Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 114-126
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.23015 Published Online August 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

The Riemann Problem with Delta Initial Data for the Chaplygin Pressure Aw-Rascle Traffic Model

Jianye Li

Fuzhou University, Fuzhou
Email: lijianye.07@163.com

Received: Jun. 10th, 2013; revised: Jun. 19th, 2013; accepted: Jul. 1st, 2013

Abstract: In this paper, we solve the Riemann problem with the initial data containing Dirac delta functions for the Chaplygin pressure Aw-Rascle traffic model. With the characteristic analysis, under the suitably generalized Rankine-Hugoniot relation and entropy condition, we constructively obtain the global generalized solutions that explicitly exhibit four kinds of different structures involving delta shock waves.

Keywords: Aw-Rascle Traffic Model; Generalized Rankine-Hugoniot Relation; Delta Shock Wave; Linearly Degenerate; Entropy Condition

带有 Chaplygin 压强的 Aw-Rascle 交通模型含有狄拉克函数初值的黎曼问题

李建业

福州大学，福州
Email: lijianye.07@163.com

收稿日期：2013 年 6 月 10 日；修回日期：2013 年 6 月 19 日；录用日期：2013 年 7 月 1 日

摘　要：本文研究带有 Chaplygin 压强的 Aw-Rascle 交通模型含有狄拉克函数初值的黎曼问题。在广义的 Rankine-Hugoniot 条件和熵条件下，我们构造性得到四种不同情形下的全局广义解，包括了含有狄拉克激波。

关键词：Aw-Rascle 交通模型；广义 Rankine-Hugoniot 条件；Delta-激波；线性退化；熵条件

1. 引言

我们考虑 Aw-Rascle (AR) 交通模型：

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ \big(\rho\left(u + p(\rho)\right)\big)_t + \big(\rho u\left(u + p(\rho)\right)\big)_x = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 ρ, u 分别表示交通的密度和速度。在 2002 年，Aw 和 Rascle 提出了交通流的宏观模式。自从那时起，已经了许多优秀的文献[1-5]。Godvik M.和 Hanche-Olsen H.[1]证明了 Aw-Rascle 交通模式的 Cauchy 问题的弱熵解的存在性。Sun M.[2]研究了交通模式的基本波的相互作用现象并且构造性的得到了三片常数初值的 Riemann 解。Shen C.和 Sun M.[3]证明了 Aw-Rascle 模式的 Riemann 解的极限是零压时的解。Pan 和 Han[4]证明了带有

Chaplygin 压强的 Aw-Rascle 模式的 delta 激波的存在唯一性。

状态方程 $p=\varepsilon\rho^{a}\ \left(a>0,\varepsilon>0\right)$，其中 p 是密度 ρ 和小值参数 $\varepsilon>0$ 的函数且满足 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}p\left(\rho,\varepsilon\right)=0$。

那么(1.1)的极限形式是下面零压气体动力学模式：

$$\begin{cases}\rho_t+\left(\rho u\right)_x=0,\\ \left(\rho u\right)_t+\left(\rho u^2\right)_x=0.\end{cases}\tag{1.2}$$

带有下面这种重要的状态方程的系统(1.1)

$$p\left(\rho\right)=-\frac{1}{\rho}\tag{1.3}$$

称为 Chaplygin 气体动力学，这已经有了大量相关的论文见[6-10]。系统(1.1)和(1.3)改写为

$$\begin{cases}\rho_t+\left(\rho u\right)_x=0,\\ \left(\rho u-1\right)_t+\left(\rho u^2-u\right)_x=0.\end{cases}\tag{1.4}$$

而对于满足初值条件(1.5)的含有 Dirac δ 函数的初值的黎曼问题也称为 Radon 测度初值问题已经被深入地研究了见文献[11-13]。Yang 和 Sun[11]讨论了一类耦合双曲守恒律方程组的黎曼问题并在广义 Rankine-Hugoniot 条件和熵条件下证明了 δ-激波的存在唯一性。Wang 和 Zhang[12]研究了在一维 Chaplygin 气体方程组的黎曼问题并利用给初值一扰动证明了其稳定性。

因此本文主要讨论系统(1.4)的黎曼问题且满足初值

$$\left(\rho,u\right)\left(t=0,x\right)=\begin{cases}\left(\rho_-,u_-\right), & x<0,\\ \left(m_0\delta,u_0\right), & x=0,\\ \left(\rho_+,u_+\right), & x>0.\end{cases}\tag{1.5}$$

显然易知初值条件

$$\left(\rho,u\right)\left(t=0,x\right)=\begin{cases}\left(\rho_-,u_-\right), & x<0,\\ \left(\rho_+,u_+\right), & x>0.\end{cases}\tag{1.6}$$

是与(1.5)中 $m_0=0,u_0=0$ 一致的。其中 δ 是标准的 Dira delta 函数，m_0，u_0，$\rho_\pm$，$u_\pm$ 是任意的非负常数。Pan 和 Han[4]对带有 Chaplygin 压强的 Aw-Rascle 交通模式得到了含有常数初值的黎曼问题的广义解。在本文通过用类似于 Wang 和 Zhang[12]的方法，我们求出了四种不同情形下整体广义解的表达式，包括了含有狄拉克激波。

