

Stabilization of Switched Systems with Perturbations under Asynchronous Switching*

Weiming Xiang^{1,2}, Jian Xiao², Chengyong Xiao¹

¹School of Applied Technology, Southwest University of Science and Technology, Mianyang

²School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu

Email: xwm1004@tom.com

Received: Apr.19th, 2011; revised: May 12th, 2011; accepted: May 18th, 2011.

Abstract: In this paper, the stabilization of switched systems under asynchronous switching is investigated. When the controller mismatches the switching law, the stabilization condition for switched system during both matching and mismatching period is investigated and an approach of designing stabilizing controller for switched systems based on average dwell time is proposed, and then the approach is extended to design stabilizing controller for switched systems with perturbations. The designed controller guarantees the closed-loop system stable under the condition of vanishing perturbations, and ensures the closed-loop system bounded under the condition of non-vanishing perturbations. Finally, the simulation result shows that the approach proposed by this paper is effective.

Keywords: Switched Systems; Asynchronous Switching; Stabilization; Average Dwell Time; Perturbations

含扰动切换系统在异步切换下的镇定*

向伟铭^{1,2}, 肖建², 肖承勇¹

¹西南科技大学应用技术学院, 绵阳

²西南交通大学电气工程学院, 成都

Email: xwm1004@tom.com

收稿日期: 2011年4月19日; 修回日期: 2011年5月12日; 录用日期: 2011年5月18日

摘要: 本文研究了切换系统在异步切换下的镇定控制器设计问题。在控制器与控制对象的切换律失配情况下, 通过分别讨论匹配时间段与不匹配时间段内控制器需要满足的约束条件, 给出了基于平均驻留时间方法的镇定控制器设计方法。并将该方法推广到了含扰动的切换系统的镇定控制器设计方法中, 设计的控制器在零扰动情况下能够保证闭环系统稳定, 在非零扰动情况下能够保证系统状态有界。最后给出了仿真实例, 验证了文中方法的有效性。

关键词: 切换系统; 异步切换; 镇定; 平均驻留时间; 扰动

1. 引言

切换系统是一类重要的混杂系统, 是指由一组连续或离散动态子系统组成, 并按某种切换律在各子系统间切换的动力系统^[1]。切换控制在很多实际系统中得到了应用, 包括: 电力电子系统^[2]、机器人控制^[3,4]、汽车引擎转矩控制系统等^[5]。切换系统的研究具有重

*基金项目: 西南科技大学青年基金(10zx3121), 国家自然科学基金(60674057, 60974027)。

要的应用价值和理论意义。

切换系统的控制器设计的研究成果主要是关于镇定控制器设计, Sun 等使用公共控制 Lyapunov 函数的方法来设计反馈控制器来镇定系统^[6]。Christofides 等使用多个控制 Lyapunov 函数来镇定系统^[7]。Daafouz 研究了离散切换线性系统的反馈镇定问题^[8]。另外, 设计切换律来实现系统镇定也受到了众多学者关注^[9,10]。Zhang 通过参数依赖 Lyapunov 函数设计了一类不确定

切换系统在任意切换律下的镇定控制器^[11]。Zhang 还研究了子系统为纯反馈系统的基于反步法的镇定控制器设计问题^[12]。关于异步切换情况下的控制器设计问题，目前的结果还不多，Zhang 等研究了在异步切换下的离散切换系统鲁棒控制问题^[13]，Xiang 等研究了一类时滞切换系统在异步切换下的控制器设计问题^[14]。

在实际系统中，控制器的切换律与实际控制对象的切换律不可避免会存在一定的异步的情况。如：控制器在切换时刻提前或滞后于控制对象的切换。在这种情况下，即使设计的控制器在匹配的时间段内能够保证系统的稳定，但是不匹配的时间段却可能导致系统状态发散。本文基于平均驻留时间给出了含扰动切换系统在异步切换情况下镇定控制器的设计方法，仿真结果表明，本文设计的控制器能够在异步切换下时镇定该类切换系统。

2. 问题描述与预备知识

考虑含有 N 个子系统的线性切换系统

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + B_{\sigma(t)}u \quad (1)$$

