Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 34-41
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.21005 Published Online February 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

The Time-Periodic Solution for Nonlinear Wave Equation

Weiyu Zhao, Ping Gao

College of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou
Email: zhaoweiyu0321@126.com, mapgao@yahoo.com.cn

Received: Nov. 1st, 2012; revised: Nov. 9th, 2012; accepted: Nov. 20th, 2012

Abstract: In this paper, we study Kuramoto-Sivashinsky equation with periodic boundary condition. The existence and uniqueness of a time-periodic solution is proved by the Galerkin methed and Leray-Schauder fixed point theorem.

Keywords: Kuramoto-Sivashinsky Equation; Galerkin Method; Leray-Schauder Fixed Point Theorem

非线性波动方程的时间周期解

赵维毓，高　平

广州大学数学与信息科学学院，广州
Email: zhaoweiyu0321@126.com, mapgao@yahoo.com.cn

收稿日期：2012 年 11 月 1 日；修回日期：2012 年 11 月 9 日；录用日期：2012 年 11 月 20 日

摘　要：本文利用伽辽金方法，Leray-Schauder 不动点定理和先验估计，证明了带周期外力和周期边界的非线性 Kuramoto-Sivashinsky 方程时间周期解的存在性。

关键词：Kuramoto-Sivashinsky 方程；伽辽金方法；Leray-Schauder 不动点定理

1. 引言

早在 1977 年，Sivashinsky 在研究空间二维层焰面的微热扩散不稳定性时导出了 Kuramoto-Sivashinsky 方程 $u_t+uu_x+\alpha u_{xx}+\beta u_{xxxx}=0$，它描述了斜平面上沿其向下流动的粘性流体上的非线性演化方程，无论是它的物理背景还是该方程本身都显示出包括混沌的非平凡的时空动力学行为。此方程第二项是非线性项，给周期解的研究带来了技术性的困难，文章比较系统的解决了这个问题，给 Kuramoto-Sivashinsky 方程的研究作了补充和完善。

本文考察带周期外力项和周期边界条件的非线性发展 Kuramoto-Sivashinsky 方程

$$u_t=-uu_x-\alpha u_{xx}-\beta u_{xxxx}+f, x\in\Omega, t\in R^+ \tag{1.1}$$

$$u(x,t)=u(x+L,t), x\in\Omega \tag{1.2}$$

$$f(x)=f(x+\omega) \tag{1.3}$$

其中 $u=u(x,t)$ 是一个定义在 $\Omega\times(0,t)$ 上的实值函数，$\Omega\in[0,L]\times[0,L]$，参数 α、β 均为实数。

本文将证明问题(1.1)~(1.3)的时间周期解的存在性，关于非线性发展方程的周期解参见文献[1-6]。本文在第一部分中给出研究空间，在第二部分中应用 Leray-Schauder 不动点定理[7]，给出近似解的构造，第三部分中运

用 Young 不等式和 Hölder 不等式[8]，Poincaré不等式[9]，及 Gagliardo-Nirenberg 不等式[10]，给出一致的先验估计，在第四部分中证明本文的主要结论，在第五部分中给出本文的总结。

全文使用以下记号[11-13]：

$$L^2=\left\{u\in L^2\left(\Omega\right):u\left(x,t\right)=u\left(x+L,t\right)\right\},$$

$$H^k=\left\{u\in H^k:u\left(x,t\right)=u\left(x+L,t\right)\right\},k=1,2,3,4$$

$$\left(u,v\right)=\int_\Omega u\left(x\right)\overline{v\left(x\right)}\mathrm{d}x\text{，}\left\|u_{mxxx}\right\|^2=\int_\Omega\left|u\right|^2\mathrm{d}x$$