文章安排如下，第 2 部分，我们回顾了 Pan 和 Han[4]带有 Chaplygin 压强的 Aw-Rascle 交通模型的一些结果。第 3 部分，我们分四种情形构造了(1.4)和(1.5)的广义解和不同整体解的结构。

2. 含有常数初值的黎曼问题 Aw-Rascle 交通模型

本节中，我们简洁地回顾了满足初值(1.6)的系统(1.4)的黎曼问题。易知系统(1.4)的特征值为

$$\lambda_-=u-\frac{1}{\rho},\ \lambda_+=u\ 。$$

对应的特征向量为 $r_-=\left(-\frac{1}{\rho^2},1\right)^{\mathrm{T}}$，$r_+=\left(0,1\right)^{\mathrm{T}}$。简单计算得 $\nabla\lambda_\pm\cdot r_\pm\equiv 0$。因此系统(1.4)是严格的双曲且在 Lax 的意义下是线性退化。

因为满足(1.6)的系统(1.4)在坐标系 $\left(x,t\right)\to\left(\alpha x,\alpha t\right)$ (α 是常数)保持不变，故我们可以找到一自模解

$$(\rho,u)(t,x)=(\rho,u)(\xi),\left(\xi=\frac{x}{t}\right).$$

那么(1.4)和(1.6)就可简化成下面的常微分方程的边值问题

$$\begin{cases}-\xi(\rho)_\xi+(\rho u)_\xi=0,\\-\xi(\rho u-1)_\xi+\left(\rho u^2-u\right)_\xi=0,\end{cases}$$

和 $(\rho,u)(\pm\infty)=(\rho_\pm,u_\pm)$。

由此可得对任意光滑解都含有一般解：$(\rho,u)(\xi)=$常数,$(\rho>0)$，或奇异解被称为疏散接触间断 R：

$$R(\rho_-,u_-):\begin{cases}\xi=u-\dfrac{1}{\rho},\\u-u_-=\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{1}{\rho_-},\\\rho<\rho_-,u>u_-.\end{cases}$$

同时对在 $\xi=\sigma$ 的有界间断，Rankine-Hugoniot 条件成立：

$$\begin{cases}-\sigma[\rho]+[\rho u]=0,\\-\sigma[\rho u-1]+\left[\rho u^2-u\right]=0,\end{cases}\tag{2.1}$$

其中

$$[\rho]=\rho(\sigma+0)-\rho(\sigma-0)$$

是 ρ 跨过间断线的跳跃，σ 是间断的速度。解(2.1)可得两种间断：接触间断 J 和压缩接触间断 S

$$J(\rho_-,u_-):\sigma=u=u_-.$$

$$S(\rho_-,u_-):\begin{cases}\xi=u-\dfrac{1}{\rho},\\u-u_-=\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{1}{\rho_-},\\\rho>\rho_-,u<u_-.\end{cases}$$

1) 当 $u_--\dfrac{1}{\rho_-}<u_+$ 时，我们得到这个包括两个接触间断和中间状态解，表示为

$$(\rho,u)(t,x)=\begin{cases}(\rho_-,u_-), & x<\left(u_--\dfrac{1}{\rho_-}\right)t,\\\left(\dfrac{\rho_-}{(u_+-u_-)\rho_-+1},u_+\right), & \left(u_--\dfrac{1}{\rho_-}\right)t\le x\le u_+t,\\(\rho_+,u_+), & x>u_+t.\end{cases}$$

2) 当 $u_--\dfrac{1}{\rho_-}>u_+$ 时，特征线将会重叠，此时就出现了 δ-激波。有间断 $x=x(t)$ 的系统(1.4)的 δ-激波可以表示一下形式

$$(\rho,u)(t,x)=\begin{cases}(\rho_-,u_-), & x<u_\delta t,\\ (w(t)\delta(x-u_\delta t),u_\delta), & x=u_\delta t,\\ (\rho_+,u_+), & x>u_\delta t,\end{cases}$$

令 $(\rho,u;u_\delta,w)$ 是 δ -激波，$w(t)$ 是 delta 激波的权重，那么广义 Rankine-Hugoniot 条件成立

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_0t)=u_\delta[\rho]-[\rho u],\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w_0tu_\delta)=u_\delta[\rho u]-\left[\rho u^2-u\right],\end{cases} \tag{2.2}$$

其中

$$[\rho]=\rho_+-\rho_-，\quad \rho_+=\rho(u_\delta+0)，\quad \rho_-=\rho(u_\delta-0)。$$

且 w_0,u_δ 是常数且由下面代数方程决定

$$\begin{cases}w_0=u_\delta[\rho]-[\rho u],\\ w_0u_\delta=u_\delta[\rho u-1]-\left[\rho u^2-u\right].\end{cases}$$

