Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 1-9
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.21001 Published Online February 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

Pricing Quanto Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Domestic and Foreign Interest Rates*

Yihong Ma[1], Guohe Deng[2]

[1]School of Mathematics Science & Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin
[2]College of Mathematics Science, Guangxi Normal University, Guilin
Email: marchmayi@163.com, dengguohe@mailbox.gxnu.edu.cn

Received: Oct. 15th, 2012; revised: Oct. 21st, 2012; accepted: Nov. 6th, 2012

Abstract: The quanto option is a contract which invests to foreign assets and whose payoff depends on not only the price of foreign stock, but also the effect of exchange rate and domestic and foreign interest rates. The quanto option is widely used in international trade and risk management. This paper considers the valuations for four types on quanto European call options under the assumption of foreign-stock price and exchange rate both satisfing a jump-diffusion model and domestic and foreign interest rates being random. The analytical price formulas for the quanto options are firstly obtained by applying martingale method and Girsanov measure transformation method with jump diffusion process. Secondly, these results in the proposed model are compared with those in the Black-Scholes model through numerical calculation. Finally, we analyze the interest rate and jumping parameters on option price effect.

Keywords: Quanto Options; Jump-Diffusion Model; Hull-White Stochastic Interest Rates; Martingale Method

跳扩散模型下国内外利率随机的双币种期权定价*

马奕虹[1]，邓国和[2]

[1]桂林电子科技大学数学与计算科学学院，桂林
[2]广西师范大学数学科学学院，桂林
Email: marchmayi@163.com, dengguohe@mailbox.gxnu.edu.cn

收稿日期：2012 年 10 月 15 日；修回日期：2012 年 10 月 21 日；录用日期：2012 年 11 月 6 日

摘　要：双币种期权是投资于国外风险资产的一种风险管理合约，其收益不仅依赖国外风险资产价格的变化，还受汇率及国内外利率的双重波动影响，在国际贸易及汇率风险对冲方面应用十分广泛。本文假设股价和汇率均服从 Merton 跳扩散模型，并考虑国内外利率满足 Hull-White 随机模型时四种双币种标准欧式看涨期权的定价。利用鞅方法和跳扩散过程的 Girsanov 测度变换法，给出了它们价格的显示式，通过数值实例比较了与 Black-Scholes 模型的相应结果，并分析利率参数和跳跃参数对期权价格的影响。

关键词：双币种期权；跳扩散模型；Hull-White 随机利率模型；鞅方法

1. 引言

近几十年金融创新浪潮席卷全球，各种金融衍生产品及更复杂的结构性产品(如理财产品)层出不穷，金融机构在投资过程中面临着越来越复杂的金融风险。为了有效管理这些风险，学者及金融工程从业者提出了各种风

*国家自然科学基金(40675023)和广西自然科学基金(0991091)资助。

险管理与对冲模型，其中期权定价模型是目前风险管理的研究热点内容之一。众所周知，许多实证研究表明经典 Black-Scholes(B-S)期权定价模型[1]的计算结果与实际期权市场数据存在较大偏差。为改进 B-S 模型，一是引入股票收益的不连续模型(即跳扩散模型)来描述股票市场存在重大突发事件。1976 年 Merton[2]首次引入复合 Poisson 过程刻画“跳”风险并建立正态跳扩散模型纠正了 B-S 模型难适应实际股票数据表现出的尖峰厚尾以及波动率“微笑”特征。其后，Mancini[3]的多个独立 Poisson 过程的跳扩散模型，Duffie[4]的仿射跳扩散模型，Chan[5]的几何 Levy 过程模型，Kou[6]的双指数跳扩散模型等都从不同侧面对 B-S 模型进行了改进。二是考虑利率风险，建立了更符合实际的随机利率模型。如 Vasicek[7]，Hull 和 White[8]，Heath、Jarrow 和 Morton[9]等，这是因为利率是一个重要的市场变量，也是金融衍生品定价过程中非常重要的折项因素。目前，有大量文献将跳扩散模型及随机利率模型两者结合起来考虑期权的定价，如 Paul Glasserman[10]和 Lijun[11]，张素梅[12]，李翠香[13]等。本文在这种结合模型下讨论一种奇异期权——双币种期权的定价。

双币种期权在国际贸易和投资中有广泛的应用，它是这样一种未定权益，其收益不仅依赖于外国货币表示的金融资产价格，还受到汇率及国内外利率的多重影响。因此能为投资者获得许多可选的投资及对冲风险的机会。文[14-16]考虑了 Black-Scholes 模型下双币种期权及几种双币种奇异期权的定价；文[17-20]考虑了国内外利率为随机的双币种及双币种重置、亚式期权、百慕大式互换期权的定价；文[21]考虑了随机波动率和随机相关系数下双币种期权的定价；文[22,23]考虑了跳扩散模型下双币种期权的定价。然而，同时考虑跳扩散及随机利率两者结合模型下的双币种期权定价并不多见。本文结合文[18]的方法，将文[23]的结论推广到跳扩散且国内外利率均服从 Hull-White 随机利率模型时的情形，并通过数值计算分析跳扩散与利率随机时模型中某些参数值变动对期权价格的影响。

