Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2012, 1, 41-48
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2012.12006 Published Online November 2012 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

Similar Constructive Method of Solution for a Class of Boundary Value Problem of Thomson Equation

Congyin Fan, Shunchu Li, Dongxu Xu

Institute of Applied Mathematics, Xihua University, Chengdu
Email: 1147138817@qq.com

Received: Oct. 8th, 2012; revised: Oct. 10th, 2012; accepted: Oct. 23rd, 2012

Abstract: Aiming at the solution for a class of boundary value problem of Thomson equation, we found that its solution can be obtained by structuring similar kernel function with the coefficients of non-homogeneous left boundary condition. While the similar kernel function is constructed by both the function of guide solution and the coefficients of homogeneous right boundary condition. Thus, a new method of solving such kind of boundary value problem is obtained—Similar Constructive Method.

Keywords: Boundary Value Problem; Thomson Equation; Similar Constructive Method; Similar Kernel Function; Function of Guide Solution

一类 Thomson 方程边值问题解的相似构造法

范聪银，李顺初，许东旭

西华大学应用数学研究所，成都
Email: 1147138817@qq.com

收稿日期：2012 年 10 月 8 日；修回日期：2012 年 10 月 10 日；录用日期：2012 年 10 月 23 日

摘　要：针对 Thomson 方程的一类边值问题的解式进行研究，发现其解式可由相似核函数和非齐次左边值条件中的系数进行组装得到，而相似核函数由引解函数以及齐次右边值条件中的系数来构造，由此获得了求解该类边值问题的一种新方法——相似构造法。

关键词：边值问题；Thomson 方程；相似构造法；相似核函数；引解函数

1. 引言

在数论中，任何一个实数都能用一个连分式表示出来[1]。而一个微分方程对于某个固定类型的边值问题而言，其解曲线簇中的曲线都具有几何上相似或放射相似性；那么其解式能否用一个连分式或连分式的乘积表示出来呢？自 2004 年李顺初等人分别对一些二阶齐次线性常微分方程、二阶齐次线性常微分方程组、二阶齐次线性偏微分方程、二阶齐次线性偏微分方程组以及一些油气藏工程中的渗流方程的解进行了研究，不仅对此做出了肯定的回答，还逐渐形成了微分方程解的相似结构理论以及解的相似构造法[2-17]。

Thomson 方程被誉为表面化学四大方程之一[18]，其边值问题尤其在化学工业领域中得到广泛应用，如：石油化工，感光化学等。为使有关 Thomson 方程的边值问题能在实际工程中的应用变得更加方便，本文就 Thomson 方程边值问题[19]

$$\begin{cases} x^2y''+xy'-\left(\mathrm{i}x^2+\upsilon^2\right)y=0 \\ \left[Ey+\left(1+EF\right)y'\right]_{x=a}=D \\ \left[Gy+Hy'\right]_{x=b}=0 \end{cases} \tag{1}$$

(υ、D、E、F、G、H、a、b 为已知常数且 $D\neq 0, G^2+H^2\neq 0,\ 0<a<b,\ \mathrm{i}^2=-1$)进行研究。首先对 Thomson 方程进行变量替换找到该方程的两个线性无关解并用这两个解来构造引解函数；其次求边值问题(1)在非齐次左边值条件一种特殊情形下的解，得到相似核函数(用引解函数和齐次右边值条件中的系数表示出来)；再次求出边值问题(1)的解(用相似核函数和非齐次左边值条件中的系数组装得到)。最后给出相似构造法的具体步骤，并举例说明该方法及其优越性。本文的研究不仅有利于 Thomson 方程边值问题在实际工程中的应用，还能进一步完善微分方程解的相似结构理论以及扩宽相似构造法的应用范围。

2. 预备知识

引理 1：Thomson 方程可经过变量替换[19] $\varsigma=\sqrt{\mathrm{i}}x$，化为：

$$\varsigma^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\varsigma^2}+\varsigma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varsigma}-\left(\varsigma^2+\upsilon^2\right)y=0$$

证明：若对 Thomson 方程的自变量 x 作替换 $\varsigma=\sqrt{\mathrm{i}}x$，因

$$y'\equiv\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varsigma}, y''\equiv\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\varsigma^2}$$