同时，为了保证解的唯一性，δ -激波应该满足熵条件：

$$u_+-\frac{1}{\rho_+}<u_+<u_\delta<u_--\frac{1}{\rho_-}<u_-.$$

这意味着 $A_1=:u_+-u_-+\dfrac{1}{\rho_-}<0$。

简单计算，我们有

若 $[\rho]=0$ 时，

$$u_\delta=\frac{1}{2}\frac{\left[\rho u^2-u\right]}{[\rho u]},\ w_0=-[\rho u]。$$

若 $[\rho]\neq 0$ 时，

$$u_\delta=\frac{[\rho u]+\sqrt{\rho_+\rho_-[u]^2+[\rho][u]}}{[\rho]},\ w_0=\sqrt{\rho_+\rho_-[u]^2+[\rho][u]}。$$

这与 Pan 和 Han[4]是一致的。

3. 含有狄拉克初值的 Aw-Rascle 交通模型的黎曼问题和解的结构

在本节中，我们构造了系统(1.4)和(1.5)的黎曼解。根据 $u_--\dfrac{1}{\rho_-}$，u_0 和 u_+ 之间的关系，我们分情形讨论黎曼问题。

情形 3.1 $u_--\dfrac{1}{\rho_-}\le u_0\le u_+$。

子情形 3.1.1 $u_--\dfrac{1}{\rho_-}<u_0<u_+$。

为了构造系统(1.4)和(1.5)的解，首先给予一个扰动，即满足下面的初值

$$(\rho,u)(0,x)=\begin{cases}(\rho_-,u_-), & x<-\varepsilon,\\ \left(\dfrac{m_0}{2\varepsilon},u_0\right), & -\varepsilon<x<\varepsilon,\\ (\rho_+,u_+), & x>\varepsilon,\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是充分小的。在弱解稳定性定理的基础上，如果我们得到的(1.4)和(3.1)的解，那么只要令 $\varepsilon\to 0$，我们就得到了(1.4)和(1.5)的解。

因为

$$u_- - \frac{1}{\rho_-} < u_0，\quad u_0-\frac{2\varepsilon}{m_0}<u_0<u_+，$$

当 ε 很小时，初值问题(1.4)和(3.1)的解可以写为

$$(\rho_-,u_-)+\hat{J}_1^-+(\hat{\rho}_1,\hat{u}_1)+\hat{J}_2^-+\left(\frac{m_0}{2\varepsilon},u_0\right)+\hat{J}_1^++(\hat{\rho}_2,\hat{u}_2)+\hat{J}_2^++(\rho_+,u_+)$$

其中“+”表示“和”的意思。同时 $(\hat{\rho}_1,\hat{u}_1)$ 由下面方程组决定

$$\begin{cases}\hat{u}_1=u_0,\\ \hat{u}_1-\dfrac{1}{\hat{\rho}_1}=u_- - \dfrac{1}{\rho_-}.\end{cases}$$

同样 $(\hat{\rho}_2,\hat{u}_2)$ 由下面方程组决定

$$\begin{cases}\hat{u}_2=u_+,\\ \hat{u}_2-\dfrac{1}{\hat{\rho}_2}=u_0-\dfrac{2\varepsilon}{m_0}.\end{cases}$$

$\hat{J}_2^-$ 的速度是 u_0 和 $\hat{J}_1^+$ 的速度是 $u_0-\dfrac{2\varepsilon}{m_0}$。因为 $u_0>u_0-\dfrac{2\varepsilon}{m_0}$，所以在有限的时间内接触间断 $\hat{J}_2^-$ 将会覆盖接触间断 $\hat{J}_1^+$，它们的交点记为 (x_0,t_0) 由下面方程组决定

$$\begin{cases}x_0+\varepsilon=u_0t_0,\\ x_0-\varepsilon=\left(u_0-\dfrac{2\varepsilon}{m_0}\right)t_0.\end{cases}$$

简单计算得 $(x_0,t_0)=(u_0m_0-\varepsilon,m_0)$。

接下来在 $t=t_0$ 时，我们又考虑黎曼问题满足初值

$$(\rho,u)(t_0,u)=\begin{cases}(\hat{\rho}_1,\hat{u}_1), & x<x_0,\\ (\hat{\rho}_2,\hat{u}_2), & x>x_0.\end{cases}$$

因为 $u_- - \dfrac{1}{\rho_-}<u_0<u_+$，一接触间断 1- $\hat{J}_1$，一接触间断 2- $\hat{J}_2$ 和中间状态 $(\hat{\rho}_3,\hat{u}_3)$ 组成了黎曼解，其中 $(\hat{\rho}_3,\hat{u}_3)$ 由下面方程组决定

$$\begin{cases}\hat{u}_3=\hat{u}_2,\\ \hat{u}_3-\dfrac{1}{\hat{\rho}_3}=\hat{u}_1-\dfrac{1}{\hat{\rho}_1}.\end{cases}$$

因此(1.4)和(3.1)的解可以表示为

$$\left(\rho_-,u_-\right)+\hat{J}_1^- +\left(\hat{\rho}_1,\hat{u}_1\right)+\hat{J}_1+\left(\hat{\rho}_3,\hat{u}_3\right)+\hat{J}_2+\left(\hat{\rho}_2,\hat{u}_2\right)+\hat{J}_2^+ +\left(\rho_+,u_+\right)$$

