3-14)(3-15)中有:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}}_i = \eta_i - l_3 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_1} - q_i \\ \dot{\tilde{q}}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(u_i - u_j) + a_{i0}u_i - l_4 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_2} - \sum_{j=1}^n a_{ij}(u_i - u_j) - a_{i0}u_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{p}}_i = \tilde{q}_i - l_3 \text{sig}(\tilde{p}_i)^{\sigma_1} \\ \dot{\tilde{q}}_i = -l_4 \text{sig}(\tilde{p}_i)^{\sigma_2} \end{cases} \quad (3-17)$$

下面,我们先证明系统(3-17)的在零点处的有限时间稳定性。若得证,则有 $\theta_i = p_i$, $\eta_i = q_i$ ($t \geq T$ 时)成立。

令 $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)^T$, $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n)^T$,

$$\text{sig}(x) = [\text{sign}(x_1)|x_1|, \dots, \text{sign}(x_n)|x_n|]^T, \quad |x| = [|x_1|, \dots, |x_n|]^T$$

将(3-17)写成向量形式有:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = \tilde{q} - l_3 \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_1} \\ \dot{\tilde{q}} = -l_4 \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_2} \end{cases} \quad (3-18)$$

对于系统(3-18),构造 Lyapunov 函数有:

$$V(\tilde{p}, \tilde{q}) = l_4 |\tilde{p}|^{\sigma_2+1} + \frac{1+\sigma_2}{2} \tilde{q}^T \tilde{q} > 0$$

对正定标量函数 $V(\tilde{p}, \tilde{q})$ 沿着系统(3-18)的轨迹求导

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\tilde{p}, \tilde{q}) &= l_4(\sigma_2 + 1)\tilde{p}^T \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_2} + \frac{(\sigma_2 + 1)}{2}(\dot{\tilde{q}}^T \tilde{q} + \tilde{q}^T \dot{\tilde{q}}) \\
&= l_4(\sigma_2 + 1)(\tilde{q} - l_3 \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_1})^T \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_2} + (\sigma_2 + 1)\tilde{q}^T \dot{\tilde{q}} \\
&= l_4(\sigma_2 + 1)\tilde{q}^T \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_2} - l_3 l_4(\sigma_2 + 1) \left[\text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_1} \right]^T \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_2} \\
&\quad - l_4(\sigma_2 + 1)\tilde{q}^T \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_2} \\
&= -l_3 l_4(\sigma_2 + 1) \left[\text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_1} \right]^T \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_2}
\end{aligned}$$

由于 $l_3, l_4 > 0$, $\text{sig}(p)$ 为奇函数, 因此有 $\left[\text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_1} \right]^T \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_2} \geq 0$, 所以 $\dot{V}(\tilde{p}, \tilde{q}) \leq 0$ 。

当 $\dot{V}(\tilde{p}, \tilde{q}) = 0$ 时有 $\tilde{p} = 0$, $\dot{\tilde{p}} = \dot{\tilde{q}} - l_3 \text{sig}(\tilde{p})^{\sigma_1} = 0$, 因此 $\tilde{q} = 0$ 。由定理 2.3.2 知系统(3-18)是渐进稳定的。

由齐次性定义 2.4.1., 令

$$\begin{cases} \varepsilon^{r_2} \tilde{q} - l_3 \text{sig}(\varepsilon^{r_1} \tilde{p})^{\sigma_1} = \varepsilon^{r_1+k} \tilde{q} - l_3 \text{sig}(\varepsilon^{r_1+k} \tilde{p})^{\sigma_1} \\ -l_4 \text{sig}(\varepsilon^{r_1} \tilde{p})^{\sigma_2} = -l_4 \text{sig}(\varepsilon^{r_2+k} \tilde{p})^{\sigma_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_2 = r_1 + k \\ r_1 \sigma_1 = r_1 + k \\ r_1 \sigma_2 = r_2 + k \end{cases}$$

根据条件 $0 < \sigma_2 < 1$, $\sigma_1 = \frac{1+\sigma_2}{2}$, 可以解得, $r_1 = \frac{1}{\sigma_1}$, $r_2 = 1$, $k = \frac{\sigma_2 - 1}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2 - 1}{1 + \sigma_2} < 0$, 因此系统(3-18)