2. 市场模型及问题描述

考虑一个无摩擦、无套利的金融市场。该市场有两种可连续交易的资产，一种是无风险资产(如债券)，另一种是风险资产 S (如股票)。给定完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},Q)$ 及其上定义的信息域 $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$，其中 $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ 是右连续且满足通常条件的 σ 代数流。由于市场存在跳风险，市场不是完全的，因此，可以选择一种特定的风险中性鞅测度来调整风险资产的价格，使之在该测度下的折现过程为鞅。不妨设 Q 就是风险中性的等价鞅测度并且金融市场满足 Merton 跳扩散模型的通常假设条件。记 S_t 表示 t 时刻外国股价， F_t 表示 t 时刻的汇率， $r_d(t), r_f(t)$ 分别表示 t 时刻国内外利率，于是在风险中性市场下，设 F_t 满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}F_t}{F_t}=\left[r_d(t)-r_f(t)-\lambda_F k_F\right]\mathrm{d}t+\sigma_F(t)\mathrm{d}W_F(t)+\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N_t^F}\left[V_i^F-1\right]\right)\\ F(0)=F_0>0,\end{cases} \tag{1}$$

其中波动率 $\sigma_F(t)>0$ 是时间 t 的连续函数。$W_F(t)$ 是标准布朗运动，N_t^F 为参数为常数 $\lambda_F>0$ 的一维齐次 Poisson 过程，$\{V_i^F\}, i\ge 1$ 是非负独立同分布的随机变量列，表示汇率的跳跃幅度。记 $Y_i^F=\ln V_i^F$，且设 $Y_i^F\sim N\left(\mu_{y_F},\sigma_{y_F}^2\right)$。这里 $k_F=E\left[V_i^F-1\right]=\mathrm{e}^{\mu_{y_F}+\frac{1}{2}\sigma_{y_F}^2}-1$。又另设外国股价 S_t 满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\left[r_f(t)-q(t)-\lambda_S k_S\right]\mathrm{d}t+\sigma_S(t)\mathrm{d}W_S(t)+\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{N_t^S}\left[V_i^S-1\right]\right)\\ S(0)=S_0>0,\end{cases} \tag{2}$$

其中波动率 $\sigma_S(t)>0$ 及红利率 $q(t)\ge 0$ 都是时间 t 的连续函数。$W_S(t)$ 是标准布朗运动，N_t^S 为参数为常数 $\lambda_S>0$ 的一维齐次 Poisson 过程，$\{V_i^S\}, i\ge 1$ 是非负独立同分布的随机变量列，表示股价的跳跃幅度。记 $Y_i^S=\ln V_i^S$，且设 $Y_i^S\sim N\left(\mu_{y_S},\sigma_{y_S}^2\right)$，这里 $k_S:=E\left[V_i^S-1\right]=\mathrm{e}^{\mu_{y_S}+\frac{1}{2}\sigma_{y_S}^2}-1$。本文进一步假定 $\mathrm{cov}(\mathrm{d}W_F,\mathrm{d}W_S)=0$，以及 $W_F(t)$，

$W_S(t)$ 分别与 $N_t^S, N_t^F, V_i^F, V_i^S$ 独立，N_t^F 与 N_t^S, V_i^F, V_i^S 独立，N_t^S 与 V_i^F, V_i^S 独立，V_i^F 与 V_i^S 独立。由文[15]可知 S_t 以本国投资人角度看时方程(2)飘移系数不变，即：

$$\delta_S^d(t) = r_f(t) - q(t), \tag{3}$$

于是应用 $It\hat{o}$ 公式得对 $\forall t \in [0,T]$ F_t, S_t 分别满足

$$F_T = F_t \exp\left\{\int_t^T \left[r_d(u) - r_f(u) - \frac{1}{2}\sigma_F^2(u)\right]\mathrm{d}u - \lambda_F k_F(T-t) + \int_t^T \sigma_F(u)\mathrm{d}W_F(u) + \sum_{i=N_t^F+1}^{N_T^F} Y_i^F\right\} \tag{4}$$

$$S_T = S_t \exp\left\{\int_t^T \left[r_f(u) - q(u) - \frac{1}{2}\sigma_S^2(u)\right]\mathrm{d}u - \lambda_S k_S(T-t) + \int_t^T \sigma_S(u)\mathrm{d}W_S(u) + \sum_{i=N_t^S+1}^{N_T^S} Y_i^S\right\} \tag{5}$$

现在假定国内外利率 $r_d(t), r_f(t)$ 是随机的，即满足 Hull-White 利率模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}r_d(t) = \left[a_d(t) - b_d(t)r_d(t)\right]\mathrm{d}t + \theta_d(t)\mathrm{d}B_d(t), \\ r_d(0) = r_d > 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}r_f(t) = \left[a_f(t) - b_f(t)r_f(t)\right]\mathrm{d}t + \theta_f(t)\mathrm{d}B_f(t), \\ r_f(0) = r_f > 0, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $a_d(t), a_f(t), b_d(t), b_f(t), \theta_d(t), \theta_f(t)$ 是非负且非随机连续并满足可积条件的函数。又 $B_d(t), B_f(t)$ 分别是一维标准布朗运动且假设 $W_S(t), W_F(t), B_d(t), B_f(t)$ 两两相互独立，$B_d(t), B_f(t)$ 独立于 $V^F, V^S, N^S, N^F, V_i^F, V_i^S$，又所有不确定性源都定义于 $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ 内且信息域 $\mathcal{F}_t$ 由 $W_S(t), W_F(t), B_d(t), B_f(t), N^S, N^F$ 联合生成。对任意的 $0 \le t \le s$，由 $It\hat{o}$ 公式及(6)得：

$$r_d(s) = r_d(t)\bar{\beta}_d(t,s) + \int_t^T a_d(u)\bar{\beta}_d(u,s)\mathrm{d}u + \int_t^T \theta_d(u)\bar{\beta}_d(u,s)\mathrm{d}B_d(u),$$