$C^k\left(\omega,x\right)$={ $f:\left[0,\infty\right)\to X$ ： f^i 是连续的， $i=0,1,\cdots,k$ ， f 是一个以 ω 为周期的函数}。当 $k=0$ 时，$C^0\left(\omega,x\right)=C\left(\omega,x\right)$，为简单起见，文中用 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_{L^2}$，记 $A=-\Delta$， $D\left(A\right)=H^2$ 。

2. 近似解的构造

为了证明问题(1.1)~(1.3)近似解的存在性，令 $\left\{\omega_j\right\}\left(j=1,2,\cdots,m\right)$ 是空间 L^2 的标准正交基，且满足 $A\omega_j=-\lambda_j\omega_j,j=1,2,\cdots,m$ ， λ_j 是带本征向量 ω_j $\left(j=1,2,\cdots,m\right)$ 的算子 A 的本征值，对任意的正整数 m，有由 $\left\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m\right\}$ 生成的空间 H_m 。

定义 2.1 (问题(1.1)~(1.3)的近似解)。让 $f\in C\left(\omega,H^1\right)$， $u_m=\sum_{j=1}^m g_{jm}\left(t\right)\omega_j$ 是问题(1.1)~(1.3)的近似解，且满足任意的 $m\in N$， $\left(g_{1m},g_{2m},\cdots,g_{mm}\right)\in C^1\left(\omega,R\right)$。 $u_m\in C^1\left(\omega,H_m\right)$，$N$、$R$ 分别是自然数集和实数集，则有

$$\left(u_{mt}+u_mu_{mx}+\alpha u_{mxx}+\beta u_{mxxxx},\omega_j\right)=\left(f,\omega\left(j\right)\right),j=1,2,\cdots,m.\tag{2.1}$$

为证明(1.1)~(1.3)有一个近似解，运用 Leray-Schauder 不动点定理，对任意固定 $u_m\left(t\right)=\sum_{k=1}^m d_{km}\left(t\right)\omega_k\in C^1\left(\omega,H_m\right)$，考虑如下的线性常微分方程系

$$\left(u_{mt}+\mu v_mv_{mx}+\alpha u_{mxx}+\beta u_{mxxxx},\omega_j\right)=\left(f,\omega\left(j\right)\right),0\le u\le1,j=1,2,\cdots,m.\tag{2.2}$$

通过线性常微分方程的古典理论，系统有一个唯一的以 ω 为周期的解 $g_{jm}\left(t\right)$，来自空间 $C^1\left(\omega,H_m\right)$ 到自身的连续紧映射 F_μ： $v_m\left(t\right)\to u_m\left(t\right)$，显然 F_μ 在 $0\le u\le1$ 上是完全连续和一致连续的，显然，当 $\mu=0$ 时，线性系统(2.2)有一个唯一解，因此通过 Leray-Schauder 不动点定理，为证明原方程近似解的存在性，只需证对(2.2)的所有可能的近似解满足下列估计式：

$$\sup_{0\le t\le\omega}\left\|u_{mt}\left(t\right)\right\|\le K\tag{2.3}$$

引理 2.2 令 $f\in C\left(\omega,H\right)$，那么存在一个正常数 K_1，使得

$$\sup_{0\le t\le\omega}\left\|\nabla u_m\right\|^2+\left\|u_{mt}\right\|^2+\left\|\Delta u_{mt}\right\|^2\le K_1\tag{2.4}$$

其中 K_1 仅仅依赖于 α ， β ， δ ， f ，d，L。

证明：将(1.1)式乘以 g_{jm}，并对 j 从 1 到 m 求和

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|u_m\right\|^2+\int_\Omega u_mu_{mx}u_m\mathrm{d}x-\alpha\left\|\nabla u_m\right\|^2+\beta\left\|\Delta u_m\right\|^2=\int_\Omega fu_m\mathrm{d}x\tag{2.5}$$