是与带有扩张 $\left(\frac{1}{\sigma_1} \cdot \mathbf{1}_n^T, 1 \cdot \mathbf{1}_n^T \right)$ 的度 $k = \frac{\sigma_2 - 1}{\sigma_1} - 1$ 是齐次的, 由定理 2.4.3 知, 系统(3-18)在是有限时间稳定的。

因此, 我们得到在 $t \geq T$ 时, $\theta_i = p_i$, $\eta_i = q_i$, 将其带入(3-13)有:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = \tilde{v}_i \\ \dot{\tilde{v}}_i = -l_1 \varphi_1 \left(\text{sig}(p_i)^{\alpha_1} \right) - l_2 \varphi_2 \left(\text{sig}(q_i)^{\alpha_2} \right), \quad t \geq T \end{cases} \quad (3-19)$$

再将(3-12)带入(3-19)有:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i(t) = \tilde{v}_i(t) \\ \dot{\tilde{v}}_i(t) = -l_1 \varphi_1 \left[\text{sig} \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} (\tilde{x}_i - \tilde{x}_j) \right)^{\alpha_1} \right] - l_2 \varphi_2 \left[\text{sig} \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} (\tilde{v}_i - \tilde{v}_j) \right)^{\alpha_2} \right], \quad t \geq T \end{cases} \quad (3-20)$$

相同于定理 3.2.1 的证明, 我们可以得到系统(3-20)在原点处是有限时间一致的。因此, 系统(3-1)(3-2)在控制协议(3-11)下能够实现有限时间一致, 即定理 3.3.1 得证。

4. 数值仿真

4.1. 状态反馈下的控制协议仿真实验

考虑有 1 个领导者和 4 个跟随者的多智能体系统, 其无向网络拓扑结构如图 1。其中节点 0 表示领导者, 节点 $i(i=1,2,3,4)$ 表示跟随者。规定节点 i 能收到节点 j 的信息时 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。因此上图的邻接矩阵、拉普拉斯矩阵, 以及领导者与跟随者的关系矩阵分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

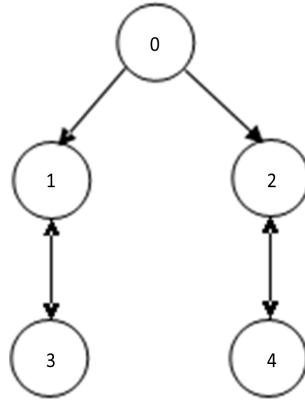


Figure 1. Network topology structure
图 1. 网络拓扑结构图

我们设定跟随者的初始状态为:

$$\begin{aligned} (x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0))^T &= (60, -90, 30, -10)^T \\ (v_1(0), v_2(0), v_3(0), v_4(0))^T &= (-80, 60, -20, 30)^T \end{aligned}$$

领导者的初始状态为 $x_0(0) = 40$, $v_0(0) = 10$, 且对任意时刻 $t \geq 0$ 有 $v_0(t) = v_0(0)$ 。

为方便起见, 我们选取 $\varphi_k(x) = x$, 得到如下控制协议:

$$u_i(t) = -l_1 \text{sig}\left(\sum_{j=0}^n a_{ij}(x_i - x_j)\right)^{\alpha_1} - l_2 \text{sig}\left(\sum_{j=0}^n a_{ij}(v_i - v_j)\right)^{\alpha_2}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4-1)$$

对于协议(4-1)我们令 $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 2\alpha_1/(1+\alpha_1) = 0.3333$, $l_1 = l_2 = 1$, 运用 matlab 软件进行数值仿真, 得到该多智能体系统的位置轨迹和速度轨迹如图 2、图 3。

图中红色曲线代表领导者的运动轨迹, 其他色曲线代表跟随者的运动轨迹。由图像轨迹我们可以得到, 在控制协议(4-1)下, 跟随者能在有限时间内追上领导者, 即系统实现有限时间一致。

当我们令 $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 2\alpha_1/(1+\alpha_1) = 0.6667$, $l_1 = l_2 = 1$ 时, 得到新的运动轨迹如图 4、图 5。