其中 $\bar{\beta}_d(u,v) = \mathrm{e}^{-\int_u^v b_d(\tau)\mathrm{d}\tau}$。记 $\hat{\beta}_d(u,v) = \int_u^v \bar{\beta}_d(u,s)\mathrm{d}s$，则由随机 Fubini 定理有

$$\int_t^T r_d(s)\mathrm{d}s = r_d(t)\hat{\beta}_d(t,T) + \int_t^T a_d(u)\hat{\beta}_d(u,T)\mathrm{d}u + \int_t^T \theta_d(u)\hat{\beta}_d(u,T)\mathrm{d}B_d(u).$$

记 $C_d(t,T,r_d) \triangleq r_d(t)\hat{\beta}_d(t,T) + \int_t^T a_d(u)\hat{\beta}_d(u,T)\mathrm{d}u$。则上式变成

$$\int_t^T r_d(s)\mathrm{d}s = C_d(t,T,r_d) + \int_t^T \theta_d(u)\hat{\beta}_d(u,T)\mathrm{d}B_d(u). \tag{8}$$

同理有

$$\int_t^T r_f(s)\mathrm{d}s = C_f(t,T,r_f) + \int_t^T \theta_f(u)\hat{\beta}_f(u,T)\mathrm{d}B_f(u), \tag{9}$$

其中 $\bar{\beta}_f(u,v) = \mathrm{e}^{-\int_u^v b_f(\tau)\mathrm{d}\tau}$，$\hat{\beta}_f(u,v) = \int_u^v \bar{\beta}_f(u,s)\mathrm{d}s$，以及 $C_f(t,T,r_f) \triangleq r_f(t)\hat{\beta}_f(t,T) + \int_t^T a_f(u)\hat{\beta}_f(u,T)\mathrm{d}u$。

引入记号

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_t^T \theta_f(u)\hat{\beta}_f(u,T)\mathrm{d}B_f(u), & Z_1 &= \int_t^T \sigma_S(u)\mathrm{d}W_S(u), \\ X_2 &= \int_t^T \theta_d(u)\hat{\beta}_d(u,T)\mathrm{d}B_d(u), & Z_2 &= \int_t^T \sigma_F(u)\mathrm{d}W_F(u), \\ \sigma_{X_1}^2 &= \int_t^T \theta_f^2(u)\hat{\beta}_f^2(u,T)\mathrm{d}u, & \sigma_{Z_1}^2 &= \int_t^T \sigma_S^2(u)\mathrm{d}u, \\ \sigma_{X_2}^2 &= \int_t^T \theta_d^2(u)\hat{\beta}_d^2(u,T)\mathrm{d}u, & \sigma_{Z_2}^2 &= \int_t^T \sigma_F^2(u)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

现给出四种双币种欧式看涨期权在到期日 T 的收益结构

1) 类型Ⅰ：

$$C^{(1)}\left(S_T,X_f,T\right)=F_0\max\left\{S_T-X_f,0\right\},\tag{10}$$

其中 F_0 表示固定汇率为常数，S_T 表示到期日 T 的外国股价，X_f 表示以外币计价的执行价格。

2) 类型Ⅱ：

$$C^{(2)}\left(S_T,F_T,X_d,T\right)=\max\left\{F_TS_T-X_d,0\right\}=\max\left\{S_T^*-X_d,0\right\},\tag{11}$$

其中 F_T 为到期日汇率，X_d 为本国货币计价的执行价格，S_T^* 为到期日本国货币计价的外国股价。

3) 类型Ⅲ：

$$C^{(3)}\left(S_T,F_T,X_f,T\right)=F_T\max\left\{S_T-X_f,0\right\},\tag{12}$$

4) 类型Ⅳ：

$$C^{(4)}\left(S_T,F_T,K,T\right)=S_T\max\left\{F_T-K,0\right\},\tag{13}$$

其中 K 表示汇率执行价格。

本文主要讨论上述四种类型期权在跳扩散及随机利率模型下的定价问题，并通过数值计算讨论了跳扩散和利率随机对期权价格的影响。

3. 主要结论

定理 1：设 $S,F,r_d(t),r_f(t)$ 满足(1)~(7)，类型Ⅰ双币种欧式看涨期权 t 时刻的价值为

$$C^{(1)}\left(S_t,X_f,t,T\right)=F_0\mathrm{e}^{-C_d(t,T,r_d)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda_S^*\tau\right)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda_S^*\tau}\left[S_t\mathrm{e}^{C_f(t,T,r_f)-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\sigma_{X_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2}N\left(b_1\right)-X_f\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2-m\left(\mu_{y_S}+\sigma_{y_S}^2\right)+\lambda_Sk_S\tau}N\left(b_2\right)\right]$$