由 Young 不等式，Gagliardo-Nirenberg 不等式，得

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_mu_{mx}u_m\mathrm{d}x&\le\left\|u_m\right\|_4\left\|u_m\right\|_4\left\|u_{mx}\right\|\le\left\|u_{mx}\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|u_m\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|u_{mx}\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|u_m\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|u_{mx}\right\|\\&\le\left\|u_{mx}\right\|^2\left\|u_m\right\|\le\frac{\left\|u_{mx}\right\|^4}{2}+\frac{\left\|u_m\right\|^2}{2}\end{aligned}$$

则有，

$$\int_{\Omega}u_m u_{mx}u_m\mathrm{d}x\le\frac{\|u_{mx}\|^4}{2}+\frac{\|u_m\|^2}{2} \tag{2.6}$$

由(2.5)，(2.6)，Hölder 不等式，Young 不等式和 Poincaré 不等式，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mx}\|^2-\alpha\|\nabla u_m\|^2+\beta\|\nabla u_m\|^2&=\int_{\Omega}fu_m\mathrm{d}x-\int_{\Omega}u_m u_{mx}u_m\mathrm{d}x\\&\le\frac{\|f\|^2}{2}+\frac{\|u_m\|^2}{2}-\frac{\|u_{mx}\|^4}{2}-\frac{\|u_m\|^2}{2}\le\frac{\|f\|^2}{2}-\frac{\|u_{mx}\|^4}{2}\end{aligned} \tag{2.7}$$

则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|^2+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\|\nabla u_m\|^2+\beta\|\Delta u_m\|^2\le\frac{\|f\|^2}{2}\le C_0 \tag{2.8}$$

$$\|\nabla u_m\|^2\le C_0$$

将(1.1)式乘以 g'_{jm}，并对 j 从 1 到 m 求和

$$\begin{aligned}\|u_{mt}\|^2+\frac{\beta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\Delta u_m\|^2-\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u_m\|^2&\le\frac{\|f\|^2}{2}+\|u_{mx}\|^2\|u_m\|\\&\le\frac{\|f\|^2}{2}+\|u_{mx}\|^3\le\frac{\|f\|^2}{2}+C_0=C_1\end{aligned} \tag{2.9}$$

(2.8) + δ (2.9)，得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|u_m\|^2+\frac{\delta\beta}{2}\|\Delta u_m\|^2-\frac{\delta\alpha}{2}\|\nabla u_m\|^2\right)+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\|\nabla u_m\|^2\\&+\beta\|\Delta u_m\|^2+\frac{\delta}{2}\|u_{mt}\|^2\le C_0+\delta C_1=C_2\end{aligned} \tag{2.10}$$

在 $[0,\omega]$ 积分(2.10)式，得

$$\int_0^{\omega}\left(\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\|\nabla u_m\|^2+\beta\|\Delta u_m\|^2+\frac{\delta}{2}\|u_{mt}\|^2\right)\mathrm{d}t\le C_2\omega$$

取 $\alpha<\frac{1}{2}$，$\delta>0$，则存在 $t^*\in(0,\omega)$，$d>0$，使得

$$\left\|\nabla u_m\left(t^*\right)\right\|^2+\left\|\Delta u_m\left(t^*\right)\right\|^2+\left\|u_{mt}\left(t^*\right)\right\|^2\le\frac{C_2}{d}$$

关于 t 从 t^* 到 $t\left(t\in\left(t^*,t^*+\omega\right)\right)$ 积分(2.10)式，存在 $L>0$，使得

$$\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2+\left\|\Delta u_m(t)\right\|^2+\left\|u_{mt}(t)\right\|^2\le C_2\omega+\frac{C_2L}{d}=K_1$$

因此

$$\sup_{0\le t\le\omega}\left\|\nabla u_m(t)\right\|^2+\left\|\Delta u_m(t)\right\|^2+\left\|u_{mt}(t)\right\|^2\le K_1 \tag{2.11}$$

因此，我们能够得到估计 $\sup\limits_{0\le t\le\omega}\left\|u_{mt}(t)\right\|\le K$，通过 Leray-Schauder 不动点定理，我们能得到下面的定理。