对比图 2, 图 3 与图 4, 图 5 可以知道, 当 α_1 取值越大时, 跟随者能够更快的收敛到与领导者相同的位置和速度状态, 系统实现有限时间一致。

4.2. 输出反馈下的控制协议仿真实验

考虑有 1 个领导者和 5 个跟随者的多智能体系统, 其无向网络拓扑结构如图 6。其中节点 0 表示领导者, 节点 $i(i=1,2,3,4,5)$ 表示跟随者。规定节点 i 能收到节点 j 的信息时 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。因此上图的邻接矩阵、拉普拉斯矩阵, 以及领导者与跟随者的关系矩阵分别为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

我们设定跟随者的初始状态为:

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0), x_5(0))^T = (30, -60, 10, -20, -30)^T$$

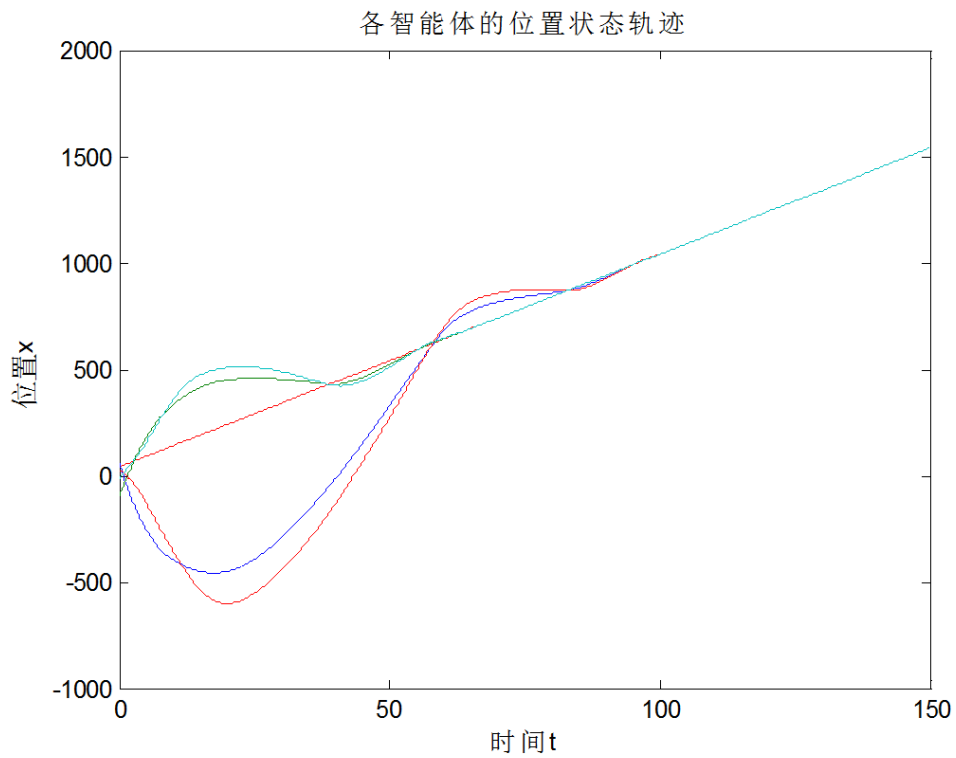


Figure 2. The position of each agent state trajectory
图2. 各智能体的位置状态轨迹

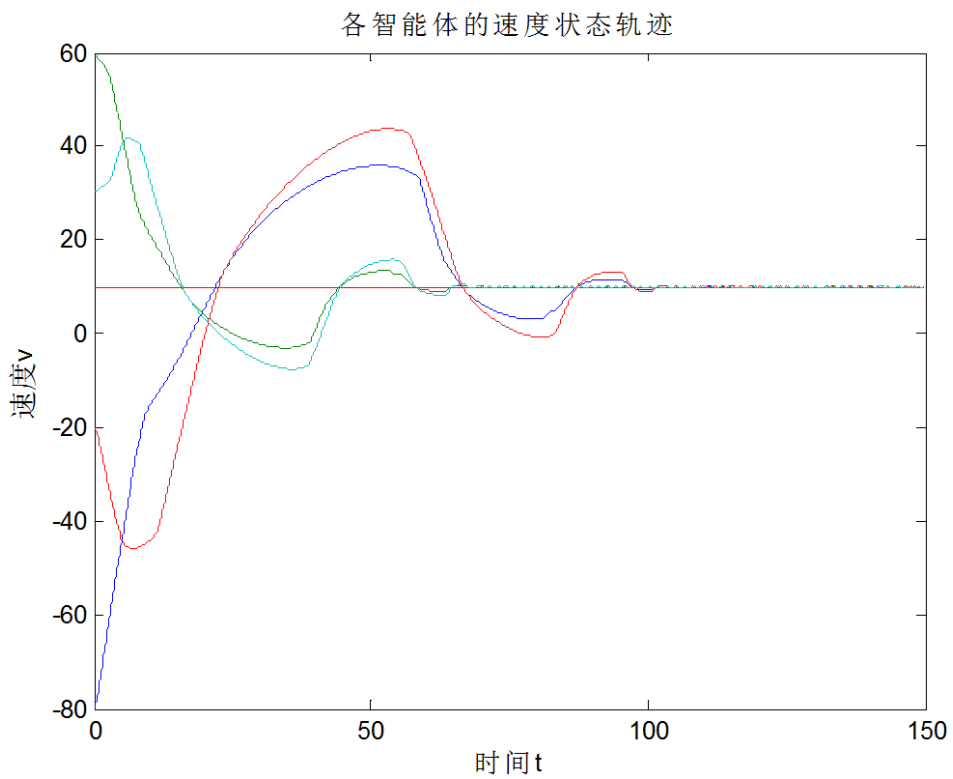


Figure 3. The speed of each agent state trajectory
图3. 各智能体的速度状态轨迹