其中状态 $x \in R^n$ ，输入 $u \in R^m$ 。 $A_i \in R^{n \times n}$ ， $B_i \in R^{n \times m}$ 为定常矩阵。本文考虑切换律

$\sigma(t): [0, \infty) \rightarrow I = \{1, 2, \dots, N\}$ 为时间依赖型，集合 I 为 N 个子系统标识集合。切换时刻序列

$\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$ ，其中 t_0 为初始时刻， t_k 为第 k 次切换时刻，切换序列满足 $\sup_{k=1,2,\dots} \{t_k - t_{k-1}\} = T < \infty$ 。

在实际系统中，不可避免存在控制对象与控制器切换律异步的情况，因此考虑切换系统(1)的状态反馈控制器为 $u = K_{\hat{\sigma}(t)}x$ ，代入系统(1)可得

$$\dot{x} = (A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K_{\hat{\sigma}(t)})x \quad (2)$$

其中 $\hat{\sigma}(t): [0, \infty) \rightarrow I = \{1, 2, \dots, N\}$ 为控制器切换律。

若系统(1)含扰动，考虑具有以下形式

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + B_{\sigma(t)}u + f_{\sigma(t)}(t, x) \quad (3)$$

其中 $f_i: R^n \rightarrow R^n$ 为扰动。当 $u = K_{\hat{\sigma}(t)}x$ 时有

$$\dot{x} = (A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K_{\hat{\sigma}(t)})x + f_{\sigma(t)}(t, x) \quad (4)$$

在异步切换下，切换律 $\hat{\sigma}(t)$ 对应的切换序列为 $\{\hat{t}_0, \hat{t}_1, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_k, \dots\}$ ，并且 $\hat{t}_k \neq t_k$ ， $\forall k = 0, 1, 2, \dots$ 。假设

控制对象与控制器的切换时刻之差为 $\Delta_k = \hat{t}_k - t_k$ ，其中 $|\Delta_k| < q$ ， $0 < q < \inf_{k=0,1,\dots} \{t_{k+1} - t_k\}$ 。

说明 1 在各个切换时刻 t_k ，控制器与控制对象切换律失配体现在控制器切换超前或滞后于控制对象。超前或滞后的值为误差 Δ_k ，误差 Δ_k 的上界为 q ，并且误差上界 q 不超过任意两个相邻切换时刻之差，保证了控制器的切换时刻与控制对象的切换时刻虽然有一定误差，但各子系统的控制器与相对应的子系统仍然存在相同的工作时间段。在下文可以看出，正是因为存在相同的工作时间段，为系统(1)与(3)设计镇定控制器提供了可能性。

定义 1^[15] 对切换律 σ 和 $T > t \geq 0$ ， $N_\sigma(t, T)$ 为时间段 (t, T) 上切换次数，若存在 $N_0 \geq 0$ 和 $\tau_a > 0$ 有

$$N_\sigma(t, T) \leq N_0 + (T - t)/\tau_a \quad (5)$$

则 τ_a 称为平均驻留时间。

本文的研究内容是在异步切换下设计状态反馈增益 K_i ， $i \in I$ 来镇定平均驻留时间为 τ_a 的切换系统(1)与(3)。

3. 主要结果

假设控制对象在切换时刻 t_k 从子系统 i 切换到子系统 j ，为了简化叙述，我们只考虑控制器在切换时刻 t_k 存在误差 $\Delta_k > 0$ ($\Delta_k < 0$ 的情况类似)，那么在区间 $[t_k, t_k + \Delta_k)$ 会出现控制器与控制对象不匹配的现象，即反馈控制器 K_i 对应子系统 j 。我们用 $T^+(\tau, t)$ 表示区间 $[\tau, t)$ 出现控制器与控制对象不匹配现象的时间段的总合， $T^-(\tau, t)$ 表示区间 $[\tau, t)$ 内控制器能正确匹配其控制对象时间段的总合。对于系统(1)，我们有如下结论：