这时，我们已经完全构造好了(1.4)和(3.1)解，接下来我们只要令 $\varepsilon\to 0$ 我们就得到了(1.4)和(1.5)的解。我们容易得到

$$\begin{cases}\hat{u}_1=u_0\\ \hat{u}_1-\dfrac{1}{\hat{\rho}_1}=u_--\dfrac{1}{\rho_-}\end{cases},\ \begin{cases}\hat{u}_2=u_+\\ \hat{u}_2-\dfrac{1}{\hat{\rho}_2}=u_0\end{cases},\ \begin{cases}\hat{u}_3=u_+\\ \hat{u}_3-\dfrac{1}{\hat{\rho}_3}=u_--\dfrac{1}{\rho_-}\end{cases},\ \left(x_0,t_0\right)=\left(u_0m_0,m_0\right).$$

对 $0\le t\le m_0$， δ -激波为 $x(t)=u_0t,w(t)=m_0-t,u_\delta(t)=u_0$ 。

且这个解满足下面广义的 Rankine-Hugoniot 条件

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta(t)[\rho]-[\rho u],\\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)u_\delta(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta[t][\rho u]-\left[\rho u^2-u\right],\end{cases}$$

及初值条件 $\left(x,w,u_\delta\right)(0)=\left(0,m_0,u_0\right)$，其中 $[\rho]=\rho_+-\rho_-$ 。

子情形 3.1.2 $u_--\dfrac{1}{\rho_-}=u_0<u_+$ 。

$\left(\rho_*,u_*\right)$ 由下面方程组可以得到

$$\begin{cases}u_*=u_+,\\ u_*-\dfrac{1}{\rho_*}=u_0.\end{cases}$$

对 $t\ge 0$， δ -激波解为 $x(t)=u_0t,w(t)=m_0,u_\delta(t)=u_0$ 。

子情形 3.1.3 $u_--\dfrac{1}{\rho_-}<u_0=u_+$ 。

$\left(\rho_*,u_*\right)$ 由下面方程组可以得到

$$\begin{cases}u_*=u_0,\\ u_*-\dfrac{1}{\rho_*}=u_--\dfrac{1}{\rho_-}.\end{cases}$$

对 $t\ge 0$， δ -激波解为 $x(t)=u_0t,w(t)=m_0,u_\delta(t)=u_0$ 。

情形 3.2 $u_0<u_--\dfrac{1}{\rho_-}<u_+$ 。**(当** $u_--\dfrac{1}{\rho_-}<u_+<u_0$ **时，那么解的结构是相似的。)**

一开始，我们可以看出粒子 $x_0<0$ 会与粒子 $x_0=0$ 碰撞。粒子 $x_0\le 0$ 不会与粒子 $x_0>0$ 碰撞。因此我们把解写成

$$(\rho,u)(t,x)=\begin{cases}\left(\rho_-,u_-\right), & x<x(t),\\ \left(w(t)\delta\left(x-x(t)\right),u_\delta(t)\right), & x=x(t),\\ \left(\bar{\rho}(t,x),\bar{u}(t,x)\right), & x(t)<x<u_+t,\\ \left(\rho_+,u_+\right), & x\ge u_+t.\end{cases}$$

其中，对 $\bar{t}\ge 0$， $(\bar{\rho},\bar{u})(t,x)=\left(\rho_*,u_*\right)(\bar{t})$ 是沿着直线 $u_+t-x=u_+\bar{t}-x(\bar{t})$ 。这里 $\left(\rho_*,u_*\right)(t)$ 是 δS 的右状态由下面

方程组决定

$$\begin{cases} u_*(t) = u_+, \\ u_*(t) - \dfrac{1}{\rho_*(t)} = u_\delta(t). \end{cases}$$

δ -激波满足下面广义的 Rankine-Hugoniot 条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u_\delta(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = u_\delta(t)[\rho] - [\rho u], \\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)u_\delta(t)}{\mathrm{d}t} = u_\delta(t)[\rho u] - \left[\rho u^2 - u\right], \end{cases} \tag{3.2}$$

其中 $[\rho] = \rho_*(t) - \rho_-$，带有初值条件

$$t = 0 : x(0) = 0, w(0) = m_0, u(0) = u_0 \text{。} \tag{3.3}$$

接下来，根据初值问题(3.2)和(3.3)，我们主要解出 $\left(x(t), w(t), u_\delta(t)\right)$。同时 u_δ 满足 $u_0 < u_\delta < u_- - \dfrac{1}{\rho_-}$。

从(3.2)，得到

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \rho_*(u_\delta - u_*) - \rho_- u_\delta + \rho_- u_- = -1 - \rho_- u_\delta + \rho_- u_- = \rho_-\left(u_- - \rho_-^{-1} - u_\delta\right) > 0 \text{。} \tag{3.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}wu_\delta}{\mathrm{d}t} = \rho_* u_*(u_\delta - u_*) - \rho_- u_- u_\delta + \rho_- u_-^2 + u_* - u_- = u_-(-1 - \rho_- u_\delta + \rho_- u_-) = u_- \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \text{。} \tag{3.5}$$

