Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2014, 3, 1-7
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2014.31001 Published Online February 2014 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

The Existence of Global Strong Solution for a Class of Nonlinear Evolution Equations

Yanru Li, Qingsong Li, Jialei Ma

School of Mathematic and Computation, Changsha University of Science and Technology, Changsha
Email: yanrulilong@126.com

Received: Dec. 25th, 2013; revised: Jan. 23rd, 2014; accepted: Feb. 4th, 2014

Abstract: The well-posed problem of global strong solution for a class of nonlinear evolution equations is studied in this paper. By applying the method of *Galerkin* and energy estimate, we obtain the existence and uniqueness of global strong solution of the following initial boundary value problem, and the continuous dependence of initial data. The result of the paper is the latest, where the nonlinear term *f* satisfies arbitrary polynomial exponential growth condition.

Keywords: Nonlinear Evolution Equations; *Galerkin* Method; Global Strong Solution; Polynomial Exponential Growth

一类非线性发展方程整体强解的存在性研究

李妍汝，李青松，马加磊

长沙理工大学数学与计算科学学院，长沙
Email: yanrulilong@126.com

收稿日期：2013 年 12 月 25 日；修回日期：2014 年 1 月 23 日；录用日期：2014 年 2 月 4 日

摘　要：本文主要研究一类非线性发展方程整体强解的适定性问题，我们利用 *Galerkin* 方法和能量估计方法得到初边值问题整体强解的存在唯一性，以及对初值的连续依赖性。所得的结果是最新的，其中非线性项满足任意多项式指数增长条件。

关键词：非线性发展方程方程；*Galerkin* 方法；整体强解；多项式指数增长

1. 引言

本文我们主要讨论如下一类非线性发展方程整体强解的存在性

$$\begin{cases} u_t-\Delta u-\Delta u_t+f(u)=g(t), & x\in\Omega, t\ge\tau\in R, & (1)\\ u(x,t)=u_\tau(x), & x\in\Omega, t\le\tau, & (2)\\ u|_{\partial\Omega}=0, & t\ge\tau, & (3)\end{cases}$$

其中 $\Omega\subset R^3$ 为具有适当光滑边界的有界区域。

非线性发展方程广泛出现在非牛顿流体，土壤力学及热传导理论等领域。关于项 Δu_t 的物理解释可参见文献[1]。在文献[2-4]中作者讨论了(1)~(3)在存在弱解的情况下全局吸引子的存在性，在[5]中，作者讨论了(1)~(3)在

存在全局解的情况下全局吸引子的存在性，在[6]中，作者讨论了此方程的指数吸引子的存在性，在[7]中研究了一类非线性发展方程在空间 $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 上的全局吸引子，并且证明了全局解的存在性。但是未对方程的初边值进行讨论，另外对非线性项 f 的满足条件也不同，本文给出了非线性项 f 满足如下多项式增长的条件：

I) $C_1|s|^p - C_2 \le f(s)s \le C_3|s|^p + C_4$

II) $f'(s) \ge -l$

其中 $s\in R, l, C_i\,(i=1,2,3,4)$ 均为正常数。为了方便起见，在本文中我们将用 C 表示常数，在不同的地方甚至在同一行中 C 将表示不同的常数。

本文利用 Galerkin 方法，结合能量估计的方法证明方程(1)~(3)的整体强解的存在性，并得到其解是唯一的，以及对初值是连续依赖的。

2. 整体强解的存在性

我们假设 $\omega_j(x)$ 为方程 $-\Delta\omega_j = \lambda_j\omega_j, \omega_j|_{\partial\Omega}=0$ 的特征函数，λ_j 为特征值，故 $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ 构成了 $L^2(\Omega)$ 的某标准正交基 $(\omega_i,\omega_j)=\delta_{ij}, i,j=1,2,\cdots$。

当 $\Omega\in C^2$ 时，$\omega_j(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，且 $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 中的稠密子集，$\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ 在 $H^2(\Omega)$ 中的闭线性扩张为 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$。

设 E_n 为由 $\{\omega_1(x),\omega_2(x),\cdots,\omega_n(x)\}$ 张成的线性子空间，记 P_n 为从 $L^2(\Omega)$ 到 E_n 的正交投影，即对任意的 $u\in L^2(\Omega)$，

$$u_n = P_n u = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\omega_j(x)$$

其中 $a_j(t) = \left(u(x,t),\omega_j(x)\right)$。设初边值问题(1)~(3)的近似解为

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} a_{jn}(t)\omega_j(x), n=1,2,\cdots,$$