定理 1 考虑平均驻留时间为 τ_a 的切换系统(1)，若存在正数 $\alpha > 0$ ， $\beta > 0$ ， $\varepsilon > 0$ ， $\eta > 0$ ， $\lambda > 0$ 以及矩阵 S_i 、 U_i 使得以下条件成立：

$$\begin{bmatrix} -S_i & S_i \\ * & -\alpha I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} -\beta I & I \\ * & -S_i \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$S_i A_i^T + U_i^T B_i^T + A_i S_i + B_i U_i + \varepsilon S_i < 0 \quad (7)$$

$$S_j A_i^T + U_j^T B_i^T + A_i S_j + B_i U_j - \eta S_j < 0 \quad (8)$$

$$2 \ln(\alpha\beta) - (\tau_a - q)\varepsilon + q\eta + 2\tau_a \lambda < 0 \quad (9)$$

则反馈增益 $K_i = U_i S_i^{-1}$ 在异步切换下能镇定(1)。

证明 见附录中定理 1 证明。

说明 2 定理 1 中的各条件的意义如下：条件(7)为控制器与控制对象匹配时间段内各个子系统的镇定控制器满足的约束条件，表明控制器能够指数 ε 镇定各个子系统；条件(8)为条件(7)中设计出的镇定控制器在不匹配时间段需要满足的约束条件，该约束表明在不匹配时间段，并不要求系统状态是收敛的，而是只需要系统状态以指数 η 发散；条件(9)是条件(6)~(8)中控制器与控制对象匹配时间段与不匹配时间段的参数与平均驻留时间满足的约束条件。

说明 3 从以上的证明过程可以看到，虽然存在不匹配的时间段 $T^+(t_0, t)$ ，但是由与条件 $0 < q < \inf_{k=0,1,\dots} \{t_{k+1} - t_k\}$ 保证一定存在匹配的时间段 $T^-(t_0, t)$ ，而正是控制器在时间段 $T^-(t_0, t)$ 中起的作用保证了整个切换系统的稳定。

说明 4 条件(7)表示在控制器与控制对象匹配时必须能够镇定控制对象，条件(8)表示在控制器与控制对象不匹配时，并不需要镇定不匹配的控制对象，只需要系统状态发散趋势具有一个上界即可，并且由线性系统理论可知，该上界一定存在。因此在控制器切换律与控制对象切换律存在误差的情况下，设计各个子系统控制器有更大的灵活性。

由于实际系统不可避免的存在建模误差、不确定性以及干扰等，我们考虑含扰动系统(3)，首先考虑扰动为零扰动情况，即假设扰动 $f_i(t, 0) = 0$ 且满足线性增长界 $\|f_i(t, x)\| \leq \gamma \|x\|$ ，其中 γ 为非负数。

定理 2 考虑平均驻留时间为 τ_a 的含扰动切换系统(3)，若存在正数 $\alpha > 0$ ， $\beta > 0$ ， $\varepsilon > 0$ ， $\eta > 0$ ， $\lambda > 0$ 以及矩阵 S_i ， U_i 使得以下条件成立：

$$\begin{bmatrix} -S_i & S_i \\ * & -\alpha I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} -\beta I & I \\ * & -S_i \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} -I & S_i \\ * & S_i A_i^T + U_i^T B_i^T + A_i S_i + B_i U_i + \varepsilon S_i + \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} -I & S_j \\ * & S_j A_j^T + U_j^T B_j^T + A_j S_j + B_j U_j - \eta S_j + \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$2 \ln(\alpha\beta) - (\tau_a - q)\varepsilon + q\eta + 2\tau_a\lambda < 0 \quad (13)$$

则反馈增益 $K_i = U_i S_i^{-1}$ 在异步切换下能镇定(3)。

证明 见附录中定理 2 证明。

继续考虑扰动为非零扰动情况，即扰动 $f_i(t, 0) \neq 0$ ，且满足边界 $\|f_i(t, x)\| \leq \gamma \|x\| + \varphi(t)$ ，其中 γ 为非负数， $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 为非负且连续并满足 $\int_0^\infty \varphi(t) dt < \infty$ 。我们有如下结论：