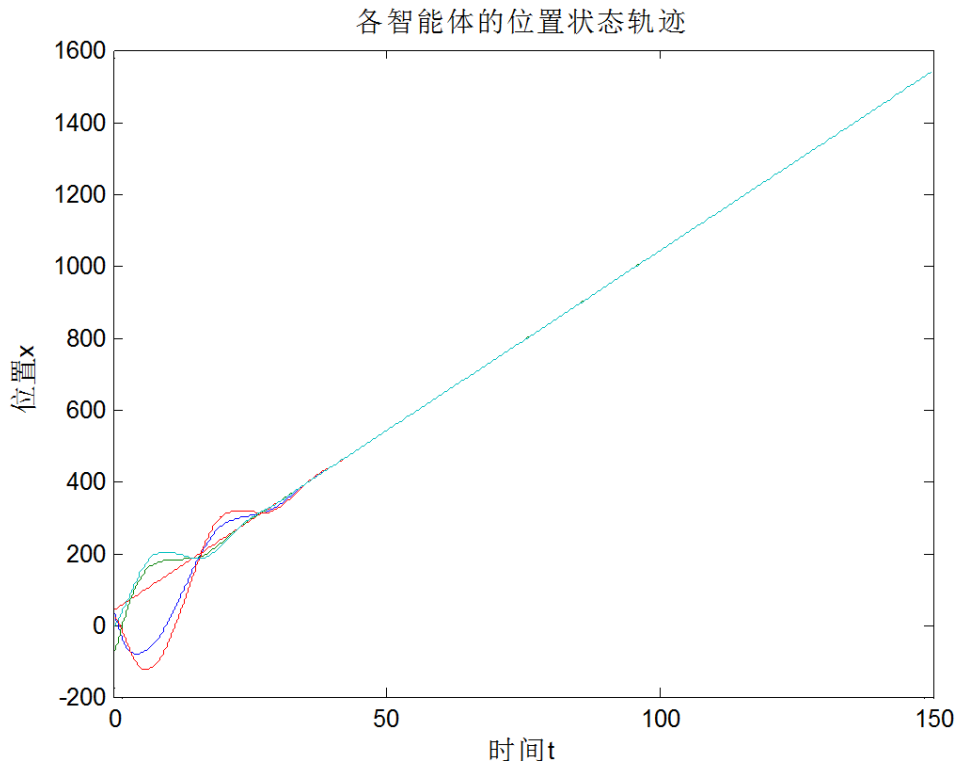


Figure 4. The position of each agent state trajectory
图 4. 各智能体的位置状态轨迹

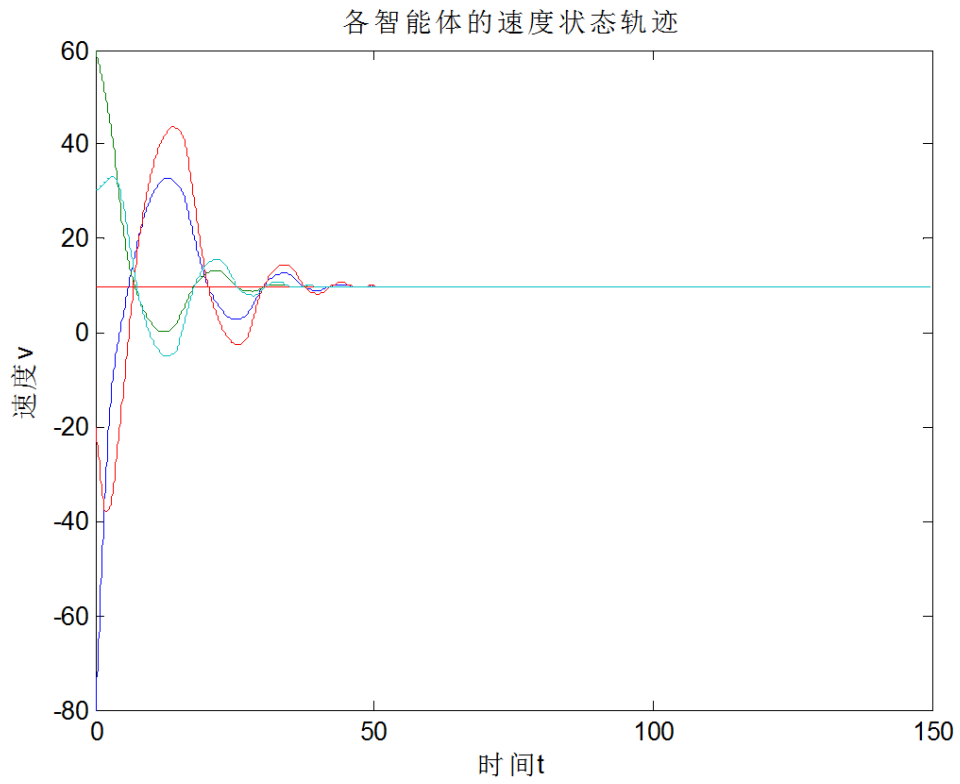


Figure 5. The speed of each agent state trajectory
图 5. 各智能体的速度状态轨迹

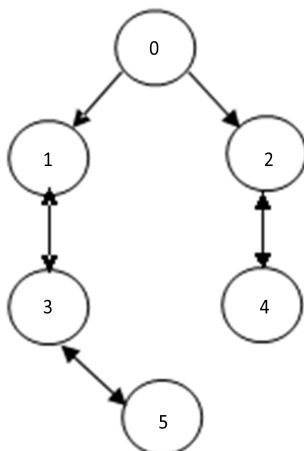


Figure 6. Network topology structure

图 6. 网络拓扑结构图

$$(v_1(0), v_2(0), v_3(0), v_4(0), v_5(0))^T = (-50, 60, -20, 30, 10)^T$$

领导者的初始状态为 $x_0(0) = -10$, $v_0(0) = 20$, 且对任意时刻 $t \geq 0$ 有 $v_0(t) = v_0(0)$ 。

为方便起见, 我们选取 $\varphi_k(x) = x$, 得到如下控制协议:

$$\begin{cases} u_i = -l_1(\text{sig}(\theta_i)^{\alpha_1}) - l_2(\text{sig}(\eta_i)^{\alpha_2}) \\ \dot{\theta}_i = \eta_i - l_3 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_1} \\ \dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(u_i - u_j) + a_{i0}u_i - l_4 \text{sig}(\theta_i - p_i)^{\sigma_2} \end{cases} \quad (4-2)$$

$$\begin{cases} p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i - x_j) + a_{i0}(x_i - x_0) \\ q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(v_i - v_j) + a_{i0}(v_i - v_0) \end{cases} \quad (4-3)$$

对于协议(4-2)我们令 $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 2\alpha_1/(1+\alpha_1) = 0.6667$, $\sigma_1 = 0.6$, $\sigma_2 = 0.2$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$, 运用 matlab 软件进行数值仿真, 得到该多智能体系统的位置轨迹和速度轨迹如图 7、图 8。

图中红色曲线代表领导者的运动轨迹, 其他色曲线代表跟随者的运动轨迹。由图像轨迹我们可以得到, 在控制协议(4-2)下, 跟随者能在有限时间内追上领导者, 即系统实现有限时间一致。