则 Thomson 方程可化为：

$$\varsigma^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\varsigma^2}+\varsigma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varsigma}-\left(\varsigma^2+\upsilon^2\right)y=0 \tag{2}$$

(2)式是以自变量为 ς 的变型 Bessel 方程。

引理 2：Thomson 方程的通解可以写为：

$$y=AI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)+BK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right) \tag{3}$$

其中：A、B 是任意实数，$I_\upsilon(\cdot)$、$K_\upsilon(\cdot)$ 分别为 υ 阶的第一和第二类变型 Bessel 函数。

证明：因为变型 Bessel 方程(2)的通解可以表示为[19]：

$$y=AI_\upsilon(\varsigma)+BK_\upsilon(\varsigma)$$

则由引理 1 知，令 $\varsigma=\sqrt{\mathrm{i}}x$，即可得到 Thomson 方程的通解为：

$$y=AI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)+BK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)$$

为能方便简洁地把边值问题(1)的解表示出来，下面引入引解函数并给出其微分性质。

引理 3：作二元函数：

$$\varphi_{m,n}(x,y,t)=K_m(tx)I_n(ty)+(-1)^{m-n+1}I_m(tx)K_n(ty) \tag{4}$$

分别令二元函数(4)式中的参数 $t=\sqrt{\mathrm{i}};\ m=\upsilon,\upsilon+1; n=\upsilon,\upsilon+1$，即可得到引解函数：

$$\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)=K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right)-I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right), \tag{5}$$

$$\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)=K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right)+I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right), \tag{6}$$

$$\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)=K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right)+I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right), \tag{7}$$

$$\varphi_{\upsilon+1,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)=K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)-I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right), \tag{8}$$

且它们具有如下的微分性质：

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)=\frac{\upsilon}{x}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right), \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)=\frac{\upsilon}{y}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right), \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)=\frac{\upsilon}{x}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right), \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)=\frac{\upsilon}{y}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right), \tag{12}$$

证明：对(4)中的m、n、t进行赋值易得(5)~(8)式。

下面证明引解函数的微分性质。

根据变型 Bessel 函数的微分性质[20]：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_{\upsilon}(t)=\frac{\upsilon}{t}I_{\upsilon}(t)+I_{\upsilon+1}(t)\text{；}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K_{\upsilon}(t)=\frac{\upsilon}{t}K_{\upsilon}(t)-K_{\upsilon+1}(t)$$

对(5)式两边的自变量x求导得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)&=\left[\frac{\upsilon}{x}K_{\upsilon}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)-\sqrt{\mathrm{i}}K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)\right]I_{\upsilon}\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right)-\left[\frac{\upsilon}{x}I_{\upsilon}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)+\sqrt{\mathrm{i}}I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)\right]K_{\upsilon}\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right)\\&=\frac{\upsilon}{x}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\end{aligned}$$

即(9)式得证。

同理可证(10)~(12)式。

3. 主要定理及其证明

先求边值问题(1)在非齐次左边值条件的一种特殊情形下的解，它将是边值问题(1)的解的相似结构中的相似核函数。

定理 1：若边值问题

$$\begin{cases}x^2y''+xy'-\left(\mathrm{i}x^2+\upsilon^2\right)y=0\\ y'\big|_{x=a}=1\\ \left[Gy+Hy'\right]_{x=b}=0\end{cases} \tag{13}$$

(其中参数的限制与(1)中的相同)有解，则其解是唯一的且可以表示为：

$$y=\Phi(x)$$

$$=\frac{G\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+H\left[\frac{\upsilon}{b}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]}{G\left[\frac{\upsilon}{a}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]+H\left[\frac{\upsilon^2}{ab}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\frac{\upsilon}{b}\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+\frac{\upsilon}{a}\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\mathrm{i}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon+1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]} \tag{14}$$

证明：由引理 2 知 Thomson 方程的通解为(3)式，故

$$y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[AI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)+BK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)\right]=A\left[\frac{\upsilon}{x}I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)+\sqrt{\mathrm{i}}I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)\right]+B\left[\frac{\upsilon}{x}K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)-\sqrt{\mathrm{i}}K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)\right]\tag{15}$$