对(3.5)从 0 到 t 积分及由初值(3.3)，我们得到

$$w(u_- - u_\delta) = m_0 u_- - m_0 u_0 \text{。} \tag{3.6}$$

可以看成 $w > 0$。

或

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{A - w}{w} > 0 \text{，} \tag{3.7}$$

表明 $A > w$，其中 $A = \rho_- u_- m_0 - \rho_- u_0 m_0 > 0$。

解(3.7)及 $w(0) = m_0$，得

$$f(w) = w - m_0 + A\left(\ln(A - w) - \ln(A - m_0)\right) = -t \text{。} \tag{3.8}$$

并且因为 $f'(w) = \dfrac{-w}{A - w} < 0$，所以我们得到 $w(t) = f^{-1}(-t)$。

那么我们得到

$$u_\delta(t) = u_- - \frac{m_0 u_- - m_0 u_0}{w(t)}, \quad x(t) = \int_0^t u_\delta(y)\mathrm{d}y \text{。}$$

情形 3.3 $u_+ < u_0 < u_- - \dfrac{1}{\rho_-}$。

在原点会产生一个 δ -激波，这是个很典型的情形。我们可以找到下面形式的解

$$(\rho,u)(t,x)=\begin{cases}(\rho_-,u_-), & x<x(t),\\ \big(w(t)\delta(x-x(t)),u_\delta(t)\big), & x=x(t),\\ (\rho_+,u_+), & x>x(t),\end{cases}$$

其中 $x(t)$， $w(t)$ 和 $u_\delta(t)$ 满足广义的 Rankine-Hugoniot 条件(3.9)

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta(t)[\rho]-[\rho u],\\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)u_\delta(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta(t)[\rho u]-\left[\rho u^2-u\right],\end{cases}\tag{3.9}$$

和初值(3.3)，其中 $[\rho]=\rho_+-\rho_-$。

对(3.9)从 0 到 t 积分及初值(3.3)，我们得到

$$\begin{cases}w(t)-m_0=x[\rho]-[\rho u]t.\\ w(t)u_\delta(t)-m_0u_0=x[\rho u]-\left[\rho u^2-u\right]t.\end{cases}\tag{3.10}$$

消去(3.10)的 w，得

$$m_0u_0-m_0u_\delta=[\rho]xu_\delta-[\rho u]tu_\delta-[\rho u]x+\left[\rho u^2-u\right]t$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}[\rho]x^2-\big([\rho u]t-m_0\big)x+\frac{1}{2}\left[\rho u^2-u\right]t^2-m_0u_0t\right)=0\text{。}\tag{3.11}$$

解(3.11)，有

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{m_0u_0t-\frac{1}{2}\left[\rho u^2-u\right]t^2}{m_0-[\rho u]t}, & [\rho]=0,\\ \dfrac{-m_0+[\rho u]t+w(t)}{[\rho]}, & [\rho]\neq 0.\end{cases}$$

如果 $[\rho]\neq 0$，易知 $\left(\rho_+\rho_-[u]^2+[\rho][u]\right)t^2+2m_0t\big(\rho_+(u_0-u_+)+\rho_-(u_--u_0)\big)+m_0^2>0$。

从(3.10)，得

$$\begin{aligned}w(t)&=\left\{\big([\rho u]t-m_0\big)^2-[\rho]\left[\rho u^2-u\right]t^2+2[\rho]m_0u_0t\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &=\left\{\left(\rho_+\rho_-[u]^2+[\rho][u]\right)t^2+2m_0t\big(\rho_+(u_0-u_+)+\rho_-(u_--u_0)\big)+m_0^2\right\}^{\frac{1}{2}}\text{。}\end{aligned}$$

$$u_\delta(t)=\frac{1}{w(t)}\left(m_0u_0+[\rho u]x(t)-\left[\rho u^2-u\right]t\right)\text{。}$$

如果 $[\rho]=0$，

$$w(t)=m_0-[\rho u]t,\quad u_\delta(t)=\frac{x(t)[\rho u]-\left[\rho u^2-u\right]t+m_0u_0}{m_0-t[\rho u]}.$$

注 3.1 我们易知

$$\lim_{t\to\infty} u_\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{\left[\rho u^2 - u\right]}{2[\rho u]}, & [\rho] = 0, \\ \dfrac{[\rho u] + \sqrt{\rho_+\rho_-[u]^2 + [\rho][u]}}{[\rho]}, & [\rho] \neq 0. \end{cases}$$