定理 2.1 令 $f\in C(\omega,H)$，对任意给定的数 $m\in N$，(1.1)~(1.3)有一系列近似解

$$u_m(t)\in C^1(\omega,H_m)$$

3. 先验估计

前面已经证明了问题(1.1)~(1.3)有一系列近似解，为证明问题(1.1)~(1.3)的近似解序列$\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$的收敛性，需要对u_m给出一个先验估计。

引理 3.1 若$f \in C\left(\omega, H^2\right)$，那么存在一个正常数$K_2 = K_2\left(\alpha,\beta,\delta,\omega,K_1,f\right)$，满足

$$\sup_{0\le t\le\omega}\|u_{mx}\|_3^3 + \|u_{mxxx}\|^2 + \|\nabla u_{mt}\|^2 \le K_2$$

证明：将(1.1)式分别乘以$-\lambda_j g_{jm}$和$-\lambda_j g'_{jm}$，并对j从 1 到m分别求和

$$\left(u_{mt}+u_m u_{mx}+\alpha u_{mxx}+\beta u_{mxxxx},\Delta u_m\right)=\left(f,\Delta u_m\right) \tag{3.1}$$

$$\left(u_{mt}+u_m u_{mx}+\alpha u_{mxx}+\beta u_{mxxxx},\Delta u_{mt}\right)=\left(f,\Delta u_{mt}\right) \tag{3.2}$$

由(3.1)，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mx}\|^2-\int_\Omega u_m u_{mx}u_{mxx}\mathrm{d}x-\alpha\|u_{mxx}\|^2+\beta\|u_{mxxx}\|^2=\int_\Omega f u_{mxx}\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

由 Hölder 不等式，Young 不等式，引理 2.1，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mx}\|^2+\frac{1}{2}\|u_{mx}\|_3^3+\beta\|u_{mxxx}\|^2&=\int_\Omega f u_{mxx}\mathrm{d}x+\alpha\|u_{mxx}\|^2\le\frac{\|f\|^2}{2}+\frac{\|u_{mxx}\|^2}{2}+\alpha\|u_{mxx}\|^2\\&\le\frac{\|f\|^2}{2}+\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)K_1\le\frac{\|f\|^2}{2}+C_3\end{aligned}$$

则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mx}\|^2+\frac{1}{2}\|u_{mx}\|_3^3+\beta\|u_{mxxx}\|^2\le\frac{\|f\|^2}{2}+C_3 \tag{3.4}$$

由(3.2)，得

$$\|\nabla u_{mt}\|^2-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mx}\|_3^3+\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxx}\|^2-\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxxx}\|^2=\int_\Omega f u_{mtxx}\mathrm{d}x\le\|\nabla f\|\|\nabla u_{mt}\|\le\frac{\|\nabla f\|^2}{2}+\frac{\|\nabla u_{mt}\|^2}{2}$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_{mt}\|^2-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mx}\|_3^3+\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxx}\|^2-\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxxx}\|^2\le\frac{\|\nabla f\|^2}{2} \tag{3.5}$$

(3.4) + δ (3.4)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\|u_{mx}\|^2-\frac{\delta}{2}\|u_{mx}\|_3^3+\frac{\alpha\delta}{2}\|u_{mxx}\|^2-\beta\delta\|u_{mxxx}\|^2\right)+\frac{1}{2}\|u_{mx}\|_3^3+\beta\|u_{mxxx}\|^2+\frac{\delta}{2}\|\nabla u_{mt}\|^2\le\frac{\|f\|^2}{2}+C_3+\frac{\|\delta\nabla f\|^2}{2}\le C_4 \tag{3.6}$$

在$[0,\omega]$积分(3.6)式，得

$$\int_0^\omega\left(\frac{1}{2}\|u_{mx}\|_3^3+\beta\|u_{mxxx}\|^2+\frac{\delta}{2}\|\nabla u_{mt}\|^2\right)\mathrm{d}t\le C_4\omega$$