由 $y'\big|_{x=a}=1$ 可得：

$$AI'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)+BK'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)=A\left[\frac{\upsilon}{a}I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)+\sqrt{\mathrm{i}}I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)\right]+B\left[\frac{\upsilon}{a}K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)-\sqrt{\mathrm{i}}K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)\right]=1\tag{16}$$

再由边值问题(13)中的齐次右边界条件 $\left[Gy+Hy'\right]_{x=b}=0$ 得：

$$\begin{aligned}&A\left[GI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+HI'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]+B\left[GK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+HK'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]\\&=A\left\{GI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+Hb^{-1}\left[\upsilon I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\sqrt{\mathrm{i}}bI_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]\right\}\\&+B\left\{GK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+Hb^{-1}\left[\upsilon K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)-\sqrt{\mathrm{i}}bK_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]\right\}=0\end{aligned}\tag{17}$$

(16)、(17)式是关于待定系数 A,B 的线性方程组，其系数矩阵为：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}I'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right) & K'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)\\ GI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+HI'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right) & GK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+HK'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\end{bmatrix}$$

简记为 $\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}$，不难得到其增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12} & 1\\ R_{21} & R_{22} & 0\end{bmatrix}$。由边值问题(13)的解的存在性可得 $r\left(\boldsymbol{R}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right)=1或2$。

首先，证明边值问题(13)的解是唯一的。

假设边值问题(13)的解不唯一，那么有 $r\left(\boldsymbol{R}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right)=1$。现分情况进行讨论。

①当矩阵 $\boldsymbol{R}$ 有零行时，由变型 Bessel 函数的零点存在定理[20]可知：R_{11}、R_{12} 不可能同时为 0，故只讨论 $R_{21}=R_{22}=0$ 的情况。由 $R_{21}=R_{22}=0$，可得到如下关于 G、H 的线性方程组：

$$\begin{cases}GI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+HI'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)=0\\ GK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+HK'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)=0\end{cases}\tag{18}$$

容易得到方程组(18)的系数行列式为：

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right) & I'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\\ K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right) & K'_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\end{vmatrix}$$

根据变型 Bessel 函数 Wronski 公式[20]知：$\Delta_1=-\dfrac{1}{\sqrt{i}b}\neq 0$，则齐次线性方程组(18)只有零解，即 $G=H=0$，这与 $G^2+H^2\neq 0$ 相矛盾。

②当 R_{11}、R_{12}、R_{21}、R_{22} 都不为 0 时，因 $r\left(R\right)=1$，故有矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的两行或两列对应成比例。

当两行对应成比例时，不妨设比例系数为 $\alpha\neq 0$，那么经过初等行变换后增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 可变为：

$$\overline{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12} & 1\\ 0 & 0 & -\alpha\end{bmatrix}$$

显然此时 $r\left(\boldsymbol{R}\right)\neq r\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right)$，这与 $r\left(\boldsymbol{R}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right)=1$ 矛盾。

当两列对应成比例时，由于矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的两列对应成比例，那么 $r\left(\boldsymbol{R}\right)=1$，$r\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right)=2$，这与 $r\left(\boldsymbol{R}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right)=1$ 矛盾。

③如果矩阵 $\boldsymbol{R}$ 出现零列，那么增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 只出现下面两种情况：

$$\overline{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix}0 & R_{12} & 1\\ 0 & R_{22} & 1\end{bmatrix} \text{ 或 } \overline{\boldsymbol{R}}=\begin{bmatrix}R_{11} & 0 & 1\\ R_{21} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

再由①中的讨论可知，这与边值问题(13)的解的存在相矛盾，所以矩阵 $\boldsymbol{R}$ 不会出现零列。

由①、②、③可知 $r\left(\boldsymbol{R}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{R}}\right)=2$，即边值问题(13)的解是唯一的。

其次，证明边值问题(13)的解可以表示为(14)式。

由边值问题(13)有唯一解知，关于待定系数 A,B 的线性方程组(16)、(17)的系数行列式 $\Delta\neq 0$，再由引理 3，并经化简得：

$$\begin{aligned}\Delta=&-G\left[\frac{\upsilon}{a}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]\\&-H\left[\frac{\upsilon^2}{ab}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\frac{\upsilon}{a}\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+\frac{\upsilon}{b}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\mathrm{i}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon+1}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]\end{aligned}\tag{19}$$