其中

$$b_1=\frac{\ln\dfrac{S_t}{X_f}+C_f\left(t,T,r_f\right)+\sigma_{X_1}^2+\dfrac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u-\lambda_Sk_S\tau+m\left(\mu_{y_S}+\sigma_{y_S}^2\right)}{\sqrt{\sigma_{X_1}^2+\sigma_{Z_1}^2+m\sigma_{y_S}^2}},$$

$$b_2=b_1-\sqrt{\sigma_{X_1}^2+\sigma_{Z_1}^2+m\sigma_{y_S}^2},\ \tau=T-t.$$

证明：

$$C^{(1)}=E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_d(u)\mathrm{d}u}F_0\left(S_T-X_f\right)^+\Big|\mathcal{F}_t\right]=F_0\left\{E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_d(u)\mathrm{d}u}S_TI_{\left(S_T\geq X_f\right)}\right]-X_fE\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_d(u)\mathrm{d}u}I_{\left(S_T\geq X_f\right)}\right]\right\}=F_0\left\{I_1-X_fI_2\right\}.$$

由(5)，(8)知，

$$I_1=S_t\mathrm{e}^{-C_d(t,T,r_d)+C_f(t,T,r_f)-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u}E_t\left[\exp\left(-X_2+X_1-\frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2-\lambda_Sk_S\tau+Z_1+\sum_{i=N_t^S+1}^{N_T^S}Y_i^S\right)I_{\left(\ln S_T\geq\ln X_f\right)}\right].$$

下面计算 I_1，为此定义新测度 R_1：

$$\frac{\mathrm{d}R_1}{\mathrm{d}Q}\Big|_{\mathcal{F}_T}=\exp\left(-X_2-\frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2+X_1-\frac{1}{2}\sigma_{X_1}^2-\lambda_Sk_S\tau+Z_1-\frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2+\sum_{i=N_t^S+1}^{N_T^S}Y_i^S\right):=M(\tau).$$

显然有 $E_t\left(M(\tau)\right)=1$，由 Girsanov 定理知 R_1 是 Q 的等价鞅测度，且有 $\begin{pmatrix}X_2^Q\\X_1^Q\\Z_1^Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_2^{R_1}\\X_1^{R_1}\\Z_1^{R_1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sigma_{X_2}^2\\\sigma_{X_1}^2\\\sigma_{Z_1}^2\end{pmatrix}$ 在 R_1 下仍为布朗

运动，且 N_t^S 在 R_1 下仍为 Poisson 过程，但强度为 $\lambda_S^* = \lambda_S E\left(\mathrm{e}^{Y^S}\right)$，记为 $N_t^{SR_1}$。Y_i^S 在 R_1 下仍为独立同分布的随机变量列，记为 $Y_i^{SR_1}$，此时

$$\ln S_T = \ln S_t + C_f\left(t,T,r_f\right) + X_1^{R_1} + \sigma_{X_1}^2 - \int_t^T q(u)\mathrm{d}u + Z_1^{R_1} + \frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2 - \lambda_S k_S \tau + \sum_{i=N_t^{SR_1}+1}^{N_T^{SR_1}} Y_i^{SR_1}.$$

于是

$$I_1 = S_t \mathrm{e}^{-C_d(t,T,r_d)+C_f(t,T,r_f)-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma_{X_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2} P^{R_1}\left[\ln S_T \ge \ln X_f\right] = S_t \mathrm{e}^{-C_d(t,T,r_d)+C_f(t,T,r_f)-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\left(\sigma_{X_1}^2+\sigma_{X_2}^2\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_S^*\tau\right)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda_S^*\tau}$$

$$P^{R_1}\left[-\frac{X_1^{R_1}+Z_1^{R_1}+\sum_{i=1}^{m}Y_i^{SR_1}-m\left(\mu_{y_S}+\sigma_{y_S}^2\right)}{\sqrt{\sigma_{X_1}^2+\sigma_{Z_1}^2+m\sigma_{y_S}^2}} \le \frac{\ln\frac{S_t}{X_f}+C_f\left(t,T,r_f\right)+\sigma_{X_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u-\lambda_S k_S\tau+m\left(\mu_{y_S}+\sigma_{y_S}^2\right)}{\sqrt{\sigma_{X_1}^2+\sigma_{Z_1}^2+m\sigma_{y_S}^2}}\right]$$

$$= S_t \mathrm{e}^{-C_d(t,T,r_d)+C_f(t,T,r_f)-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\left(\sigma_{X_1}^2+\sigma_{X_2}^2\right)} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda_S^*\tau\right)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda_S^*\tau}N\left(b_1\right).$$

同理可计算 $I_2 = \mathrm{e}^{-C_d(t,T,r_d)-\frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2} E_t\left[I_{\left(\ln S_T \ge \ln X_f\right)}\right] = \mathrm{e}^{-C_d(t,T,r_d)-\frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}N\left(b_2\right)$，经整理，定理得证。

定理 2：在定理 1 条件下，类型 II 双币种欧式看涨期权 t 时刻的价值为

$$C^{(2)}\left(S_t F_t, X_d, t, T\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda_S^*\tau\right)^m}{m!}\frac{\left(\lambda_F^*\tau\right)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\left(\lambda_S^*+\lambda_F^*\right)\tau}\left[S_t F_t \mathrm{e}^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u}N\left(\hat{b}_1\right)\right.$$
$$\left. - X_d \mathrm{e}^{-C_d(t,T,r_d)+\frac{1}{2}\sigma_{X_2}^2-m\left(\mu_{y_S}+\frac{1}{2}\sigma_{y_S}^2\right)-n\left(\mu_{y_F}+\frac{1}{2}\sigma_{y_F}^2\right)+\left(\lambda_S k_S+\lambda_F k_F\right)\tau}N\left(\hat{b}_2\right)\right],$$