当我们令 $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 2\alpha_1/(1+\alpha_1) = 0.6667$, $\sigma_1 = 0.8$, $\sigma_2 = 0.6$, $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1$ 时, 得到新的运动轨迹如图 9、图 10。

对比图 7, 图 8 与图 9, 图 10 可以知道, 当 σ_2 取值越大时, 跟随者能够更快的收敛到与领导者相同的位置和速度状态, 系统实现有限时间一致。

综上, 我们通过数值仿真分别验证了状态反馈和输出反馈下的有限时间控制协议的有效性。此外通过改变参数大小我们发现, 当 α_1 和 σ_2 越大时, 控制协议有更好的收敛效果。

5. 结论

本文研究了带领航者的二阶多智能体系统的有限时间一致性问题。首先, 基于状态反馈含有完整位置和速度信息的多智能体系统, 提出了一类非线性有限时间控制协议。在固定无向网络拓扑结构含有生成树的前提下, 利用 Lyapunov 稳定性理论和齐次性理论, 证明了该类控制协议能够使系统中的各智能体

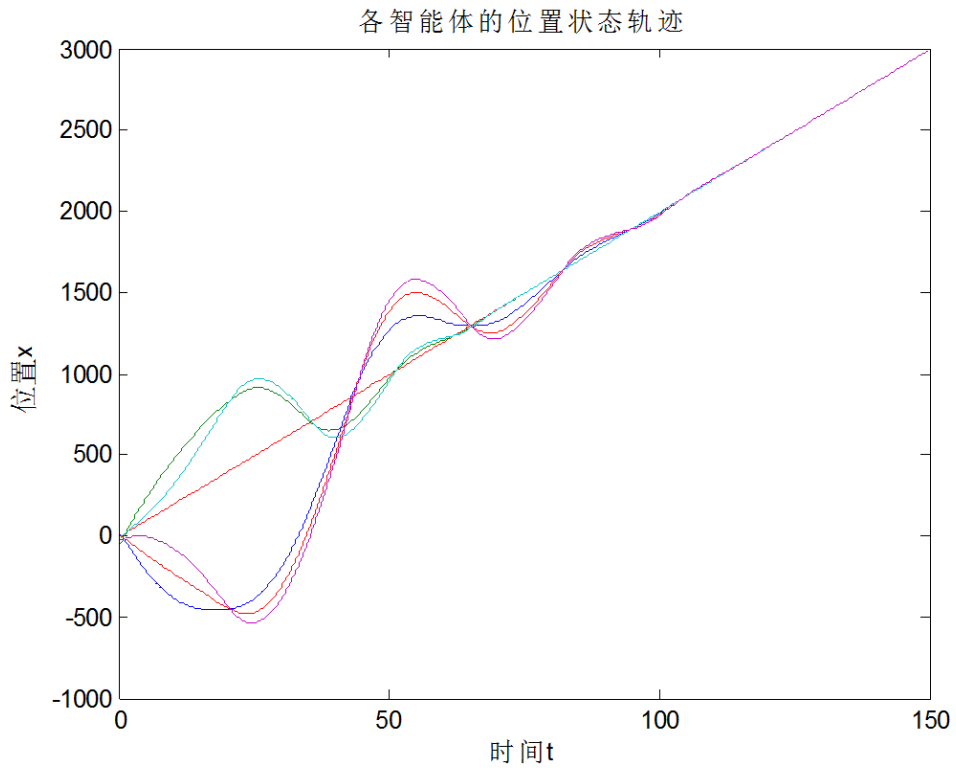


Figure 7. The position of each agent state trajectory

图 7. 各智能体的位置状态轨迹

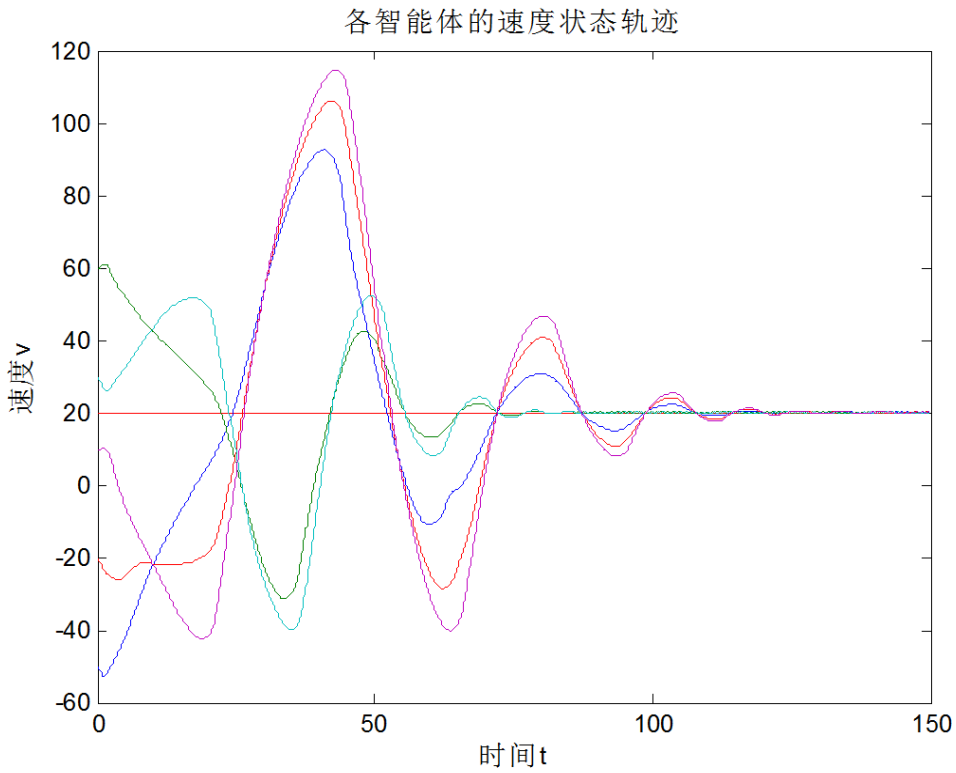


Figure 8. The speed of each agent state trajectory

图 8. 各智能体的速度状态轨迹

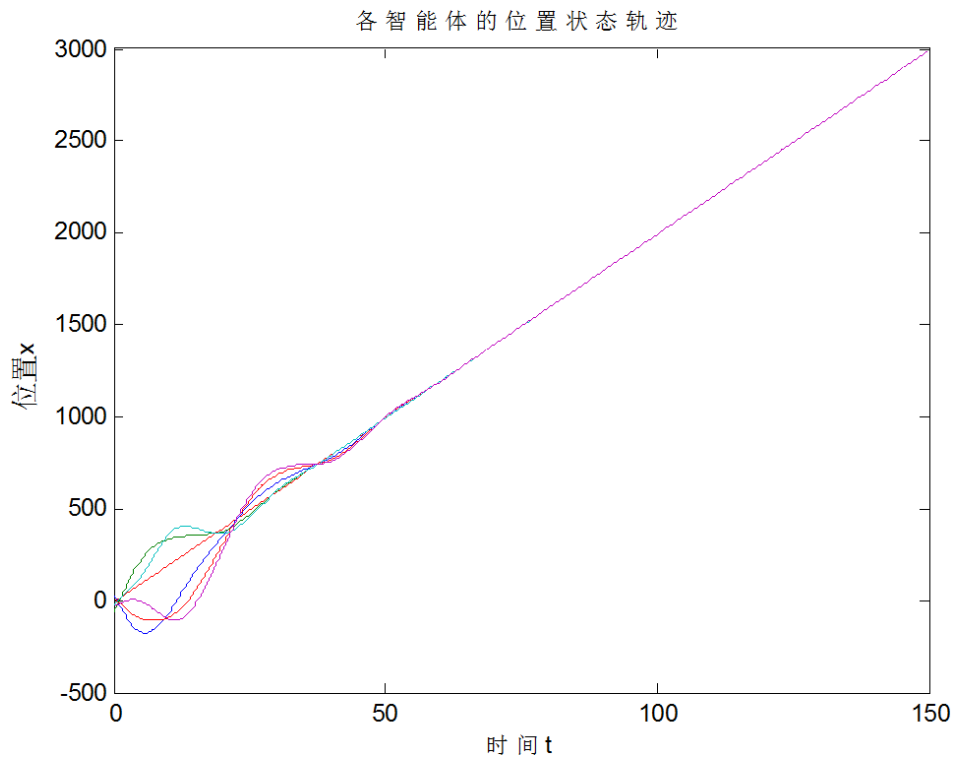