取$\delta>0$，则存在$t^{**}\in(0,\omega)$，$\mathrm{d}>0$，使得

$$\left\|u_{mx}\left(t^{**}\right)\right\|_3^3+\left\|u_{mxxx}\left(t^{**}\right)\right\|^2+\left\|\nabla u_{mt}\left(t^{**}\right)\right\|^2\le C_5$$

关于t从t^{**}到$t\left(t\in\left(t^{**},t^{**}+\omega\right)\right)$积分(3.6)式，使得

$$\|u_{mx}(t)\|_3^3+\|u_{mxxx}(t)\|^2+\|\nabla u_{mt}(t)\|^2\le C_6$$

结合(2.11)式，存在一个常数 K_2 仅仅依赖于 $\alpha,\beta,\delta,\omega,K_1,f$，使得

$$\sup_{0\le t\le\omega}\|u_{mx}\|_3^3+\|u_{mxxx}\|^2+\|\nabla u_{mt}\|^2\le K_2$$

引理 3.2 若 $f\in C(\omega,H^2)$，那么存在一个正常数 $K_3=K_3(\alpha,\beta,\omega,K_1,K_2,f)$，使得

$$\sup_{0\le t\le\omega}\|u_{mxxxx}\|^2\le K_3$$

证明：将(1.1)式分别乘以 $\lambda_j^2 g_{jm}$ 和 $\lambda_j^2 g'_{jm}$，并对 j 从 1 到 m 分别求和，得

$$(u_{mt}+u_mu_{mx}+\alpha u_{mxx}+\beta u_{mxxxx},u_{mxxxx})=(f,u_{mxxxx}) \tag{3.7}$$

$$(u_{mt}+u_mu_{mx}+\alpha u_{mxx}+\beta u_{mxxxx},u_{mtxxxx})=(f,u_{mtxxxx}) \tag{3.8}$$

由(3.7)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxx}\|^2+\int_\Omega u_mu_{mx}u_{mxxxx}\mathrm{d}x-\alpha\|u_{mxxx}\|^2+\beta\|u_{mxxxx}\|^2=\int_\Omega fu_{mxxxx}\mathrm{d}x$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式，得

$$\int_\Omega u_mu_{mx}u_{mxxxx}\mathrm{d}x\le C_7\|u_m\|_4\|u_{mx}\|_4\|u_{mxxxx}\|\le C_8\|u_{mx}\|^{\frac12}\|u_m\|^{\frac12}\|u_{mxx}\|^{\frac12}\|u_{mx}\|^{\frac12}\le C_9\|u_{mxxxx}\|^2+\frac{\|\Delta f\|^2}{2}$$

则有

$$\int_\Omega u_mu_{mx}u_{mxxxx}\mathrm{d}x\le C_9\|u_{mxxxx}\|^2+\frac{\|\Delta f\|^2}{2} \tag{3.9}$$

由 Hölder 不等式，Young 不等式，和(3.9)，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxx}\|^2+\beta\|u_{mxxxx}\|^2&\le\int_\Omega fu_{mxxxx}\mathrm{d}x+\alpha\|u_{mxxx}\|^2+\|\Delta f\|\|\Delta u_m\|\\&\le C_9\|u_{mxxxx}\|^2+\alpha K_2+\frac{\|\Delta f\|^2}{2}+\frac{\|\Delta u_m\|^2}{2}\\&\le C_9\|u_{mxxxx}\|^2+\alpha K_2+\frac{\|\Delta f\|^2}{2}+\frac{K_1}{2}\end{aligned} \tag{3.10}$$