由 *Galerkin* 方法，它应满足如下非线性常微分方程组

$$u_{nt} - \Delta u_n - \Delta u_{nt} + f(u_n) = P_n g(t),\quad u_n(\tau) = P_n u(\tau) \tag{4}$$

则由常微分方程理论，得方程(4)存在唯一的解 u_n，并且可得如下结论：

引理 1 假设：

1) $\Omega\in C^2, f(s)\in C^1(R)$，并且满足假设条件(I)~(II)，而 $g\in L_b^2\left(R, L^2(\Omega)\right)$；

2) $u_\tau \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，并选取 $a_{jn}(\tau)$，使得 $u_n(\tau)\xrightarrow{H^2} u_\tau(x)$。

则对于任意的 $t>\tau$ 方程(4)存在唯一解 u_n，并且满足：

$$|u_n(t)|_2^2 + \|u_n(t)\|_0^2 \le E_1, \tag{5}$$

其中 E_1 为与 n 无关的正常数。

证：对(4)式的两边同时乘以 u_n,并在 Ω 上对 x 积分，由分部积分公式有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|u_n|_2^2 + \|u_n\|_0^2\right] + \|u_n\|_0^2 + \int_\Omega f(u_n)u_n = \int_\Omega g(t)u_n, \tag{6}$$

由假设条件(I)及 Hölder 不等式，存在仅与常数 C_1 及区域 Ω 的测度有关的常数 $\alpha_1>0$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|u_n|_2^2 + \|u_n\|_0^2\right] + \alpha_1\left[|u_n|_2^2 + \|u_n\|_0^2\right] \le C|g(t)|_2^2 + C_2 \tag{7}$$

由 *Gronwall* 引理有

$$|u_n|_2^2+\|u_n\|_0^2\le\left[|u_n(\tau)|_2^2+\|u_n(\tau)\|_0^2\right]\mathrm{e}^{\alpha_1(\tau-t)}+C_2\left(1-\mathrm{e}^{\alpha_1(\tau-t)}\right)+C\|g\|_{L_b^2}^2$$

又由于$u_n(x,\tau)\xrightarrow{H^2}u_\tau(x)$，故有

$$|u_n(\tau)|_2^2+\|u_n(\tau)\|_0^2\to|u_\tau|_2^2+\|u_\tau\|_0^2,n\to\infty$$

故存在$N_1>0$，当$n>N_1$时，有

$$|u_n(\tau)|_2^2+\|u_n(\tau)\|_0^2\le|u_\tau|_2^2+\|u_\tau\|_0^2+C_2$$

取$E_1=|u_\tau|_2^2+\|u_\tau\|_0^2+2C_2+C\|g\|_{L_b^2}^2$，则对任意$t\ge\tau$，有$|u_n|_2^2+\|u_n\|_0^2\le E_1$。

证毕。

引理 2 在引理 1 的假设条件下，方程(4)的解满足下列估计：

$$|u_n(t)|_p^p+|\Delta u_n(t)|_2^2\le E_2\text{；}$$

并且对一切的$t>\tau$，有

$$\int_\tau^t\left[\|u_{nt}(s)\|_0^2+|\Delta u_{nt}(s)|_2^2\right]\mathrm{d}s\le E_3,$$

其中E_2,E_3均为与n无关的正常数。

证：对方程(4)的两边同乘以u_{nt}并对x在Ω上积分，由分部积分公式有

$$\int_\Omega g(t)u_{nt}\le\frac{1}{2}|g(t)|_2^2+\frac{1}{2}|u_{nt}|_2^2,$$

$$|u_{nt}|_2^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|u_n\|_0^2+2\int_\Omega F(u_n)\right]+\|u_{nt}\|_0^2=\int_\Omega g(t)u_{nt} \tag{8}$$

而我们注意到

$$\int_\Omega g(t)u_{nt}\le\frac{1}{2}|g(t)|_2^2+\frac{1}{2}|u_{nt}|_2^2, \tag{9}$$

则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|u_n\|_0^2+2\int_\Omega F(u_n)\right]+\frac{1}{2}|u_{nt}|_2^2+\|u_{nt}\|_0^2\le\frac{1}{2}|g(t)|_2^2, \tag{10}$$

将(6)式与(10)式相加化简得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|u_n|_2^2+2\|u_n\|_0^2+2\int_\Omega F(u_n)\right]+\frac{1}{2}\|u_n\|_0^2+\int_\Omega f(u_n)u_n\le C|g(t)|_2^2 \tag{11}$$

由假设条件(I)~(II)，存在正常数α_2使得下式成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[|u_n|_2^2+2\|u_n\|_0^2+2\int_\Omega F(u_n)\right]+\alpha_2\left[|u_n|_2^2+2\|u_n\|_0^2+2\int_\Omega F(u_n)\right]\le C|g(t)|_2^2, \tag{12}$$