定理 3 考虑平均驻留时间为 τ_a 的切换系统(3)，若存在正数 $\alpha > 0$ ， $\beta > 0$ ， $\varepsilon > 0$ ， $\eta > 0$ ， $\lambda > 0$ 以及矩阵 S_i ， U_i 使得(10)~(13)成立。则反馈增益 $K_i = U_i S_i^{-1}$ 在异步切换下能够保证(4)一致有界。

证明 见附录中定理 3 证明。

根据定理 1~3 可以给出如下控制器设计步骤：

1. 确定参数 ε 和 η 。
2. 解定理 1~3 中的 LMI。
3. 将得到的参数 α ， β 与 ε ， η 带入到(9)中验证是否满足平均驻留时间的条件。如不满足，可增大 ε 和减小 η 再次重复步骤 1、2、3。

4. 仿真算例

考虑含 2 个子系统的切换系统(1)，其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 3.5 & 6 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

控制对象的切换律取 $t_k = 2.8k$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$ ，因此其平均驻留时间 $\tau_a = 2.8$ ，取 $|\Delta_k| \leq q = 0.5$ 。假设控制器切换时刻超前 0.5s。假设扰动为 $f_1(x) = f_2(x) = [0.25x_1 \sin x_2 \quad 0.25x_2]$ 。可得 $\alpha = 0.0952$ ， $\beta = 13.0036$ ， $\varepsilon = 5$ ， $\eta = 2.5$ ， $\lambda = 0.01$ 求得状态反馈增益 $K_1 = [-1.9554 \quad -7.7697]$ ， $K_2 = [6.1551 \quad -17.8798]$ 满足定理 2。取初始状态 $x_0 = [3 \quad -5]^T$ ，仿真图见图 1。

从图 1 可以看到，控制器与控制对象的切换规则不匹配情况下，控制器能够镇定含有扰动的切换系统。同样虽然存在控制器与控制对象不匹配的时间段，并且在此时间段内系统的状态有发散的趋势，但是在控制器与控制对象匹配的时间段内，控制器的作用能够保证整个切换系统是稳定的。

实际切换系统中广泛存在异步切换的现象，例如：在实际系统中，控制器在切换时刻需要时间来辨别和确定被激活的子系统，必然导致控制器滞后于控制对象切换。本文的方法将切换系统的控制器设计方法扩展到了异步切换下，该设计方法能够处理实际系统中

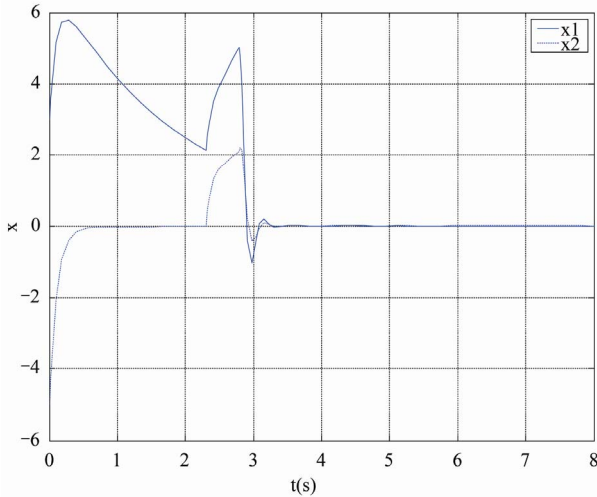


Figure 1. State response of switched system with perturbations
图 1. 含扰动切换系统状态响应图

控制器在切换时刻提前或滞后于控制对象的切换，因此，本文在异步切换下的控制器设计方法在实际系统中会有广泛的应用。

5. 结语

本文研究了在异步切换下切换系统镇定控制器的设计问题。设计的镇定控制器在控制器与控制对象的切换律不匹配的情况下，能够镇定切换系统。然后本文将结果推广到了含扰动的情形下，同样在控制器与控制对象的切换律失配的情况下，设计的控制器对于零扰动能够镇定切换系统，对于非零扰动能够保证状态一致有界。最后给出了仿真结果验证了文中方法的有效性。

参考文献 (References)