其中

$$\hat{b}_1 = \frac{\ln\frac{S_t F_t}{X_d}+C_d\left(t,T,r_d\right)-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u-\lambda_S k_S\tau-\lambda_F k_F\tau+\frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2+\frac{1}{2}\sigma_{Z_2}^2+m\left(\mu_{y_S}+\sigma_{y_S}^2\right)+n\left(\mu_{y_F}+\sigma_{y_F}^2\right)}{\sqrt{\sigma_{X_2}^2+\sigma_{Z_1}^2+\sigma_{Z_2}^2+m\sigma_{y_S}^2+n\sigma_{y_F}^2}},$$

$$\hat{b}_2 = \hat{b}_1 - \sqrt{\sigma_{X_2}^2+\sigma_{Z_1}^2+\sigma_{Z_2}^2+m\sigma_{y_S}^2+n\sigma_{y_F}^2}\text{。}$$

证明：类似有 $C^{(2)}\left(S_t,F_t,X_d,t,T\right) = E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_d(u)\mathrm{d}u}S_T F_T I_{\left(S_T F_T \ge X_d\right)}\middle|\mathcal{F}_t\right] - X_d E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_d(u)\mathrm{d}u}I_{\left(S_T F_T \ge X_d\right)}\middle|\mathcal{F}_t\right] = I_1' - X_d I_2'$。由(4)，(5)有 $I_1' = S_t F_t \mathrm{e}^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u}E_t\left\{\exp\left[-\lambda_S k_S\tau-\lambda_F k_F\tau-\frac{1}{2}\left(\sigma_{Z_1}^2+\sigma_{Z_2}^2\right)+Z_1+\sum_{i=N_t^S+1}^{N_T^S}Y_i^S+Z_2+\sum_{j=N_t^F+1}^{N_T^F}Y_j^F\right]I_{\left(S_T F_T \ge X_d\right)}\right\}$。类似定理 1 中 I_1 的证明，定义 $\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}Q}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp\left(-\lambda_S k_S\tau+Z_1-\frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2+\sum_{i=N_t^S+1}^{N_T^S}Y_i^S-\lambda_F k_F\tau+Z_2-\frac{1}{2}\sigma_{Z_2}^2+\sum_{j=N_t^F+1}^{N_T^F}Y_j^F\right)$。显然 R_2 是 Q 的等价鞅测度，于是由 Girsanov 定理知 $\begin{pmatrix}Z_1^Q\\Z_2^Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Z_1^{R_2}\\Z_2^{R_2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sigma_{Z_1}^2\\\sigma_{Z_2}^2\end{pmatrix}$ 在 R_2 测度下仍为布朗运动及

$$\ln S_T F_T = \ln S_t F_t + C_d\left(t,T,r_d\right) + X_2 - \int_t^T q(u)\mathrm{d}u - \lambda_S k_S\tau - \lambda_F k_F\tau$$
$$+ \sum_{i=N_t^{SR_2}+1}^{N_T^{SR_2}}Y_i^{SR_2} + \sum_{j=N_t^{FR_2}+1}^{N_T^{FR_2}}Y_j^{FR_2} + Z_1^{R_2} + Z_2^{R_2} + \frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{Z_2}^2.$$

于是

$$
\begin{aligned}
I_1' &= S_t F_t \mathrm{e}^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u} P^{R_2}\left[\ln S_T F_T \ge \ln X_d\right] \\
&= S_t F_t \mathrm{e}^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_S^* \tau\right)^m}{m!} \mathrm{e}^{-\lambda_S^* \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_F^* \tau\right)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda_F^* \tau} P^{R_2} \\
&\cdot \left[-\frac{X_2 + Z_1^{R_2} + Z_2^{R_2} + \sum_{i=1}^{m} Y_i^{SR_2} + \sum_{i=1}^{n} Y_i^{FR_2} - m\left(\mu_{y_S} + \sigma_{y_S}^2\right) - n\left(\mu_{y_F} + \sigma_{y_F}^2\right)}{\sqrt{\sigma_{X_2}^2 + \sigma_{Z_1}^2 + \sigma_{Z_2}^2 + m\sigma_{y_S}^2 + n\sigma_{y_F}^2}} \right. \\
&\left. \le \frac{\ln \frac{S_t F_t}{X_d} + C_d\left(t,T,r_d\right) - \int_t^T q\left(u\right)\mathrm{d}u - \lambda_S k_S \tau - \lambda_F k_F \tau + \frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{Z_2}^2 + m\left(\mu_{y_S} + \sigma_{y_S}^2\right) + n\left(\mu_{y_F} + \sigma_{y_F}^2\right)}{\sqrt{\sigma_{X_2}^2 + \sigma_{Z_1}^2 + \sigma_{Z_2}^2 + m\sigma_{y_S}^2 + n\sigma_{y_F}^2}} \right] \\
&= S_t F_t \mathrm{e}^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_S^* \tau\right)^m}{m!} \frac{\left(\lambda_F^* \tau\right)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\left(\lambda_S^* + \lambda_F^*\right)\tau} N\left(\hat{b}_1\right),
\end{aligned}
$$

类似可证 I_2'，定理得证。

定理 3：在定理 1 条件下，类型 III 双币种欧式看涨期权 t 时刻的价值为

$$
C^{(3)}\left(S_t, F_t, X_f, t, T\right) = F_t \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_S^* \tau\right)^m}{m!} \mathrm{e}^{-\lambda_S^* \tau} \left[S_t \mathrm{e}^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u} N\left(\overline{b}_1\right) - X_f \mathrm{e}^{-C_f\left(t,T,r_f\right) + \frac{1}{2}\sigma_{X_1}^2 - m\left(\mu_{y_S} + \frac{1}{2}\sigma_{y_S}^2\right) + \lambda_S k_S \tau} N\left(\overline{b}_2\right) \right],
$$