由 Gronwall 引理，对任意的$t>\tau$，

$$|u_n(t)|_2^2+2\|u_n(t)\|_0^2+2\int_\Omega F(u_n(t))\le\left[|u_n(\tau)|_2^2+2\|u_n(\tau)\|_0^2+2\int_\Omega F(u_n(\tau))\right]\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}+C\|g\|_{L_b^2}^2 \tag{13}$$

而

$$\int_\Omega F(u_n(t))\ge C_1|u_n(t)|_p^p-C_2,\quad\int_\Omega F(u_n(t))\le C_3|u_n(t)|_p^p+C_4$$

则对一切的$t>\tau$，有

$$\left|u_n(t)\right|_p^p \le \frac{1}{2C_1}\left[\left|u_n(\tau)\right|_2^2 + 2\left\|u_n(\tau)\right\|_0^2 + 2C_3\left|u_n(\tau)\right|_p^p + C_4\right] + C\|g\|_{L_b^2}^2 \tag{14}$$

故存在与 n 无关的正常数 ρ，对一切的$t\ge\tau$，有

$$\left|u_n(t)\right|_p^p \le \rho \tag{15}$$

对方程(4)式的两边同乘以$-\Delta u_n$，再对 x 在 Ω 上积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|u_n\|_0^2 + |\Delta u_n|_2^2\right] + |\Delta u_n|_2^2 - \int_\Omega f(u_n)\Delta u_n = -\int_\Omega g(t)\Delta u_n, \tag{16}$$

由假设条件 II 及 Hölder 不等式有

$$-\int_\Omega f(u_n)\Delta u_n = \int_\Omega f'(u)|\nabla u_n|^2 \ge -l\|u_n\|_0^2, \tag{17}$$

$$-\int_\Omega g(t)\Delta u_n \le \frac{1}{2}|g|_2^2 + \frac{1}{2}|\Delta u_n|_2^2, \tag{18}$$

将(17)、(18)式代入(16)式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|u_n\|_0^2 + |\Delta u_n|_2^2\right] + \|u_n\|_0^2 + |\Delta u_n|_2^2 \le (l+1)\|u_n\|_0^2 + |g(t)|_2^2$$

由 *Gronwall* 引理可得

$$\|u_n(t)\|_0^2 + |\Delta u_n(t)|_2^2 \le \left[\|u_n(\tau)\|_0^2 + |\Delta u_n(\tau)|_2^2\right]\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + (l+1)E_1 + C\|g\|_{L_b^2}^2, \tag{19}$$

又由于$u_n(\tau)\xrightarrow{H^2}u_\tau$，则存在 N_2，使得当$n>N_2$时，有

$$\|u_n(\tau)\|_0^2 + |\Delta u_n(\tau)|_2^2 \le \|u_\tau\|_0^2 + |\Delta u_\tau|_2^2 + 1 \tag{20}$$

将(20)式代入(19)式中便可以得到，当$t\ge\tau$时，有

$$\|u_n(t)\|_0^2 + |\Delta u_n(t)|_2^2 \le \|u_\tau\|_0^2 + |\Delta u_\tau|_2^2 + 1 + (l+1)E_1 + C|g|_{L_b^2}^2, \tag{21}$$

结合(21)及(15)，对一切$t\ge\tau$，存在与 n 无关的正常数E_2，使得$|\Delta u_n(t)|_2^2 + |u_n(t)|_p^p \le E_2$。
将(4)式两边同乘以$-\Delta u_{nt}$，并且等式两边关于 x 在 Ω 上积分，得

$$\|u_{nt}\|_0^2 + |\Delta u_{nt}|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta u_n|_2^2 = \int_\Omega f(u_n)\Delta u_{nt} - \int_\Omega g(t)\Delta u_{nt} \tag{22}$$

由 Sobolev 嵌入定理，因$\Omega\subset R^3$，则对任意的$1\le q<+\infty$，有$H^2(\Omega)\subset L^q(\Omega)$，故有

$$\int_\Omega f(u_n)\Delta u_{nt} \le \frac{1}{4}|\Delta u_{nt}|_2^2 + C\left(|u_n|_{2p}^{2p}+1\right) \le \frac{1}{4}|\Delta u_{nt}|_2^2 + C\left(1+E_2^p\right), \tag{23}$$

$$-\int_\Omega g(t)\Delta u_{nt} \le |g(t)|_2^2 + \frac{1}{4}|\Delta u_{nt}|_2^2, \tag{24}$$