[1] D. Leith, R. Shorten, and W. Leithead. Issue in the design of

- switched linear control systems: A benchmark study. *International Journal of Adaptive Control*, 2003, 17(2): 103-118.
- [2] C. Sreekumar, V. Agarwal. A hybrid control algorithm for voltage regulation in DC-DC boost converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, 55(6): 2530-2538.
- [3] M. Song, T. J. Tarn, and N. Xi. Integration of task scheduling, action planning, and control in robotic manufacturing systems. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(7): 1097-1107.
- [4] B. E. Bishop, M. W. Spong. Control of redundant manipulators using logic-based switching. Tampa, FL: *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, 1998: 16-18.
- [5] A. Balluchi, L. Benvenuti. Automotive engine control and hybrid systems: Challenges and opportunities. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(7): 888-912.
- [6] H. Sun, J. Zhao. Control Lyapunov functions for switched control systems. *Proceedings of the American Control Conference*, 2001, 3: 1890-1891.
- [7] H. Nael, P. D. El-Farra. Christofides. Feedback control of switched nonlinear systems using multiple Lyapunov functions. *Proceedings of the American Control Conference*, 2001, 5: 3496-3502.
- [8] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Lung. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1883-1887.
- [9] S. Pettersson. Synthesis of switched linear systems. *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2003, 5: 5283-5288.
- [10] J. Malmberg, B. Bernhardsson, and K. J. Astrom. A stabilization switching scheme for multi-controller systems. *13th IFAC World Congress*, 1996: 229-234.
- [11] L. Zhang, C. Wang, and L. Chen. Stability and stabilization of a class of multimode linear discrete-time systems with polytopic uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, 56(9), 3684-3692.
- [12] 向峥嵘, 向伟铭. 基于反步法的一类非线性切换系统控制器设计[J]. *控制与决策*, 2007, 22(12): 1376-1380.
- [13] L. Zhang, P. Shi. Stability, \mathcal{L}_2 gain and asynchronous control of discrete-time switched systems with average dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(9): 2193-2200.
- [14] Z. Xiang, R. Wang. Robust control for uncertain switched nonlinear systems with time delay under asynchronous switching. *IET Control Theory Applications*, 2008, 3(8): 1041-1050.
- [15] J. P. Hespanha, D. Liberzon, and A. S. Morse. Stability of switched systems with average dwell time. *38th Conference on Decision and Control*, 1999, 3: 2655-2660.

附录

定理 1 证明 令 $S_i = P_i^{-1}$, 由(6)易得

$$\frac{1}{\alpha}I < P_i < \beta I \quad (14)$$

另外, 带入 $K_i = U_i S_i^{-1}$ 到(7), (8)可得

$$(A_i + B_i K_i)^T P_i + P_i (A_i + B_i K_i) + \varepsilon P_i < 0 \quad (15)$$

$$(A_i + B_i K_j)^T P_j + P_j (A_i + B_i K_j) - \eta P_j < 0 \quad (16)$$

考虑 $\forall t > 0$, $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ 为 $[t_0, t]$ 上控制对象的切换时刻, 对系统(2)分段 Lyapunov 函数 $V(t)$

$$V(t) = \begin{cases} x^T P_i x & t \in T^-(t_0, t) \\ x^T P_j x & t \in T^+(t_0, t) \end{cases} \quad (17)$$

由(14)有

$$\frac{1}{\alpha} \|x\|^2 < V(x) < \beta \|x\|^2 \quad (18)$$

我们用 T^- , T^+ 代替 $T^-(t_0, t)$, $T^+(t_0, t)$, 易得

$$\dot{V}(t) = \begin{cases} x^T \left[(A_i + B_i K_i)^T P_i + P_i (A_i + B_i K_i) \right] x & t \in T^- \\ x^T \left[(A_i + B_i K_j)^T P_j + P_j (A_i + B_i K_j) \right] x & t \in T^+ \end{cases}$$

由(15), (16)得

$$\dot{V}(t) < \begin{cases} -\varepsilon V(t) & t \in T^- \\ \eta V(t) & t \in T^+ \end{cases}$$