Figure 9. The position of each agent state trajectory
图9. 各智能体的位置状态轨迹

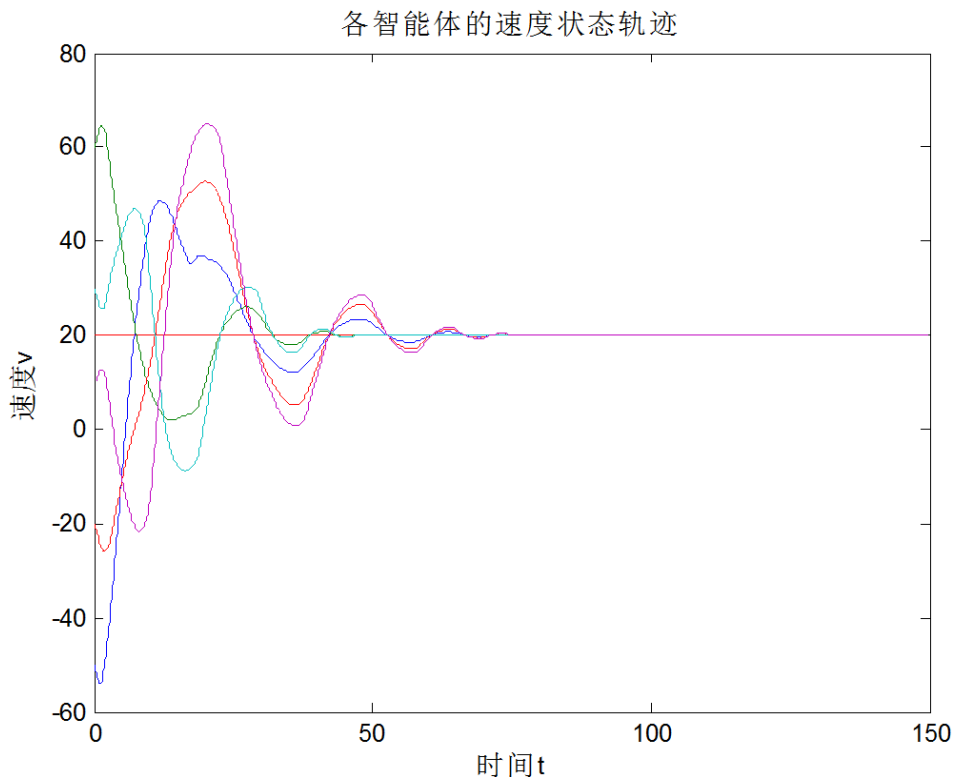


Figure 10. The speed of each agent state trajectory
图10. 各智能体的速度状态轨迹

在有限时间内与领航者的位置和速度状态达到一致。然后，对上述协议进行了拓展，提出了在速度信息反馈缺失时的有限时间控制协议，并给出了其有限时间一致性成立的充分条件。最后，利用 matlab 分别对上述两种协议进行了数值仿真，证明了结论的有效性。此外，在仿真过程中，对协议中的参数大小与系统的收敛速度进行了相关分析。

参考文献 (References)

- [1] Guan, Z., Sun, F., et al. (2012) Finite-Time Consensus for Leader-Following Second-Order Multi-Agent. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **59**, 2646-2654.
- [2] Horn, R. and Johnson, C. (1985) *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511810817>
- [3] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2003: 162-302.
- [4] 史忠科. 线性系统理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 26-28.
- [5] 胡跃明. 非线性控制系统理论与应用[M]. 第二版. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [6] Hong, Y., Huang, J. and Xu, Y. (2001) On an Output Feedback Finite Time Stabilization Problem. *IEEE Transactions on Automat Control*, **46**, 305-309.
- [7] Hong, Y., Xu, Y. and Huang, J. (2002) Finite-Time Control for Robot Manipulators. *Systems & Control Letters*, **46**, 243-253. [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6911\(02\)00130-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00130-5)
- [8] Bhat, S. and Bernstein, D. (1997) Finite-Time Stability of Homogeneous Systems. *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, Albuquerque, 6 June 1997, 2513-2514. <http://dx.doi.org/10.1109/ACC.1997.609245>

期刊投稿者将享受如下服务:

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: sa@hanspub.org