根据文献[4]，我们易知δ-激波满足熵条件，即

$$u_+ < \lim_{t\to\infty} u_\delta(t) < u_- - \frac{1}{\rho_-},$$

这个意味着所有的特征线都在δ-激波两边。因此我们得到了一维带有 Chaplygin 压强的 Aw-Rascle 的模型的黎曼问题的整体解。

注 3.2 如果 $m_0 = 0, u_0 = 0$，那么

$$(x, w, u_\delta)(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{\left[\rho u^2 - u\right]}{2[\rho u]} t, -[\rho u] t, \dfrac{\left[\rho u^2 - u\right]}{2[\rho u]}\right), & [\rho] = 0. \\ \left(\dfrac{[\rho u] + \sqrt{\rho_+\rho_-[u]^2 + [\rho][u]}}{[\rho]} t, t\sqrt{\rho_+\rho_-[u]^2 + [\rho][u]}, \dfrac{[\rho u] + \sqrt{\rho_+\rho_-[u]^2 + [\rho][u]}}{[\rho]}\right), & [\rho] \neq 0. \end{cases}$$

这个结果与第 2 部分是一致的。

情形 3.4 $u_0 < u_+ < u_- - \dfrac{1}{\rho_-}$。**(当** $u_+ < u_- - \dfrac{1}{\rho_-} < u_0$ **时，那么解的结构是相似的。)**

对于这种情形，可以看出一开始粒子 $x_0 < 0$ 会与那些粒子 $x_0 = 0$ 碰撞。对 $0 \le t < t^*$ 时，解 $\left(x(t), w(t), u_\delta(t)\right)$ 是与情形 3.2 相似的，我们把解写成

$$(\rho, u)(t, x) = \begin{cases} (\rho_-, u_-), & x < x(t), \\ \left(w(t)\delta\left(x - x(t)\right), u_\delta(t)\right), & x = x(t), \\ \left(\bar{\rho}(t, x), \bar{u}(t, x)\right), & x(t) < x < u_+ t, \\ (\rho_+, u_+), & x \ge u_+ t, \end{cases}$$

其中，对 $0 < \bar{t} \le t^*$，$(\bar{\rho}, \bar{u})(t, x) = (\rho_*, u_*)(\bar{t})$ 是沿着直线 $u_+ t - x = u_+\bar{t} - x(\bar{t})$。$t^*$ 是与粒子 $x_0 > 0$ 碰撞产生δ-激波的时间。t^* 由方程 $x(t^*) = u_+ t^*$ 决定，当 $t > t^*$ 时，δ-激波会追赶所有的 2-接触间断并且在有限时间内穿透，假设是在 $t = t^\#$ 穿透结束。

当 $t^* \le t < t^\#$ 时，粒子 $x_0 \le 0$ 开始与粒子 $x_0 > 0$ 碰撞。这时我们有初值

$$t = t^* : x^1(t^*) = x^*, w^1(t^*) = w^*, u_\delta^1(t^*) = u_\delta^*。\tag{3.12}$$

我们把解写成

$$(\rho, u)(t, x) = \begin{cases} (\rho_-, u_-), & x < x^1(t), \\ \left(w^1(t)\delta\left(x - x^1(t)\right), u_\delta^1(t)\right), & x = x^1(t), \\ \left(\bar{\rho}(t, x), \bar{u}(t, x)\right), & x^1(t) < x < u_+ t, \\ (\rho_+, u_+), & x > u_+ t. \end{cases}$$

其中，对 $0<\overline{t}\le t^*$，$(\overline{\rho},\overline{u})(t,x)=(\rho_*,u_*)(\overline{t})$ 是沿着直线 $u_+t-x=u_+\overline{t}-x(\overline{t})$。这里 $(\rho_*,u_*)(t_1)$ 是 δS_1 的右状态由下面方程组决定

$$\begin{cases} u_*(t_1)=u_+, \\ u_*(t_1)-\dfrac{1}{\rho_*(t_1)}=u_\delta(t_1). \end{cases}$$

当 $t^\#\le t<\infty$ 时，解可以写为

$$(\rho,u)(t,x)=\begin{cases} (\rho_-,u_-), & x<x^2(t), \\ \left(w^2(t)\delta\left(x-x^2(t)\right),u_\delta^2(t)\right), & x=x^2(t), \\ (\rho_+,u_+), & x>x^2(t). \end{cases}$$

当 $t^*\le t<t^\#$ 时，对任意在激波 δS_1 上的点 $\left(x^1(t),t\right)$，在激波 δS 存在唯一点 $\left(x(t_1),t_1\right)$，使得下面式子成立

$$u_+t-x^1(t)=u_+t_1-x(t_1)。 \tag{3.13}$$

对于 $t^*\le t<t^\#$，广义解满足下面广义的 Rankine-Hugoniot 条件及初值 (3.12)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x^1(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta^1(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}w^1(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta^1(t)[\rho]-[\rho u], \\ \dfrac{\mathrm{d}w^1(t)u_\delta^1(t)}{\mathrm{d}t}=u_\delta^1(t)[\rho u]-\left[\rho u^2-u\right], \end{cases} \tag{3.14}$$

其中 $[\rho]=\rho_*(t_1)-\rho_-$。

对(3.4)和(3.7)从 0 到 t_1 积分且满足初值 $w(0)=m_0$ 有

$$w(t_1)-m_0+t_1=\rho_-\left(u_-t_1-x(t_1)\right)。 \tag{3.15}$$

$$w(t_1)-m_0+A\left(\ln\left(A-w(t_1)\right)-\ln\left(A-m_0\right)\right)=-t_1。 \tag{3.16}$$

