Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 42-47
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.21006 Published Online February 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

New Exact Solutions of a Generalized KdV Equation with Variable Coefficients*

Jiamei Zhang, Chao Ma, Cai'er Ye#

College of Science, Zhejiang Agriculture and Forestry University, Lin'an
Email: #Yecaier@zafu.edu.cn

Received: Jan. 5th, 2013; revised: Jan. 12th, 2013; accepted: Jan. 25th, 2013

Abstract: In this paper, we use the exp-function method to solve a generalized KdV equation with variable coefficients. As a result, several types of solutions are obtained which contain solitary wave solutions, blow-up solutions and periodic solutions.

Keywords: Generalized KdV Equation with Variable Coefficients; Exp-Function Method; Exact Solutions

一个广义变系数 KdV 方程新的精确解*

张佳梅，马 超，叶彩儿#

浙江农林大学理学院，临安
Email: #Yecaier@zafu.edu.cn

收稿日期：2013 年 1 月 5 日；修回日期：2013 年 1 月 12 日；录用日期：2013 年 1 月 25 日

摘 要：本文我们利用指数函数方法求解一个广义变系数 KdV 方程，结果我们求出了许多类型的解，这些解包括孤立波解，爆破解和周期波解。

关键词：广义变系数 KdV 方程；指数函数方法；精确解

1. 引言

众所周知，在研究物理、力学、生物和化学过程中会产生许多非线性偏微分方程，这些方程的精确解能使人们深深地了解方程所描述的过程。但由于非线性偏微分方程的复杂性和计算方法的局限性，人们想求出这些方程的精确解是困难的。随着孤立子理论的发展，人们提出了许多方法用来求解偏微分方程的精确解，比如逆散射方法[1-3]，达布变换方法[4]，Hirota 双线性方法[5]，齐次平衡方法[6]，tanh 方法[7]，sine-cosine 方法[8]，Jacobi 椭圆函数展开方法[9]，辅助方程方法[10]，指数函数方法[11,12]等等。在这些方法之中，指数函数方法是非常有用的一种方法，它能求出非线性偏微分方程的一般形式的孤立波解和周期波解，在数学软件 Mathematica 或 Matlab 帮助下，这个方法的解题步骤又非常简单，而且已经成功地应用到许多方程[13-15]。

本文将这一方法进一步应用到如下的一个广义变系数 KdV 方程[16]

$$u_t + g(t)(6uu_x + u_{xxx}) + 6f(t)g(t)u = x\left(f'(t) + 12g(t)f^2(t)\right) \tag{1}$$

其中 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是两个任意的函数。方程(1)包含下列重要的方程：

1) 当 $g(t)=1$ 时，方程(1)成为文献[17]中介绍的广义 KdV 方程

*资助信息：浙江农林大学大学生创新训练计划(201212006)和浙江农林大学教学改革研究项目(WT1104)资助的课题。
#通讯作者。

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + 6f(t)u = x\left(f'(t) + 12f^2(t)\right), \tag{2}$$

2) 当 $g(t)=1,\ f(t)=\dfrac{1}{12t}$ 时，方程(1)成为柱状 KdV 方程[18]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{1}{2t}u = 0, \tag{3}$$

3) 当 $f(t)=0$ 时，方程(1)成为变系数 KdV 方程

$$u_t + g(t)\left(6uu_x + u_{xxx}\right) = 0, \tag{4}$$

特别地，当 $g(t)=1$ 时，方程(4)成为著名的 KdV 方程。

已有许多关于常系数 KdV 方程的研究，文献[19]利用 Ricatti 方程讨论了常系数 KdV 方程，获得了孤立波解；文献[20]利用混合指数方法讨论了常系数 KdV 方程。但我们知道常系数只不过是人们在考虑现实物理现象的某些方面而作的一种理想假设，因此一些作者[18,21]已经开始研究各种不同形式的变系数 KdV 方程，王等[16]应用齐次平衡方法研究方程(1)，导出方程(1)的 Backlund 变换。在本文中，我们将使用指数函数方法来研究方程(1)的精确解，我们求出了更一般形式的孤立波解，钟形的孤立波解，周期波解都可作为它的特殊情形。

2. 广义变系数 KdV 方程的精确解

为了能应用指数函数方法求解方程(1)，我们首先假设

$$u(x,t) = v(x,t)\exp\left[-12\int^t f(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right] + xf(t). \tag{5}$$

把(5)式代入(1)，得

$$v_t + 6xf(t)g(t)v_x + 6g(t)\exp\left[-12\int^t f(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right]vv_x + g(t)v_{xxx} = 0. \tag{6}$$