由(3.8)式，得

$$\|u_{mtxx}\|^2+\int_\Omega u_mu_{mx}u_{mxxxx}\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxxx}\|^2+\frac{\beta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxxxx}\|^2=\int_\Omega fu_{mtxxxx}\mathrm{d}x$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Young 不等式，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_mu_{mx}u_{mtxxxx}\mathrm{d}x&\le\int_\Omega u_{mx}u_{mx}u_{mtxxx}\mathrm{d}x+\int_\Omega u_mu_{mxx}u_{mtxxx}\mathrm{d}x\\&\le 3\int_\Omega u_{mxx}u_{mx}u_{mtxx}\mathrm{d}x+\int_\Omega u_mu_{mxxx}u_{mtxx}\mathrm{d}x\\&\le 3C_{12}\|u_{mxx}\|_4\|u_{mx}\|_4\|u_{mtxx}\|+C_{13}\|u_m\|_4\|u_{mxxx}\|_4\|u_{mtxx}\|\\&\le\left(C_{14}\|u_{mxxx}\|^{\frac12}\|u_{mxx}\|^{\frac12}\|u_{mxx}\|^{\frac12}\|u_{mx}\|^{\frac12}+C_{15}\|u_{mx}\|^{\frac12}\|u_m\|^{\frac12}\|u_{mxx}\|\right)\|u_{mtxx}\|\\&\le C_{16}\|u_{mtxx}\|^2\end{aligned}$$

则有

$$\int_{\Omega} u_m u_{mx} u_{mtxxxx} \mathrm{d}x \le C_{16} \|u_{mtxx}\|^2 \tag{3.11}$$

由 Hölder 不等式，Young 不等式，得

$$\|u_{mtxx}\|^2 - \frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxxx}\|^2 + \frac{\beta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxxxx}\|^2 \le \int_{\Omega} u_m u_{mx} u_{mtxxxx}\mathrm{d}x + \int_{\Omega} f u_{mtxxxx}\mathrm{d}x \le C_{16}\|u_{mtxx}\|^2 + \frac{\|\Delta f\|^2}{2} + \frac{\|\Delta u_{mt}\|^2}{2}$$

则有

$$C_{17}\|\Delta u_{mt}\|^2 - \frac{\alpha}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxxx}\|^2 + \frac{\beta}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{mxxxx}\|^2 \le \frac{\|\Delta f\|^2}{2} \tag{3.12}$$

(3.10) + δ (3.12)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\Delta u_m\|^2 - \frac{\alpha}{2}\|u_{mxxx}\|^2 + \frac{\beta}{2}\|u_{mxxxx}\|^2\right) + C_{10}\|u_{mxxxx}\|^2 + C_{17}\delta\|\Delta u_{mt}\|^2 \le \|\Delta f\|^2 + C_{11} \le C_{18} \tag{3.13}$$

在$[0,\omega]$积分(3.13)式，得

$$\int_0^{\omega}\left(C_{10}\|u_{mxxxx}\|^2 + C_{17}\delta\|\Delta u_{mt}\|^2\right)\mathrm{d}t \le C_{18}\omega$$

取$\delta > 0$，则存在$t^{***} \in (0,\omega)$，使得

$$\left\|u_{mxxxx}\left(t^{***}\right)\right\|^2 + \left\|\Delta u_{mt}\left(t^{***}\right)\right\|^2 \le C_{19}$$

关于 t 从t^{***}到$t\left(t \in \left(t^{***}, t^{***}+\omega\right)\right)$，积分(3.13)式，使得

$$\left\|u_{mxxxx}(t)\right\|^2 + \left\|\Delta u_{mt}(t)\right\|^2 \le K_3$$

因此，

$$\sup_{0\le t\le\omega}\|u_{mxxxx}\|^2 \le K_3$$

4. 时间周期解

定理 4.1 假定$f \in C\left(\omega, H^2\right)$，那么方程(1.1)~(1.3)有一个解满足$u(x,t) \in C^1\left(\omega, H^4\right)$。