其中

$$
\overline{b}_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{X_f} + C_f\left(t,T,r_f\right) - \int_t^T q\left(u\right)\mathrm{d}u - \lambda_S k_S \tau + \frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2 + m\left(\mu_{y_S} + \sigma_{y_S}^2\right)}{\sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{Z_1}^2 + m\sigma_{y_S}^2}}, \quad \overline{b}_2 = \overline{b}_1 - \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{Z_1}^2 + m\mu_{y_S}}。
$$

证明：

$$
C^{(3)}\left(S_t, F_t, X_f, t, T\right) = E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_d(u)\mathrm{d}u} S_T F_T I_{\left(S_T \ge X_f\right)} \middle| \mathcal{F}_t\right] - X_f E\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_d(u)\mathrm{d}u} F_T I_{\left(S_T \ge X_f\right)} \middle| \mathcal{F}_t\right] = I_1'' - X_f I_2''。
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1'' &= S_t F_t \mathrm{e}^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u - \lambda_F k_F \tau - \frac{1}{2}\sigma_{Z_2}^2} E_t\left[\exp\left(Z_2 + \sum_{j=N_t^F+1}^{N_T^F} Y_j^F\right)\right] E_t\left[\exp\left(-\lambda_S k_S \tau - \frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2 + Z_1 + \sum_{i=N_t^S+1}^{N_T^S} Y_i^S\right) I_{\left(S_T \ge X_f\right)}\right] \\
&= S_t F_t \mathrm{e}^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u} E_t\left[\exp\left(-\lambda_S k_S \tau - \frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2 + Z_1 + \sum_{i=N_t^S+1}^{N_T^S} Y_i^S\right) I_{\left(S_T \ge X_f\right)}\right]。
\end{aligned}
$$

现定义测度变换：$\frac{\mathrm{d}R_3}{\mathrm{d}Q}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp\left(-\lambda_S k_S \tau - \frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2 + Z_1 + \sum_{i=N_t^S+1}^{N_T^S} Y_i^S\right)$，显然 R_3 是 Q 的等价鞅测度，故由 Girsanov 定理知 $Z_1^Q = Z_1^{R_3} + \sigma_{Z_1}^2$ 在 R_3 测度下为布朗运动且

$$
\ln S_T = \ln S_t + C_f\left(t,T,r_f\right) + X_1 - \int_t^T q\left(u\right)\mathrm{d}u - \lambda_S k_S \tau + \frac{1}{2}\sigma_{Z_1}^2 + Z_1^{R_3} + \sum_{i=N_t^{SR_3}+1}^{N_T^{SR_3}} Y_i^{SR_3}。
$$

类似定理 1，定理 2 可证 I_1''。

同理可得 $I_2'' = F_t e^{-C_f(t,T,r_f)} E_t\left[e^{-X_1} I_{(\ln S_T \ge \ln X_f)}\right] = F_t e^{-C_f(t,T,r_f)+\frac{1}{2}\sigma_{X_1}^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda_S\tau)^m}{m!}e^{-\lambda_S\tau}N(\bar{b}_2)$，经整理，定理得证。

定理 4：在定理 1 条件下，类型Ⅳ双币种欧式看涨期权 t 时刻的价值为

$$C^{(4)}(S_t,F_t,K,t,T) = S_t e^{-\int_t^T q(u)\mathrm{d}u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_F^*\tau)^n}{n!}e^{-\lambda_F^*\tau}\left[F_t N(b_1') - K e^{C_f(t,T,r_f)-C_d(t,T,r_d)+\frac{1}{2}(\sigma_{X_1}^2+\sigma_{X_2}^2)-n\left(\mu_{y_F}+\frac{1}{2}\sigma_{y_F}^2\right)+\lambda_F k_F\tau} N(b_2')\right],$$