再引入变换

$$v(x,t) = V(\xi),\quad \xi = k(t)x + \lambda(t) \tag{7}$$

这里 $k(t)$ 和 $\lambda(t)$ 是两个未知函数，那么(6)式变为

$$\begin{aligned}&\left[k'(t)x + \lambda'(t)\right]V'(\xi) + 6xf(t)g(t)k(t)V'(\xi) + g(t)k^3(t)V'''(\xi)\\&+6g(t)k(t)\exp\left[-12\int^t f(\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau\right]V(\xi)V'(\xi) = 0.\end{aligned} \tag{8}$$

按照指数函数方法[11,12]，我们假设方程(8)有如下形式的解：

$$V(\xi) = \frac{a_{-c}\exp(-c\xi) + \cdots + a_d\exp(d\xi)}{b_{-p}\exp(-p\xi) + \cdots + b_q\exp(q\xi)}, \tag{9}$$

其中 a_n 和 b_m 都是未知的常数，c, d, p 和 q 都是正整数，并由齐次平衡原则确定。

为了确定正整数 c, d, p 和 q，我们平衡方程(8)中的最高阶导数项与最高阶非线性项，通过简单的计算，我们有

$$-(c+7p) = -(2c+6p) \Rightarrow p = c,$$

$$d + 7q = 2d + 6q \Rightarrow q = d.$$

因此我们能自由选择 c 和 d 的值。为简单起见，我们设 $p=c=1,\ q=d=1$，这样(9)式变为

$$V(\xi) = \frac{a_{-1}\exp(-\xi) + a_0 + a_1\exp(\xi)}{b_{-1}\exp(-\xi) + b_0 + b_1\exp(\xi)}, \tag{10}$$

把(10)式代入(8)式，消去分母，并把以 $\exp(n\xi)$ 和 $x\exp(n\xi)$ 形式的各项前面的系数令为零，得到一组以 $a_{-1}, a_0, a_1, b_{-1}, b_0, b_1, k(t)$ 和 $\lambda(t)$ 为变量的超定方程组，利用数学软件 Mathematica 求解这组方程组，我们得到下列两组解：

解 1

$$a_{-1} = a_1 = 0, \quad b_{-1} = \frac{b_0^2}{4b_1}, \ k(t) = \sqrt{\frac{a_0}{b_0}} \exp\left[-6\int^t f(\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau\right], \ \lambda(t) = -\int^t g(\tau) k^3(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{11}$$

解 2

$$a_{-1} = \frac{a_1 b_0^2}{4b_1^2}, \quad b_{-1} = \frac{b_0^2}{4b_1}, \ k(t) = \sqrt{\frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_0 b_1}} \exp\left[-6\int^t f(\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau\right],$$

$$\lambda(t) = \frac{a_0 b_1 + 5a_1 b_0}{a_1 b_0 - a_0 b_1} - \int^t g(\tau) k^3(\tau) \mathrm{d}\tau, \tag{12}$$

其中 a_0, a_1, b_0 和 b_1 都是任意的常数。

下面我们根据解 1 和解 2 两种情形来求出方程(1)的精确解。为了表述方便，我们记

$$A(t) = \exp\left[-6\int^t f(\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau\right], \ B(t) = -\int^t g(\tau) A^3(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{13}$$

1) 解 1 情形

根据(5)，(7)，(10)和(11)式，我们可求得方程(1)的一般形式的孤立波解

$$u_1 = \frac{a_0 A^2(t)}{\frac{b_0^2}{4b_1} \exp\left(-\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}\xi\right) + b_0 + b_1 \exp\left(\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}\xi\right)} + xf(t), \tag{14}$$

其中 $\xi = A(t)x - \frac{a_0}{b_0}B(t)$。由于 a_0, b_0, b_1 是任意的常数，因此当 $a_0 b_0 > 0$ 时，如果取 $b_1 = \frac{b_0}{2}$，则解(14)就成为钟状的孤立波解

$$u_2 = \frac{a_0}{2b_0} A^2(t) \mathrm{sec}h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}\xi\right) + xf(t). \tag{15}$$

如果取 $b_1 = -\frac{b_0}{2}$，则解(14)就成为爆破解

$$u_3 = -\frac{a_0}{2b_0} A^2(t) \mathrm{csc}h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a_0}{b_0}}\xi\right) + xf(t). \tag{16}$$