将(23)、(24)带入(22)式得

$$\|u_{nt}\|_0^2 + \frac{1}{2}|\Delta u_{nt}|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Delta u_n|_2^2 \le C\left(1+E_2^p\right) + |g(t)|_2^2, \tag{25}$$

将(25)式两边对 t 从 τ 到 t 积分，则有

$$\int_\tau^t\left[\left\|u_{nt}(s)\right\|_0^2+\left|\Delta u_{nt}(s)\right|_2^2\right]\mathrm{d}s\le 2\left(C+CE_2^p+2\|g\|_{L_b^2}^2\right)(t-\tau+1)$$

于是有

$$\int_\tau^t\left[\left\|u_{nt}(s)\right\|_0^2+\left|\Delta u_{nt}(s)\right|_2^2\right]\mathrm{d}s\le E_3$$

证毕。

定理 3 设 $\Omega\subset R^3$ 且 $\Omega\in C^2$, $f\in C^1(R)$，且满足假设条件(I)~(II)，$u_\tau(x)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，则对任意 $t>\tau$，方程(1)存在如下 $\Omega\times[0,t]$ 的强解 $u(x,t)$，并且

$$u(x,t)\in L^\infty\left(0,t;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\cap C^0\left(\tau,t;H_0^1(\Omega)\right).$$

证：由于 $f(u)$ 是连续的，则方程(4)存在局部解，又由引理 1 及引理 2，对任意 $t>\tau$ 方程(4)都存在 $[\tau,t]$ 上的整体解 $u_n(x,t)$，又 $\{u_n(x,t)\}$ 在 $L^\infty\left(0,t;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ 中有界，$\{u_n\},\{u_{nt}\}$ 在 $L^2\left(\tau,t;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ 中一致有界，则由紧性定理，我们可以得到其子列 $\left\{u_{n_j}(x,t)\right\}$ 使得：

$u_{n_j}(x,t)\to u(x,t)$ 在 $L^\infty\left(\tau,t;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ 中弱*收敛；

$u_{n_j}(x,t)\to u(x,t)$ 在 $L^2\left(\tau,t;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ 中弱收敛；

$u_{n_jt}(x,t)\to u_t(x,t)$ 在 $L^2\left(\tau,t;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)$ 中弱收敛，

而且 $u_{n_j}(x,t)\to u(x,t)$ 在 $L^2(\Omega\times[\tau,t])$ 强收敛， $u_{n_j}(x,t)\to u(x,t)$ 在 $\Omega\times[\tau,t]$ 上几乎处处收敛。

由于 $f(u)$ 的连续性，有

$$f\left(u_{n_j}(x,t)\right)\to f\left(u(x,t)\right)$$

在 $\Omega\times[\tau,t]$ 上几乎处处收敛，并且 $f\left(u_{n_j}\right)$ 在 $\Omega\times[\tau,T]$ 上关于 n_j 一致有界，由 Lebesgue 控制收敛定理，对任意 $\varphi(x,t)\in C^0\left([\tau,t];L^2(\Omega)\right)$ 有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega\times[\tau,t]}f\left(u_j\right)\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{\Omega\times[\tau,t]}f(u)\phi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

而又由于 $g(x,t)\in L_{Loc}^2\left(\tau,+\infty;L^2(\Omega)\right)$，且 $\|P_ng\|_{L_b^2}\le\|g\|_{L_b^2}$，因而有 $P_{n_j}g(x,t)\to g(x,t)$ 在 $L^2\left(\tau,t;L^2(\Omega)\right)$ 中弱收敛，则有

$$\int_\tau^t\left(u_{n_jt}(s)-\Delta u_{n_jt}(s)-\Delta u_{n_j}(s)+f\left(u_{n_j}(s)\right)-P_ng(s),\phi(s)\right)\mathrm{d}s=0$$

两边令 $j\to\infty$，于是有

$$\int_\tau^t\left(u_t(s)-\Delta u_t(s)-\Delta u(s)+f\left(u(s)\right)-g(s),\phi(s)\right)\mathrm{d}s=0,$$

因此 $u(x,t)$ 为系统(1)~(3)的整体强解。证毕。

3. 整体强解的唯一性

定理4 在定理3的条件下，系统(1)~(3)的强解是唯一的，且连续依赖于初值。

证：假设 u^1 和 u^2 为系统(1)~(3)的两个解。令 $\omega=u^1-u^2$，则 ω 满足下面的初边值问题

$$\begin{cases}\omega_t-\Delta\omega-\Delta\omega_t+f\left(u^1-u^2\right)=0,x\in\Omega,t>0, & (26)\\ \omega|_{t\le\tau}=\omega_\tau=u_\tau^1-u_\tau^2, \qquad x\in\Omega, & (27)\\ \omega=0, \qquad x\in\partial\Omega,t\ge0, & (28)\end{cases}$$