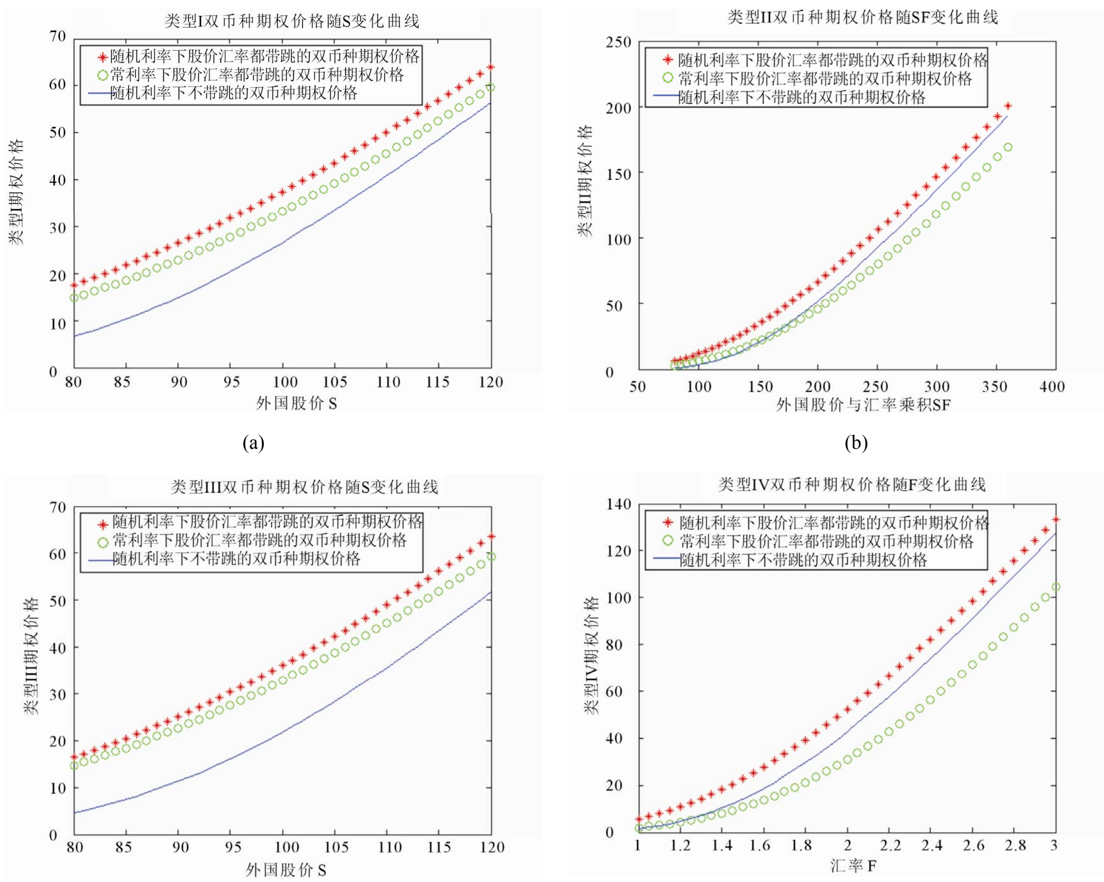
其中

$$b_1' = \frac{\ln\frac{F_t}{K} + C_d(t,T,r_d) - C_f(t,T,r_f) + \frac{1}{2}\sigma_{Z_2}^2 - \lambda_F k_F\tau + n\left(\mu_{y_F} + \sigma_{y_F}^2\right)}{\sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \sigma_{Z_2}^2 + n\sigma_{y_F}^2}},\quad b_2' = b_1' - \sqrt{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 + \sigma_{Z_2}^2 + n\sigma_{y_F}^2}.$$

证明：仿定理 1，定理 3 可证。

4. 数值计算

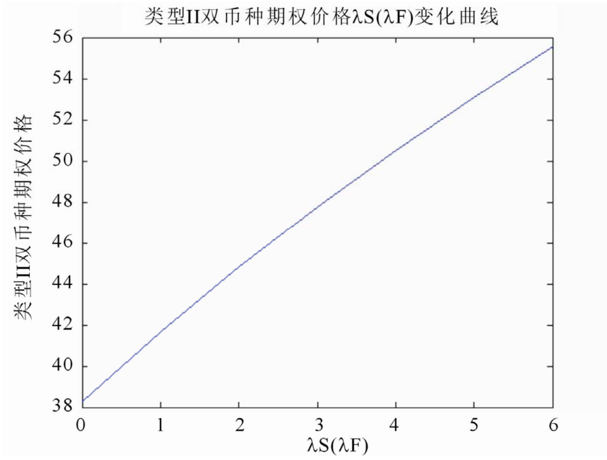
下面利用数值计算实例分析股价，汇率的跳跃性及利率的随机性对期权价格的影响。取市场模型的参数值为 $S_t = X_f = 100$，$X_d = 200$，$F_t = F_0 = K = 2$，$r_d = 0.06$，$r_f = 0.08$，$T = 1,\ t = 0.5$ (年)，$\sigma_S = \sigma_F = 0.3$，$\lambda_S = 3$，$\mu_{y_S} = 0, \sigma_{y_S} = 0.3$，$\rho_{SF} = 0.2, q = 0.05$，$\lambda_F = 3, \mu_{y_F} = 0$，$\sigma_{y_F} = 0.3$，$b_d = b_f = 0.1$，$a_d = \theta_d = 0.2$，$a_f = \theta_f = 0.3$。由 Matlab 计算得如图 1 和图 2 所示。



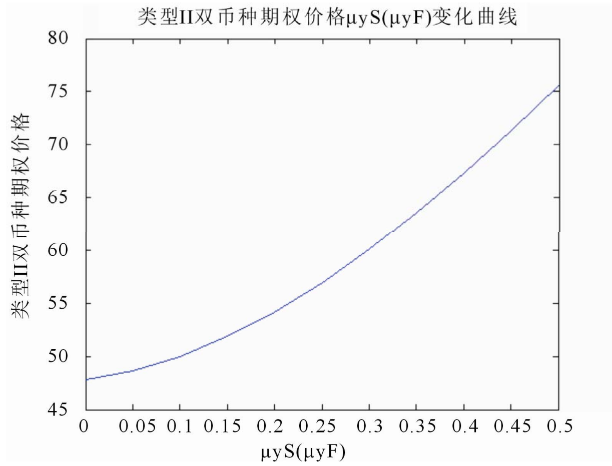
(a) (b) (c) (d)