利用 Cramer 法则求得：

$$A=\frac{1}{\Delta}\left[GK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\frac{H\upsilon}{b}K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)-H\sqrt{\mathrm{i}}K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]\tag{20}$$

$$B=-\frac{1}{\Delta}\left[GI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\frac{H\upsilon}{b}I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+H\sqrt{\mathrm{i}}I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]\tag{21}$$

现在把(20)、(21)式代入(3)式，可得边值问题(13)的解：

$$y=\frac{xI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)}{\Delta}\left[GK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\frac{H\upsilon}{b}K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)-H\sqrt{\mathrm{i}}K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]-\frac{K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)}{\Delta}\left[GI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\frac{H\upsilon}{b}I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+H\sqrt{\mathrm{i}}I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]$$

再利用(19)式以及引理 3，即可得到(14)式。

定理 2：若边值问题(1)有解，则其解是唯一的且可以表示为：

$$y=D\cdot\frac{1}{E+\dfrac{1}{F+\Phi\left(a\right)}}\cdot\frac{1}{F+\Phi\left(a\right)}\cdot\Phi\left(x\right)\tag{22}$$

证明：与定理 1 同理可证边值问题(1)的解是唯一的。此处略。

下面证明边值问题(1)的解可以表示为(22)式。

由引理 2 知 Thomson 方程的通解为(3)式，由边值问题(1)的非齐次左边在值条件 $\left[Ey+\left(1+EF\right)y'\right]_{x=a}=D$ 可得：

$$A\left\{EI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)+\left(1+EF\right)\left[\frac{\upsilon}{a}I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)+\sqrt{\mathrm{i}}I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)\right]\right\}+B\left\{EK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)+\left(1+EF\right)\left[\frac{\upsilon}{a}K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)-\sqrt{\mathrm{i}}K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}a\right)\right]\right\}=D\tag{23}$$

由边值问题(1)的解是唯一的知，关于待定系数 A,B 的线性方程组(17)、(23)的系数行列式 $\Delta^*\neq 0$，再利用引理 3，并经化简得：

$$\begin{aligned}\Delta^*=&E\left\{G\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+H\left[\frac{\upsilon}{b}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]\right\}+\left(1+EF\right)\left\{G\left[\frac{\upsilon}{a}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]\right.\\&\left.+H\left[\frac{\upsilon^2}{ab}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\frac{\upsilon}{b}\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+\frac{\upsilon}{a}\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\mathrm{i}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon+1}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]\right\}\end{aligned}\tag{24}$$

利用 Cramer 法则求得：

$$A=-\frac{1}{\Delta^*}\left[GK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\frac{\upsilon}{b}K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)-H\sqrt{\mathrm{i}}K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right] \tag{25}$$

$$B=\frac{1}{\Delta^*}\left[GI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\frac{H\upsilon}{b}I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+H\sqrt{\mathrm{i}}I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right] \tag{26}$$

把(25)和(26)式代入(3)式可得边值问题(1)的解：

$$y=-\frac{xI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)}{\Delta^*}\left[GK_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\frac{H\upsilon}{b}K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)-H\sqrt{\mathrm{i}}K_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]$$
$$\frac{K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)}{\Delta^*}\left[GI_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+\frac{H\upsilon}{b}I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)+H\sqrt{\mathrm{i}}I_{\upsilon+1}\left(\sqrt{\mathrm{i}}b\right)\right]$$

再利用(24)式以及引理 3，并经整理后得到(22)式。

由定理 1 和定理 2，可得到如下在实际应用中十分有用几个的推论。

推论 1：在边值问题(1)或(13)中，若齐次右边界条件为 $y\left(b\right)=0$ (即 $H=0,G\neq0$)，则相应的相似核函数：

$$\Phi\left(x\right)=\frac{\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)}{\frac{\upsilon}{a}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)} \tag{27}$$