令 $a=\rho_-u_--\rho_-u_+$，那么我们计算 $(3.16)\times a+(3.15)$ 得到

$$aw(t_1)-am_0+(a-1)A\left(\ln\left(A-w(t_1)\right)-\ln\left(A-m_0\right)\right)=\rho_-\left(u_+t_1-x(t_1)\right)。 \tag{3.17}$$

利用(3.13)，那么(3.17)变为

$$aw(t_1)-am_0+(a-1)A\left(\ln\left(A-w(t_1)\right)-\ln\left(A-m_0\right)\right)=\rho_-\left(u_+t-x^1(t)\right)。 \tag{3.18}$$

而且，对(3.5)从 0 到 t_1 积分且满足初值 $w(0)=m_0$ 有

$$w(t_1)=\frac{m_0u_--m_0u_0}{u_--u_\delta(t_1)}。 \tag{3.19}$$

有

$$u_\delta(t_1)=u_+-\frac{1}{\rho_*(t_1)}。 \tag{3.20}$$

结合(3.19)和(3.20)，有

$$w(t_1)=\frac{A}{\rho_-\left(u_- - u_+ + \frac{1}{\rho_*(t_1)}\right)}。\tag{3.21}$$

从(3.18)，有

$$F\left(\frac{1}{\rho_*(t_1)}\right)=u_+t-x^1(t),$$

其中

$$F(s)=\frac{1}{\rho_-}\left(\frac{aA}{\rho_-(u_- - u_+ + s)}+(a-1)A\ln\left(A-\frac{A}{\rho_-(u_- - u_+ + s)}\right)-am_0-(a-1)A\ln(A-m_0)\right)$$

$$F'(s)=\frac{-As}{\rho_-^2(u_- - u_+ + s)^2\left(u_- - u_+ + s-\rho_-^{-1}\right)}<0$$

是单调的，因此我们得到

$$\frac{1}{\rho_*(t_1)}=G\left(u_+t-x^1(t)\right),\tag{3.22}$$

其中 $G=F^{-1}$ 和 $\frac{1}{G}$ 是可积的。

从(3.14)得

$$\frac{\mathrm{d}w^1}{\mathrm{d}t}=\rho_*(t_1)\left(u_\delta^1-u_+\right)-\rho_-u_\delta^1+\rho_-u_-,\tag{3.23}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}w^1u_\delta^1}{\mathrm{d}t}=\rho_*(t_1)u_\delta^1u_+-\rho_*(t_1)u_+^2-\rho_-u_-u_\delta^1+\rho_-u_-^2+u_+-u_-。\tag{3.24}$$

分别把(3.22)带入(3.23)和(3.24)，通过 $(3.24)-(3.23)\times u_\delta^1$ 消去 w^1，有

$$\begin{aligned}&\left(u_+-u_\delta^1\right)\int_{t^*}^{t}\frac{u_\delta^1(y)-u_+}{G\left(u_+y-x^1(y)\right)}\mathrm{d}y+\rho_-u_\delta^1\left(x^1-x^*\right)+\rho_-u_-^2\left(t-t^*\right)\\&-\rho_-u_-\left(x^1-x^*+u_\delta^1\left(t-t^*\right)\right)-\left(u_--u_+\right)\left(t-t^*\right)+w^*\left(u_\delta^*-u_\delta^1\right)=0\end{aligned}。\tag{3.25}$$

对(3.25)从 t^* 到 t 积分且满足初值(3.12)得到

$$\begin{aligned}&\int_{t^*}^{t}\left(u_+-u_\delta^1\right)\int_{t^*}^{s}\frac{u_\delta^1(y)-u_+}{G\left(u_+y-x^1(y)\right)}\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\rho_-\left(x^1-x^*\right)^2-\frac{1}{2}\left(u_--u_+\right)\left(t-t^*\right)^2\\&-\rho_-u_-\left(x^1-x^*\right)\left(t-t^*\right)+\frac{1}{2}\rho_-u_-^2\left(t-t^*\right)^2-w^*\left(x^1-x^*-u_+\left(t-t^*\right)\right)=0\end{aligned}。\tag{3.26}$$

令 $Y=u_+y-x^1(y)$， $Z=u_+s-x^1(s)$，那么(3.26)的第一项等价于

$$-\int_{u_+t^*-x^*}^{u_+t-x^1}\int_{u_+t^*-x^*}^{Z}\frac{1}{G(Y)}\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z,$$

总是负数。因此(3.26)可以写为 $H\left(x^1,t\right)=0$，

其中

$$\begin{aligned}H\left(x^1,t\right)=&-\int_{u_+t^*-x^*}^{u_+t-x^1}\int_{u_+t^*-x^*}^{Z}\frac{1}{G(Y)}\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z+\frac{1}{2}\rho_-\left(x^1-x^*\right)^2-\frac{1}{2}\left(u_--u_+\right)\left(t-t^*\right)^2\\&-\rho_-u_-\left(x^1-x^*\right)\left(t-t^*\right)+\frac{1}{2}\rho_-u_-^2\left(t-t^*\right)^2-w^*\left(x^1-x^*-u_+\left(t-t^*\right)\right)\end{aligned}。\tag{3.27}$$