同样地，当 $a_0 b_0 < 0$ 时，这时解(14)能转化成周期解。在(14)式中，我们写 $\sqrt{\frac{a_0}{b_0}} = \mathrm{i}\sqrt{-\frac{a_0}{b_0}}$ 的形式，并利用欧拉公式

$$\exp(-\mathrm{i}\theta) = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta, \quad \exp(\mathrm{i}\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{17}$$

那么(14)式可写成如下形式

$$u_4 = \frac{a_0 A^2(t)}{\left(\frac{b_0^2}{4b_1} + b_1\right)\cos\left(\sqrt{-\frac{a_0}{b_0}}\xi\right) + b_0 + \mathrm{i}\left(b_1 - \frac{b_0^2}{4b_1}\right)\sin\left(\sqrt{-\frac{a_0}{b_0}}\xi\right)} + xf(t) \tag{18}$$

如果我们想寻找周期波解或紧解，那么方程(18)的虚部必需为零，即

$$b_1-\frac{b_0^2}{4b_1}=0 \tag{19}$$

得

$$b_1=\pm\frac{b_0}{2} \tag{20}$$

把(20)代入(18)式，我们就可得到方程(1)的两个周期解

$$u_5=\frac{a_0}{2b_0}A^2(t)\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{a_0}{b_0}}\xi\right)+xf(t), \tag{21}$$

和

$$u_6=\frac{a_0}{2b_0}A^2(t)\csc^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{a_0}{b_0}}\xi\right)+xf(t). \tag{22}$$

2) 解 2 情形

根据(5)，(7)，(10)和(12)式，我们可得到方程(1)的另一个一般形式的孤立波解

$$u_7=A^2(t)\times\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{\dfrac{a_0b_1-a_1b_0}{b_1}}{\dfrac{b_0^2}{4b_1}\exp\left(-\sqrt{\dfrac{a_0b_1-a_1b_0}{b_0b_1}}\ \eta\right)+b_0+b_1\exp\left(\sqrt{\dfrac{a_0b_1-a_1b_0}{b_0b_1}}\ \eta\right)}\right)+xf(t) \tag{23}$$

其中$\eta=A(t)x-\frac{a_0b_1+5a_1b_0}{b_0b_1}B(t)$。由于$a_0,a_1,b_0$和$b_1$都是任意的常数，因此当$b_0b_1(a_0b_1-a_1b_0)>0$时，如果我们在(23)式中取$b_0=2b_1$，那么我们得到方程(1)的另一种形式的单孤子解

$$u_8=A^2(t)\times\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{d_1}{2}\sec h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{d_1}\left(A(t)x-d_2B(t)\right)\right)\right)+xf(t), \tag{24}$$

其中

$$d_1=\frac{a_0-2a_1}{2b_1},\quad d_2=\frac{a_0+10a_1}{2b_1}. \tag{25}$$

如果取$b_0=-2b_1$，我们得到方程(1)的爆破解

$$u_9=A^2(t)\times\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{d_3}{2}\csc h^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-d_3}\left(A(t)x+d_4B(t)\right)\right)\right)+xf(t) \tag{26}$$

其中

$$d_3=\frac{a_0+2a_1}{2b_1},\quad d_4=\frac{a_0-10a_1}{2b_1}. \tag{27}$$

同样地，当$b_0b_1(a_0b_1-a_1b_0)<0$时，则精确解(23)能转化成周期解。我们在(23)式中写$\sqrt{\frac{a_0b_1-a_1b_0}{b_0b_1}}=\mathrm{i}\sqrt{\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0b_1}}$的形式，并利用欧拉公式，那么(23)式可写成

$$u_{10}=A^2(t)\times\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{\dfrac{a_0b_1-a_1b_0}{b_1}}{\left(\dfrac{b_0^2}{4b_1}+b_1\right)\cos(\zeta)+b_0+\mathrm{i}\left(b_1-\dfrac{b_0^2}{4b_1}\right)\sin(\zeta)}\right)+xf(t), \tag{28}$$

其中 $\zeta=\sqrt{\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0b_1}}\left(A(t)x-\frac{a_0b_1+5a_1b_0}{b_0b_1}B(t)\right)$。如果我们想寻找周期波解或紧解，那么(28)式中的虚部必需为零，即

$$b_1-\frac{b_0^2}{4b_1}=0, \tag{29}$$

得

$$b_0=\pm 2b_1. \tag{30}$$

把(30)代入(28)式，我们就得到方程(1)的两个周期解

$$u_{11}=A^2(t)\times\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{d_1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-d_1}\left(A(t)x-d_2B(t)\right)\right)\right)+xf(t), \tag{31}$$