推论 2：在边值问题(1)或(13)中，若齐次右边界条件为 $y'\left(b\right)=0$ (即 $G=0,H\neq0$)，则相应的相似核函数：

$$\Phi\left(x\right)=\frac{\frac{\upsilon}{b}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(x,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{i}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(x,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)}{\frac{\upsilon^2}{ab}\varphi_{\upsilon,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\frac{\upsilon}{b}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)-\sqrt{\mathrm{i}}\frac{\upsilon}{a}\varphi_{\upsilon,\upsilon+1}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)+\mathrm{i}\varphi_{\upsilon+1,\upsilon+1}\left(a,b,\sqrt{\mathrm{i}}\right)} \tag{28}$$

推论 3：边值问题(1)的解式(22)的结构中的第一个连分式有如下性质：

$$\left[y\left(x\right)+Fy'\left(x\right)\right]_{x=a}=\frac{D}{E+\frac{1}{F+\Phi\left(a\right)}} \tag{29}$$

(29)式反映了解在非齐次左边值处本质性的特征，在实际应用中起着十分重要的作用。

4. 相似构造法步骤

经过对引理 2、定理 1 和定理 2 的分析知，相似核函数实质上是边值问题(1)在一种特殊的非齐次左边值条件 $\left(y'\big|_{x=a}=1\right)$ 下的解且该解可由引解函数 $\varphi_{m,n}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right),\left(m=\upsilon,\upsilon+1;\ n=\upsilon,\upsilon+1\right)$ 和齐次右边值条件中的系数表示出来，而边值问题(1)的解又可由相似核函数以及非齐次左边值条件中的系数进行组装得到。

根据以上分析可建立求解 Thomson 方程边值问题的一种新方法(相似构造法)，其具体步骤如下：

第一步：根据(5)~(8)式，由 Thomson 方程的两个线性无关的解 $I_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)$、$K_\upsilon\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)$，作引解函数：$\varphi_{m,n}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right)$ $\left(m=\upsilon,\upsilon+1;n=\upsilon,\upsilon+1\right)$。

第二步：根据(14)式，由引解函数及齐次右边值条件 $\left[Gy+Hy'\right]_{x=b}=0$ 的系数 G、H 生成相似核函数：$\Phi\left(x\right)$，并计算 $\Phi\left(a\right)$。

第三步：根据(22)式，由非齐次左边界条件 $\left[Ey+\left(1+EF\right)y'\right]_{x=a}=D$ 的系数 D、E、F 与相似核函数进行组装而得到边值问题(1)的解。

实例 求解边值问题：

$$\begin{cases} x^2 y'' + xy' - \left(\mathrm{i}x^2 + 1\right) y = 0 \\ y'(x)\big|_{x=1} = 1 \\ 2y'(x)\big|_{x=2} = 0 \end{cases} \tag{30}$$

解：第一步由 $I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)$、$K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)$ 是边值问题(30)定解方程的两个线性无关解，根据(5)~(8)式作引解函数：

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right) &= K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right), \\ \varphi_{2,1}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right) &= K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right) + I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right), \\ \varphi_{1,2}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right) &= K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right) + I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right), \\ \varphi_{2,2}\left(x,y,\sqrt{\mathrm{i}}\right) &= K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right) - I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}y\right), \end{aligned}$$

第二步由(14)式构造相似核函数：

$$\begin{aligned} \Phi(x) = {} & \left[K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) + 2\sqrt{\mathrm{i}}K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - 2\sqrt{\mathrm{i}}I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] \\ & \times\Big\{K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - \sqrt{\mathrm{i}}\left[K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] \\ & +2\sqrt{\mathrm{i}}\left[K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] - 2\mathrm{i}\left[K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]\Big\}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(1) = {} & \left[K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) + 2\sqrt{\mathrm{i}}K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - 2\sqrt{\mathrm{i}}I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] \\ & \times\Big\{K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - \sqrt{\mathrm{i}}\left[K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] \\ & +2\sqrt{\mathrm{i}}\left[K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] - 2\mathrm{i}\left[K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]^{-1} \end{aligned}$$