由假设 $\Delta_k > 0$ ($\Delta_k < 0$ 情况类似), 当 $t \in T^-$ 时 ($t \in T^+$ 时情况类似), 有

$$V(t) < e^{-\varepsilon(t-t_k-\Delta_k)} V(t_k + \Delta_k) < \alpha \beta e^{-\varepsilon(t-t_k-\Delta_k)+\eta\Delta_k} V(t_k)$$

依次类推可以得到

$$V(t) < (\alpha\beta)^{2k} e^{-\varepsilon T^-(t_0, t)+\eta T^+(t_0, t)} V(t_0) \quad (19)$$

再由 $|\Delta_k| \leq q$ 可得

$$T^+(t_0, t) = \sum_{n=1}^k |\Delta_n| < kq$$

$$T^-(t_0, t) > t - t_0 - kq$$

再由定义 1 可知 $k = N_\sigma$, 因此由定义 1 得

$$T^+(t_0, t) \leq N_\sigma q \leq N_0 q + q(t-t_0)/\tau_a$$

$$T^-(t_0, t) > t - t_0 - N_\sigma q \geq (1-q/\tau_a)(t-t_0) - N_0 q$$

代入式(19)得

$$V(t) \leq (\alpha\beta)^{2N_0} e^{N_0 q(\varepsilon+\eta)} e^{\frac{2\ln(\alpha\beta)-(\tau_a-q)\varepsilon+q\eta}{\tau_a}(t-t_0)} V(t_0)$$

因此, 由(18)可以得到

$$\|x(t)\| < (\alpha\beta)^{N_0+\frac{1}{2}} e^{\frac{N_0 q(\varepsilon+\eta)}{2}} e^{\frac{2\ln(\alpha\beta)-(\tau_a-q)\varepsilon+q\eta}{2\tau_a}(t-t_0)} \|x(t_0)\|$$

再由(9)可得

$$2\ln(\alpha\beta) - (\tau_a - q)\varepsilon + q\eta < -2\tau_a \lambda$$

因此可以得到

$$\|x(t)\| < C e^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\|$$

其中 $C = (\alpha\beta)^{N_0+\frac{1}{2}} e^{\frac{N_0 q(\varepsilon+\eta)}{2}}$ 。则系统(2)是指数稳定。

定理 2 证明 类似定理 1 的证明过程, 取 $S_i = P_i^{-1}$, $V(t)$ 为(17), 并且由 $f_i(x)$ 为零扰动并满足 $\|f_i(t, x)\| \leq \gamma \|x\|$ 可得

$$\dot{V}(t) \leq \begin{cases} x^T \Psi_i x + 2\gamma \|P_i x\| \cdot \|x\| & t \in T^-(t_0, t) \\ x^T \Psi_{ij} x + 2\gamma \|P_j x\| \cdot \|x\| & t \in T^+(t_0, t) \end{cases}$$

其中 $\Psi_i = (A_i + B_i K_i)^T P_i + P_i (A_i + B_i K_i)$, $\Psi_{ij} = (A_i + B_i K_j)^T P_j + P_j (A_i + B_i K_j)$ 。又由

$$2\gamma \|P_i x\| \cdot \|x\| \leq \gamma^2 x^T P_i^T P_i x + x^T x$$

有

$$\dot{V}(t) \leq \begin{cases} x^T (\Psi_i + \gamma^2 P_i^T P_i + I) x & t \in T^- \\ x^T (\Psi_{ij} + \gamma^2 P_j^T P_j + I) x & t \in T^+ \end{cases}$$

因此, 由(10)~(12)及 Schur 补引理有

$$\dot{V}(t) < \begin{cases} -\varepsilon V(t) & t \in T^- \\ \eta V(t) & t \in T^+ \end{cases}$$

而后, 类似定理 1 证明过程, 可得系统(4)指数稳定。

定理 3 证明 取 $S_i = P_i^{-1}$, $V(t)$ 为(17), $f_i(x)$ 为非零扰动满足 $\|f_i(t, x)\| \leq \gamma \|x\| + \varphi(t)$, 类似定理 1, 2 证明可以得到

$$\dot{V}(t) < \begin{cases} -\varepsilon x^T P_i x + 2\varphi(t) \sqrt{\alpha x^T P_i x} & t \in T^-(t_0, t) \\ \eta x^T P_j x + 2\varphi(t) \sqrt{\alpha x^T P_j x} & t \in T^+(t_0, t) \end{cases}$$