其中 $u^i|_{t\le\tau}=u_\tau^i,i=1,2$。

用 ω 乘(26)式，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|\omega|_2^2+\|\omega\|_0^2\right)+\|\omega\|_0^2=-\left\langle f\left(u^1\right)-f\left(u^2\right),\omega\right\rangle, \tag{29}$$

又由假设条件(II)有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|\omega\|_0^2+|\omega|_2^2\right]\le l\left[\|\omega\|_0^2+|\omega|_2^2\right], \tag{30}$$

由 Gronwall 引理，可得

$$|\omega|_2^2+\|\omega\|_0^2\le \mathrm{e}^{l(t-\tau)}\left[|\omega_\tau|_2^2+\|\omega_\tau\|_0^2\right], \tag{31}$$

显然，若 $\omega_\tau=u_\tau^1-u_\tau^2=0$，则必有 $\omega=0$，即 $\omega=u^1(x,t)-u^2(x,t)=0$。

于是我们得到解的唯一性。

用 $-\Delta\omega$ 乘(26)式，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|\omega\|_0^2+|\Delta\omega|_2^2\right]+|\Delta\omega|_2^2=\left(f\left(u^1\right)-f\left(u^2\right),\Delta\omega\right), \tag{32}$$

又由假设条件(II)有：

$$\left(f\left(u^1\right)-f\left(u^2\right),\Delta\omega\right)=-\int_\Omega f'\left(u^1\right)|\nabla\omega|^2-\int_\Omega\left(f'\left(u^1\right)-f'\left(u^2\right)\right)\nabla u^2\nabla\omega \tag{33}$$

而

$$-\int_\Omega f'\left(u^1\right)|\nabla\omega|^2\le l\|\omega\|_0^2, \tag{34}$$

则对系统(1)~(3)的任意解 $u=u(x,t)$ 满足：存在与时间 t 无关的常数 $R=R\left(\|u_\tau\|_{H^2},\|g\|_{L_b^2}\right)$，使得对一切的 $t\ge\tau$，有：$|\Delta u|_2^2\le R$。

由嵌入定理，存在正常数 $\alpha=\alpha(R)$，使得

$$-\int_\Omega\left(f'\left(u^1\right)-f'\left(u^2\right)\right)\nabla u^2\nabla\omega\le\alpha|\Delta\omega|_2^2, \tag{35}$$

将(34)、(35)代入(33)，并取 $\beta=\min(\alpha,l)$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|\omega\|_0^2+|\Delta\omega|_2^2\right]\le 2\beta\left[\|\omega\|_0^2+|\Delta\omega|_2^2\right]$$

故对一切的 $t\ge\tau$，有

$$\|\omega\|_0^2+|\Delta\omega|_2^2\le \mathrm{e}^{2\beta(t-\tau)}\left[\|\omega_\tau\|_0^2+|\Delta\omega_\tau|_2^2\right]$$

故方程(1)的解连续依赖于初值，证毕。

4. 致谢

作者衷心感谢导师谢永钦教授的悉心指导和热心鼓励，感谢湖南省研究生科研创新项目(项目编号：CX2012B369)和长沙理工大学研究生科研创新项目的资助，感谢审稿人的审稿意见。

参考文献 (References)

[1] Aifantis, E.C. (1980) On the problem of diffusion in solids. *Acta Mechanica*, **37**, 265-296.

[2] Xiao, Y.L. (2002) Attractors for a nonclassical diffusion equation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* (*English Series*), **18**, 273-276.

[3] Sun, C.Y., Wang, S.Y. and Zhong, C.K. (2007) Global attractors for a nonclassical diffusion equation. *Acta Mathematica Sinica* (*English Series*), **23**, 1271-1280.

[4] Robinson, J.C. (2001) Infinite-dynamical systems. Cambridge University Press, Cambridge, 285-303.

[5] Wang, S.Y., Li, D.S. and Zhong, C.K. (2006) On the dynamics of a class of nonclassical parabolic equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **317**, 565-582.

[6] Jiang, Y. and Xie, Y.Q. (2010) Global attractors for a class nonlinear evolution equation. *Mathematical Theory and Applications*, **30**, 24-28.

[7] Xie, Y.Q. and Deng, J.B. (2010) Global attractors for a class of nonlinear evolution equations. *Mathematical Theory and Applications*, **30**, 13-19.