和

$$u_{12}=A^2(t)\times\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{d_3}{2}\csc^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{d_3}\left(A(t)x+d_4B(t)\right)\right)\right)+xf(t), \tag{32}$$

其中 d_1, d_2, d_3 和 d_4 分别由(25)和(27)决定。

3. 结论

我们对广义变系数 KdV 方程应用指数函数方法求出了两类更一般形式的孤立波解，如果对任意常数作适当选择，这一般形式的孤立波解能转化为钟形的孤立波解，爆破解和周期波解。孤立波解在物理实验和自然界中总是代表特殊的物理现象，而爆破解在某一点产生奇性，即对任一固定的一点 $t=t_0$，存在 x_0 使解在该点爆破。在文献[22,23]中已有关于解的所谓热点或爆破的许多有趣的信息，这些奇异解也能很好地描述特定的物理现象，因此这些解也是非常有用的。

参考文献 (References)

[1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson. Soliton, nonlinear evolution equations and inverse scattering. New York: Cambridge University Press, 1991.
[2] C. S. Gardner, J. M. Greene and M. D. Kruskal. Method for solving the Korteweg-deVries equation. Physical Review Letters, 1967, 19(19): 1095-1097.
[3] J. Lin. On solution of the Dullin-Gottwald-Holm equation. International Journal of Nonlinear Science, 2006, 1(1): 43-48.
[4] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux transformations and solitons. Berlin: Springer, 1991.
[5] R. Hirota, J. Satsuma. Soliton solutions for a coupled KdV equation. Physics Letters A, 1981, 85: 407-408.
[6] M. L. Wang, Y. B. Zhou and Z. B. Li. Application of a homogeneous balance method to exact solution of nonlinear equations in mathematical physics. Physics Letters A, 1996, 216(1-5): 67-75.
[7] E. J. Parkes, B. R. Duffy. An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations. Computer Physics Communications, 1996, 98(3): 288-300.
[8] C. T. Yan. A simple transformation for nonlinear waves. Physics Letters A, 1996, 224(1-2): 77-84.
[9] W. H. Huang, Y. L. Liu. Jacobi elliptic function solutions of the Ablowitz-Ladik discrete nonlinear Schrödinger system. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 40: 786-792.
[10] Sirendaoreji. Auxiliary equation method and new solutions of Klein-Gordon equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31(4): 943-950.
[11] J.H. He, X.H. Wu. Exp-function method for nonlinear wave equations. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 30(3): 700-708.
[12] X. H. Wu, J. H. He. Solitary solutions periodic solutions and compacton-like solutions using the exp-function method. Computers & Mathematics with Applications, 2007, 54(7-8): 966-986.
[13] J. H. He. An elementary introduction to recently developed asymptotic methods and nanomechanics in textile engineering. International Journal of Modern Physics B (IJMPB), 2008, 22(21): 3487-3578.
[14] D. Q. Xian, Z. D. Dai. Application of exp-function method to potential Kadomtsev-Petviashvili equation. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 42(5): 2653-2659.
[15] S. Zhang. Application of exp-function method to a KdV equation with variable coefficients. Physics Letters A, 2007, 365(5-6): 448-453.
[16] M. L. Wang, Y. M. Wang and Y. B. Zhou. An auto-Backlund transformation and exact solutions to a generalized KdV equation with variable coefficients and their applications. Physics Letters A, 2002, 303(1): 45-51.

[17] C. Tian. Symmetries and a hierarchy of the general KdV equation. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1987, 20(2): 359-366.
[18] Z. T. Fu, S. D. Liu and S. K. Liu. New exact solutions to KdV equations with variable coefficients or forcing. Applied Mathematics and Mechanics (English Edition), 2004, 25(1): 73-79.
[19] E. G. Fan, H. Q. Zhang. A note on the homogeneous balance method. Physics Letters A, 1998, 246(5): 403-406.
[20] G.Q. Xu, Z. B. Li. Mixing exponential method and its application to the solitary wave solution of the nonlinear evolution equation. Acta Physica Sinica, 2002, 51: 946-950 (in Chinese).
[21] G. Q. Xu, Z. B. Li. Explicit solutions to the coupled KdV equations with variable coefficients. Applied Mathematics and Mechanics, 2005, 26(1): 101-107.
[22] P. A. Clarkson, E. L. Mansfield. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1993, 70(3): 250-288.
[23] N. A. Kudryashov, E. D. Zargaryan. Solitary waves in active-dissipative dispersive media. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1996, 29(24): 8067-8077.