Figure 1. Curve: option price of types I - IV

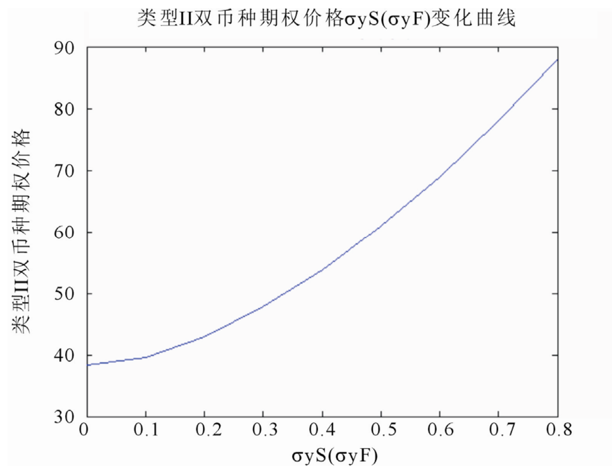
图 1. 四类期权价格曲线



(a)



(b)



(c)

Figure 2. Curve: option price of type II
图 2. 类型 II 期权价格曲线

图 1 从两方面比较了四种双币种欧式看涨期权的价格曲线：首先比较了跳扩散模型及 Black-Scholes 模型的相应结果，其次比较了利率随机与常利率的相应结果。计算结果表明，在股价，汇率都服从 Merton 跳扩散模型时，利率随机的双币种期权价格要高于常利率情形；另一方面，对于国内外利率都服从 Hull-White 随机模型时，

股价汇率都带跳的期权价格要高于不带跳的情形。综合来看，因为利率随机和跳扩散特征都增加了标的资产的波动性，提高了期权的潜在获利可能，因此都提高了期权的价格。

图 2 以类型 II 双币种期权为例分析了跳跃参数对期权价格的影响。结果表明：1) 类型 II 期权价格 $C^{(2)}$ 是股价(汇率)的跳跃强度 λ_S $\left(\lambda_F\right)$ 的增函数，并且该函数曲线上凸；2) $C^{(2)}$ 是股价(汇率)跳跃幅度 μ_{y_S} $\left(\mu_{yF}\right)$ 的增函数，且曲线下凸；3) $C^{(2)}$ 是股价(汇率)跳跃波动幅度 σ_{y_S} $\left(\sigma_{yF}\right)$ 的增函数，且曲线下凸。其他类型期权与此类似。综上所述，股价和汇率跳跃参数越大，市场波动越剧烈，期权的潜在获利空间越大，因此期权的价格越高。

参考文献 (References)

[1] F. Black, M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.
[2] R. C. Merton. Option pricing when underlying stock are discontinuous. Journal of Economics, 1976, 3: 125-144.
[3] C. Mancini. The European options hedge perfectly in a Poisson Gaussian stock market model. Applied Mathematical Finance, 2002, 9(2): 87-102.
[4] D. Duffie, J. Pan and K. Singleton. Transform analysis and option pricing for affine jump-diffusions. Econometrica, 2000, 68(6): 1343-1376.
[5] T. Chan. Pricing contingent claims on stocks driven by Levy processes. Annals of Applied Probability, 1999, 9(2): 504-528.
[6] S. Kou. A jump-diffusion model for option pricing. Management Science, 2002, 48(8): 1086-1101.
[7] O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, 1977, 5: 177-188.
[8] J. Hull, A. White. One-factor interest models and the valuation interest rate derivative securities. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1993, 28: 235-254.
[9] D. Heath, R. Jarrow and A. Morton. Contingent claim valuation with a random evolution of interest rate. The Review of Futures Market, 1992, 60: 77-105.
[10] P. Glasserman, S. G. Kou. The term structure of simple forward rates with jump risk. Mathematical Finance, 2003, 13(3): 383-410.
[11] Li Jun Bo, Y. J. Wang and X. W. Yang. Markov-modulated jump-diffusions for currency option pricing. Insurance: Mathematics and Economics, 2010, 46(3): 461-469.
[12] 张素梅. 跳扩散模型中随机利率和随机波动下期权定价[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2012, 31(3): 421-424.
[13] 李翠香, 石凌. 基于随机利率下跳－扩散过程的复合期权的定价[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2012, 29(4): 432-436.
[14] E. Reiner. Quanto mechanic, from black-scholes to black-scholes. Risk Publication, 1992, 5(2): 59-63.
[15] Y. K. Kwok, H. Y. Wong. Currency-translated foreign equity options with path dependent features and their multi-asset extensions. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2000, 3(2): 257-278.
[16] M. Dai. Quanto lookback options. Mathematical Finance, 2004, 14: 445-467.
[17] 郭培栋, 张寄洲. 随机利率下双币种期权的定价[J]. 上海师范大学学报(自然科学版), 2006, 35(6): 25-29.
[18] 黄国安, 邓国和. 国内外利率为随机的双币种重置型期权定价[J]. 大学数学, 2011, 27(2): 125-132.
[19] 郭培栋, 陈启宏, 张寄洲. 随机利率下亚式双币种期权的定价[J]. 系统工程学报, 2010, 25(2): 235-240.
[20] 杜志阔, 张迪新. 交叉货币百慕大式互换期权的定价[J]. 应用概率统计, 2011, 27(4): 425-434.
[21] J. Ma. Pricing foreign equity options with stochastic correlation and volatility. Annals of Economics and Finance, 2009, 10(2): 303-327.
[22] 周密. 跳跃扩散型双币种期权的定价[J]. 科学技术与工程, 2010, 10 (34): 8482-8486.
[23] 马奕虹, 邓国和. 股票价格服从跳扩散过程的双币种期权定价[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2007, 25(3): 52-55.