对 $t^*\le t<t^\#$，我们得到

$$H\big|_{x^1=x^*+u_+\left(t-t^*\right)}=\frac{1}{2}\rho_-\left(u_+-u_-\right)\left(t-t^*\right)^2\left(u_+-u_-+\frac{1}{\rho_-}\right)>0，\tag{3.28}$$

和

$$H\big|_{x^1=x^*+u_-\left(t-t^*\right)}\le\left(\frac{1}{2}\rho_-u_-^2-\rho_-u_-^2+\frac{1}{2}\rho_-u_-^2\right)\left(t-t^*\right)^2-w^*\left(u_--u_+\right)\left(t-t^*\right)-\frac{1}{2}\left(u_--u_+\right)\left(t-t^*\right)^2<0\tag{3.29}$$

而且，对 $x^*+u_+\left(t-t^*\right)<x^1<x^*+u_-\left(t-t^*\right)$，有

$$\frac{\partial H}{\partial x^1}=\int_{u_+t^*-x^*}^{u_+t-x^1}\frac{1}{G(Y)}\mathrm{d}Y+\rho_-\left(x^1-x^*-u_-\left(t-t^*\right)\right)-w^*<0。\tag{3.30}$$

结合(3.28)，(3.29)和(3.30)，在区间 $x^*+u_+\left(t-t^*\right)<x^1<x^*+u_-\left(t-t^*\right)$ 存在唯一解，使得对 $t^*\le t<t^\#$，有 $H\left(x^1,t\right)=0$ 成立。那么根据(3.14)，我们可以得到 $w^1(t)$ 和 $u_\delta^1(t)=\dfrac{\mathrm{d}x^1(t)}{\mathrm{d}t}$。

对 $t^\#\le t<\infty$ 时，其中 $t^\#$ 由 $x^1\left(t^\#\right)=u_+t^\#$ 决定，它的解与情形 3.3 是相似的，满足广义的 Rankine-Hugoniot 条件(3.9)和初值条件

$$\left(x^2,w^2,u_\delta^2\right)\left(t^\#\right)=\left(x^1\left(t^\#\right),w^1\left(t^\#\right),u_\delta^1\left(t^\#\right)\right)。$$

这里省略。

4. 结论

本文研究了带有 Chaplygin 压强的 Aw-Rascle 交通模型含有狄拉克函数初值的黎曼问题。根据 $u_--\dfrac{1}{\rho_-}$，u_0 和 u_+ 之间的关系，我们分情形讨论。首先给初值一扰动得到了黎曼解的稳定性，然后给出了解的结构，包含有 delta 激波。delta 激波对于揭示自然界及工程技术中的非线性现象的基本规律具有重大意义，因此这些解是很有用的。

参考文献 (References)

[1] M. Godvik, H. Hanche-Olsen. Existence of solutions for the Aw-Rascle traffic flow model with vacuum. Journal of Hyperbolic Differential Equations, 2008, 5(1): 45-63.

[2] M. Sun. Interactions of elementary waves for the Aw-Rascle model. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2009, 69(6): 1542-1558.

[3] C. Shen, M. Sun. Formation of delta shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of Riemann solutions to the perturbed Aw-Rascle model. Journal of Differential Equations, 2010, 249(12): 3024-3051.

[4] L. Pan, X. Han. The Aw-Rascle traffic model with Chaplygin pressure. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 401(1): 379-387.

[5] P. Goatin. The Aw-Rascle vehicular traffic flow model with phase transitions. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 44(3): 287-303.
[6] Y. Brenier. Solutions with concentration to the Riemann problem for the one-dimensional Chaplygin gas equations. Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2005, 7(3): 326-331.
[7] Z. K. Guo, Y. Z. Zhang. Cosmology with a variable Chaplygin gas. Physics Letters B, 2007, 645(4): 326-329.
[8] D. Serre. Multidimensional shock interaction for a Chaplygin gas. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2009, 191(3): 539-577.
[9] G. Lai, W. C. Sheng and Y. X. Zheng. Simple waves and pressure delta waves for a Chaplygin gas in two-dimensions. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2011, 31(2): 489-523.
[10] S. Chen, A. Qu. Two-dimensional Riemann problems for Chaplygin gas. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2012, 44(3): 2146-2178.
[11] H. C. Yang, W. H. Sun. The Riemann problem with delta initial data for a class of coupled hyperbolic systems of conservation laws. Nonlinear Analysis, 2007, 67(11): 3041-3049.
[12] Z. Wang, Q. L. Zhang. The Riemann problem with delta initial data for the one-dimensional Chaplygin gas equations. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32B(3): 825-841.
[13] H. Cheng, H. Yang. Riemann problem for the relativistic Chaplygin Euler equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 381(1): 17-26.