第三步由(22)式可得边值问题(30)的解：

$$\begin{aligned} y = {} & \left[K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) + 2\sqrt{\mathrm{i}}K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - 2\sqrt{\mathrm{i}}I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] \\ & \times\Big\{K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - \sqrt{\mathrm{i}}\left[K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)I_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}x\right)K_1\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] \\ & +2\sqrt{\mathrm{i}}\left[K_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right] - 2\mathrm{i}\left[K_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)I_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right) - I_2\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)K_2\left(2\sqrt{\mathrm{i}}\right)\right]\Big\}^{-1} \end{aligned}$$

5. 结论

根据相似构造法的步骤知：只需要知道边值问题的定解方程的两个线性无关解，首先构造二元函数并由二元函数生成引解函数，其次由引解函数以及非齐次左边界条件中的系数构造相似核函数，最后由相似核函数以及其次右边界条件中的系数进行组装得到边值问题的解。应用相似构造法解该类边值问题可以把复杂的问题简单化，到达事半功倍的效果。

一方面相似构造法能够避免繁琐的求解过程，另一方面该方法还有利于计算机程序员编程；同时它不仅是微分方程边值问题解的理论创新，更是一种思想创新。另外，从最终构造出来的解的结构式看很容易发现边值问题的解与边界条件中的系数之间的关系，这对于该类边值问题在工程中的应用有着非常重要的实际意义。

参考文献 (References)

[1] 闵嗣鹤, 严士健. 初等数论(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
[2] 李顺初, 伊良忠, 郑鹏社. 微分方程定解问题解的相似结构[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2006, 43(4): 933-934.

[3] 贾闽惠, 李顺初. Bessel 方程的边值问题解的相似结构[J]. 大学数学, 2005, 21(5): 37-39.
[4] 李顺初. 二阶齐次线性微分方程的边值问题的解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2009, 28(5): 40-41, 90.
[5] 严娟, 李顺初, 邢承林. 二阶欧拉方程的一类边值问题的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2009, 28(6): 86-88.
[6] 李全勇, 李顺初, 迟颖. 常系数齐次线性微分方程组边值问题解的相似结构[J]. 四川兵工学报, 2010, 31(4): 126-129.
[7] 李顺初. 微分方程解的相似结构的初探与展望[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2010, 29(2): 223-226, 238.
[8] 李顺初, 郑鹏社, 张宇飞. 复合油藏试井分析解的相似结构[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(3): 23-28.
[9] 唐乙斌, 李顺初, 严娟, 李全勇. Tschebyscheff 方程边值问题解的相似结构[J]. 四川兵工学报, 2011, 32(1): 155-156.
[10] J. D. Tian, S. C. Li. The formal similarity of solutions in the Laplace space on the class of quasilinear partial differential equation. Mathematical Theory and Applications, 2004, 24(2): 66-73.
[11] M. H. Jia, S. C. Li. The formal similarity of solutions in the Laplace space on the class of fluid flow differential equation. Journal of Electronic Science and Technology of China, 2005, 3(2): 172-174.
[12] J.-P. Su, S.-C. Li and C.-J. Li. The similar of solutions in the Laplace space of composite parabolic partial differential equation. Journal of Zaozhuang University, 2009, 26(2): 6-11.
[13] 李顺初. 一类偏微分方程组的 Laplace 空间解的形式相似性[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2007, 26(4): 83-86.
[14] 李顺初, 郑鹏社, 张宇飞. 复合油藏试井分析解的相似结构[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(3): 23-28.
[15] 李顺初, 郑鹏社, 张宇飞. 合采油藏试井分析解的相似结构[J]. 高校应用数学学报, 2009, 24(2): 234-238.
[16] 李顺初, 张建军. 分形双孔介质油藏试井分析解的相似结构[J]. 西华大学学报(自然科学版), 2006, 25(1): 40-43.
[17] W. Adamson. A textbook of physical chemistry. New York: Academic Press, 1973: 308-315.
[18] 刘式适, 刘式达. 特殊函数(第二版)[M]. 北京: 气象出版社, 2002.
[19] 李顺初, 黄柄光. Lpalace 变换与 Bessel 函数及试井分析理论基础[M]. 北京: 石油工业出版社, 2000.
[20] 郭玉翠. 数学物理方法学习指导[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