证明：任意给定$m \in N$，已经证明了方程(1.1)~(1.3)有一个近似解$u_m(t)$。例如系统(1.4)成立，并且有一些关于$u_m(t)$范数的估计，对于每一个固定的 t，范数$\|u_m(t)\|_{H^4}$的统一边界使得它可能选择一弱收敛于$u_t \in H^4$的子序列$\{u_{mk}(t)\}$，那将能证明$u(x,t)$是问题(1.1)~(1.3)的一个解。事实上，$\{u_{mk}(t)\}$在空间分别弱收敛于$u(x,t)$，就有下面的结果：对任意给定的$t \in [0,\omega)$，

$$u_{mk}(t) \to u(t)，(k\to\infty)\text{在 } H^4 \text{ 内弱收敛} \tag{4.1}$$

$$u_{mkxx}(t) \to u_{xx}(t)，(k\to\infty)\text{在 } H^1 \text{ 内弱收敛} \tag{4.2}$$

由于H^4紧嵌入L^2中，则可以选择一个子序列$\{u_{mk}(t)\}$，并且仍用$\{u_{mk}(t)\}$表示，使得对于任意给定的$t \in [0,\omega)$，

$$u_{mk}(t) \to u(t)，(k\to\infty)\text{在 } L^2 \text{ 内强收敛} \tag{4.3}$$

$$u_{mk}(t) \to u(t)，(k\to\infty)\text{在 } \Omega \text{ 内几乎处处收敛} \tag{4.4}$$

由(1.5)，引理 2.1，对于任意给定的$t \in [0,\omega)$，$\{u_{mk}(t)\}$在空间H^2内一致弱收敛，仍用$\{u_{mk}(t)\}$来表示，对于任

意给定的 $t\in[0,\omega)$，

$$\Delta u_{mk}(t)\to\Delta u(t)，\ (k\to\infty)\text{在 } L^2 \text{ 内弱收敛} \tag{4.5}$$

引理 3.2，对于任意给定的 $t\in[0,\omega)$，$\{u_{mk}(t)\}$ 在空间 L^2 内弱收敛，对于任意给定的 $t\in[0,\omega)$，

$$u_{mkxxxx}(t)\to u_{xxxx}(t)，\ (k\to\infty)\text{在 } L^2 \text{ 内弱收敛} \tag{4.6}$$

类似于(4.3)，我们可以选择一子序列 $\{u_{mk}(t)\}$，并且仍用 $\{u_{mk}(t)\}$ 表示，使得对于任意给定的 $t\in[0,\omega)$，

$$\nabla u_{mk}(t)\to\omega\in H^3，\ (k\to\infty)\text{在 } L^2 \text{ 内强收敛} \tag{4.7}$$

$$\nabla u_{mk}(t)\to\omega，\ (k\to\infty)\text{在 } \Omega \text{ 内几乎处处收敛} \tag{4.8}$$

用(4.6)和(4.8)，得

$$\nabla u_{mk}(t)\to\nabla u(t)，\ (k\to\infty)\text{在 } \Omega \text{ 内几乎处处收敛} \tag{4.9}$$

由不等式(1.6)，引理 2.1，引理 3.1 和引理 3.2

$$\|u_m u_{mx}\|\le C$$

其中 C 是一个常数。由(4.4)和(4.9)得

$$\begin{aligned}\|u_{mk}u_{mkx}-uu_x\| &\le \|u_{mk}(u_{mkx}-u_x)+u_x(u_{mk}-u)\|\\ &\le \|u_{mk}\|_4\|(u_{mkx}-u_x)\|_4+\|u_x\|_4\|(u_{mk}-u)\|_4\\ &\le \|\nabla u_{mk}\|\|(u_{mkx}-u_x)\|+\|\nabla u\|\|(u_{mk}-u)\|\\ &\to 0,\ k\to\infty\end{aligned}$$