取 $W(t) = \begin{cases} \sqrt{x^T P_i x} & t \in T^- \\ \sqrt{x^T P_j x} & t \in T^+ \end{cases}$ 可以得到

$$\dot{W}(t) < \begin{cases} -\varepsilon W(t)/2 + \sqrt{\alpha}\varphi(t) & t \in T^- \\ \eta W(t)/2 + \sqrt{\alpha}\varphi(t) & t \in T^+ \end{cases}$$

假设 $\Delta_k > 0$ ($\Delta_k < 0$ 时情况类似), 令 $t_{2n-1} = t_k$, $t_{2n} = t_k + \Delta_k$, 其中 $n = 1, 2, \dots$, 序列 $\{t_0, t_1, t_1 + \Delta_1, t_2, t_2 + \Delta_2, \dots, t_k, t_k + \Delta_k, \dots\}$ 可用序列 $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{2n-1}, t_{2n}, \dots\}$ 代替, 可以当 $t \in [t_n, t_{n+1})$ 时有

$$W(t) < \phi(t, t_n)W(t_n) + \sqrt{\alpha} \int_{t_n}^t \phi(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau$$

其中 $\phi(t, \tau) = \begin{cases} e^{-\varepsilon(t-\tau)/2} & t \in T^- \\ e^{\eta(t-\tau)/2} & t \in T^+ \end{cases}$. 依次类推可以得到

$$W(t) < \sqrt{\alpha} \int_{t_n}^t \phi(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau + (\alpha\beta)^{\frac{n}{2}} [\phi(t, t_0)W(t_0) + \sqrt{\alpha} \sum_{i=1}^n (\alpha\beta)^{-\frac{i}{2}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau]$$

我们考虑 $\phi(\tau_2, \tau_1)$, 当 $\tau_1 < t_n < \dots < t_{n+m} < \tau_2$ 时, 有

$$\phi(\tau_2, \tau_1) \leq e^{\frac{\eta}{2}(t_n - \tau_1)} e^{-\frac{1}{2}[\varepsilon T^-(t_n, t_{n+m}) - \eta T^+(t_n, t_{n+m})]} e^{\frac{\eta}{2}(\tau_2 - t_{n+m})} \quad (20)$$

其中我们可以得到

$$\begin{aligned} & \varepsilon T^-(t_n, t_{n+m}) - \eta T^+(t_n, t_{n+m}) \\ & > \varepsilon \left(1 - \frac{q}{\tau_a}\right) (t_{n+m} - t_n) - \varepsilon N_0 q - \frac{q\eta}{\tau_a} (t_{n+m} - t_n) - \eta N_0 q \\ & = \frac{(\tau_a - q)\varepsilon - q\eta}{\tau_a} (t_{n+m} - t_n) - \varepsilon N_0 q - \eta N_0 q \end{aligned}$$

由条件(13)可知

$$\begin{aligned} & \varepsilon T^-(t_n, t_{n+m}) - \eta T^+(t_n, t_{n+m}) \\ & > \frac{(\tau_a - q)\varepsilon - q\eta}{\tau_a} (t_{n+m} - t_n) - \varepsilon N_0 q - \eta N_0 q \\ & > \frac{2\ln(\alpha\beta) + \lambda}{\tau_a} (t_{n+m} - t_n) - \varepsilon N_0 q - \eta N_0 q \end{aligned}$$

代入(20)中得

$$\begin{aligned} \phi(\tau_2, \tau_1) & \leq e^{\frac{\eta}{2}(t_n - \tau_1)} e^{-\frac{1}{2}[\frac{2\ln(\alpha\beta) + \lambda}{\tau_a}(t_{n+m} - t_n) - \varepsilon N_0 q - \eta N_0 q]} e^{\frac{\eta}{2}(\tau_2 - t_{n+m})} \\ & \leq e^{\frac{N_0 q(\varepsilon + \eta)}{2}} e^{\frac{\eta}{2}(t_n - \tau_1)} e^{\frac{\eta}{2}(\tau_2 - t_{n+m})} e^{-\frac{2\ln(\alpha\beta) + \lambda}{2\tau_a}(t_{n+m} - t_n)} \\ & \leq \rho e^{-c(\tau_2 - \tau_1)} \end{aligned}$$

其中 $c = \frac{2\ln(\alpha\beta) + \lambda}{2\tau_a} > 0$, $\rho = e^{\frac{N_0 q(\varepsilon + \eta) + T\left(\eta + \frac{2\ln(\alpha\beta) + \lambda}{\tau_a}\right)}{2}}$.

当 $t_n < \tau_1 < \tau_2 < t_{n+1}$ 时, 同样容易得到 $\phi(\tau_2, \tau_1) \leq \rho e^{-c(\tau_2 - \tau_1)}$. 因此 τ_1, τ_2 是任意的, 代入 $\phi(t, \tau)$ 得到

$$W(t) < (\alpha\beta)^{\frac{n}{2}} \phi(t, t_0)W(t_0) + \sqrt{\alpha} \int_{t_n}^t \rho e^{-c(t-\tau)} \varphi(\tau)d\tau + \sqrt{\alpha} \sum_{i=1}^n (\alpha\beta)^{\frac{n-i}{2}} e^{-c(t-t_i)} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho e^{-c(t_i-\tau)} \varphi(\tau)d\tau$$

又由

$$(\alpha\beta)^{\frac{n-i}{2}} < (\alpha\beta)^{N_0} (\alpha\beta)^{\frac{(t_n - t_i)}{\tau_a}} < (\alpha\beta)^{N_0} e^{\frac{\ln(\alpha\beta)}{\tau_a}(t - t_i)}$$

因此有

$$\begin{aligned} W(t) & < (\alpha\beta)^{\frac{n}{2}} \phi(t, t_0)W(t_0) \\ & + (\alpha\beta)^{N_0} \sqrt{\alpha} \int_{t_0}^t \rho e^{-c(t-\tau)} \varphi(\tau)d\tau \\ & < (\alpha\beta)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\varepsilon}{2}T^-(t_0, t) + \frac{\eta}{2}T^+(t, t_0)} W(t_0) \\ & + (\alpha\beta)^{N_0} \sqrt{\alpha} \int_{t_0}^t \rho e^{-c(t-\tau)} \varphi(\tau)d\tau \end{aligned}$$

类似定理 1, 2 的证明过程可以得到

$$W(t) < (\alpha\beta)^{N_0} e^{\frac{N_0 q(\varepsilon + \eta)}{2}} e^{\frac{2\ln(\alpha\beta) - (\tau_a - q)\varepsilon + q\eta}{2\tau_a}(t - t_0)} W(t_0) + (\alpha\beta)^{N_0} \sqrt{\alpha} \rho \int_{t_0}^t \varphi(\tau)d\tau$$

又因为 $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \|x\| < W(t) < \sqrt{\beta} \|x\|$ 可得

$$\|x\| < (\alpha\beta)^{N_0 + \frac{1}{2}} e^{\frac{N_0 q(\varepsilon + \eta)}{2}} e^{\frac{2\ln(\alpha\beta) - (\tau_a - q)\varepsilon + q\eta}{2\tau_a}(t - t_0)} \|x\| + (\alpha\beta)^{N_0} \alpha \rho \int_{t_0}^{\infty} \varphi(\tau)d\tau$$

再由条件(13)可得

$$2\ln(\alpha\beta) - (\tau_a - q)\varepsilon + q\eta < -2\tau_a \lambda$$

因此有 $\|x(t)\| < C e^{-\lambda(t-t_0)} \|x(t_0)\| + b$, 其中

$$C = (\alpha\beta)^{N_0 + \frac{1}{2}} e^{\frac{N_0 q(\varepsilon + \eta)}{2}}, \quad b = (\alpha\beta)^{N_0} \alpha \rho \int_{t_0}^{\infty} \varphi(\tau)d\tau. \quad \text{由} \int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)dt < \infty \text{ 可得系统(4)一致有界.}$$