因此

$$u_{mk}(t)u_{mkx}(t)\to u(t)u_x(t)，\ (k\to\infty)\text{在 } \Omega \text{ 内几乎处处收敛} \tag{4.10}$$

$$u_{mk}(t)u_{mkx}(t)\to u(t)u_x(t)，\ (k\to\infty)\text{在 } L^2 \text{ 内弱收敛} \tag{4.11}$$

从 $u_m(t)\in C^1(\omega,H^4)$，引理 3.2 和(4.1)，有 $u(t)\in C^1(\omega,H^4)$，对于任意给定的 $t\in[0,\omega)$，

$$u_{mkt}(t)\to u_m(t)，\ (k\to\infty)\text{在 } L^2 \text{ 内弱收敛} \tag{4.12}$$

方程(1.5)的每一项乘以任意的 $\overline{C_{jm}(t)}\in C(\omega,R)$ 并对 j 从 1 到 m 求和，这样给出

$$(u_{mt}+u_m u_{mx}+\alpha u_{mxx}+\beta u_{mxxxx},\eta)=(f,\eta),\forall\eta\in C^1(\omega,H_m) \tag{4.13}$$

对于任意给定的 K_0，通过 $H_{mK_0}\subset H_{mK_0+1}\subset\cdots$，当 $k\ge K_0$ 时，有

$$(u_{mkt}+u_{mk}u_{mkx}+\alpha u_{mkxx}+\beta u_{mkxxxx},\eta)=(f,\eta),\forall\eta\in C^1(\omega,H_{mK_0}) \tag{4.14}$$

应用(4.5)，(4.11)，(4.12)，(4.14)式中取极限 $k\to\infty$，得

$$(u_t+uu_x+\alpha u_{xx}+\beta u_{xxxx},\eta)=(f,\eta),\forall\eta\in C^1(\omega,H_{mK_0}) \tag{4.15}$$

这里的数 K_0 是任意的，使得对所有的 $\forall\eta\in C^1(\omega,\cup_{m=1}^{\infty})$ 方程(4.15)成立。由于 H_m 在 L^2 中稠密，函数 $u(t)$ 对于所有的 $\eta\in C^1(\omega,L^2)$ 满足方程(4.15)。于是 $u(t)$ 是问题(1.1)~(1.3)的一个解。这样就完成了定理 4.1 的证明。

5. 小结

本文证明了非线性波动方程的时间周期解，由原方程不能直接使用嵌入定理，所以我们先利用 Galerkin 方

法构造了近似解，由于这是个有限问题，紧致性是满足的，然后利用 Leray-Schauder 不动点定理证明时间周期解的存在性，最后运用周期解的先验估计和紧性证明了近似解的极限就是原方程的时间周期解。

参考文献(References)

[1] A. V. Babin, M. I. Vishik. Attractors of partial differential equations and estimate of their dimension. Russian Mathematical Surveys, 1983, 38(4): 133-187.
[2] R. Temam. Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Berlin: Springer, 1988.
[3] 郭柏灵. 无穷维动力系统(上，下)[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
[4] J. L. Lions. Quelques methods de resolution des problemes aux limites non lineaires. Paris: Dunod, 1969.
[5] H. Kato. Existence of periodic solutions of the Navier-Stokes equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 208(1997): 141-157.
[6] M. Nakao. Bounded, periodic and almost periodic solutions of some nonlinear wave equations with a dissipative term. Journal of the Mathematical Society of Japan, 1987, 30(1987): 375-394
[7] D・吉耳巴格, N・S・塔丁格著, 叶其孝译. 二阶椭圆形偏微分方程[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1977.
[8] W. Rudin. Functional analysis. New York: McGraw-Hall, 1973.
[9] 陈亚浙, 吴兰成. 二阶椭圆形方程与椭圆形方程组[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
[10] A. Friedman. Partial differential equations. New York: Academic Press, 1969.
[11] 齐民友, 吴方同. 广义函数与数学物理方程(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
[12] R. A. Adams 著, 叶其孝, 王耀东等译. 索伯列夫空间[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
[13] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.