*Advances in Applied Mathematics* 应用数学进展, 2014, 3, 17-21
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2014.31003 Published Online February 2014 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

# An Entanglement Criterion for States in $N\otimes+\infty$ System

**Yinzhu Wang**[1,2]

[1]The School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan
[2]Department of Mathematics, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan
Email: 2006wang.yinzhu@163.com

Received: Dec. 1st, 2013; revised: Dec. 28th, 2013; accepted: Jan. 10th, 2014



**Abstract:** In this paper, according to the generators of special unitary group $SU(N)$, the separability of quantum states in infinite dimensional bipartite quantum systems is studied, and we obtain some necessary entanglement criteria for states in the cases of $N\otimes+\infty$ $(2\le N<+\infty)$.

**Keywords:** Infinite Dimensional Quantum Systems; The Generators of $SU(N)$; Entanglement Criterion

# 一个 $N\otimes+\infty$ 系统量子态的纠缠判据

**王银珠** [1,2]

[1] 太原理工大学数学学院，太原
[2] 太原科技大学数学系，太原
Email: 2006wang.yinzhu@163.com

收稿日期：2013 年 12 月 1 日；修回日期：2013 年 12 月 28 日；录用日期：2014 年 1 月 10 日

**摘　要：**本文借助特殊酉群 $SU(N)$ 的生成元，研究了无限维两体量子态的可分性问题，得到了一些 $N\otimes+\infty$ 情形量子态可分的必要性判据(其中 $2\le N<+\infty$)。

**关键词：**无限维量子系统；$SU(N)$ 生成元；纠缠判据

## 1. 引言

在迅猛发展的量子信息与量子计算理论中，量子纠缠态扮演着重要而奇特的角色[1]。量子纠缠态已经作为一种必要的资源应用于量子计算的各个方面，例如量子通信、量子密钥分配、量子并行计算、量子隐形传态[1]等。在 20 世纪 80 年代以来，人们提出了量子计算机的理论模型。这以后，有关量子计算与量子通讯的理论和实验迅速发展起来，而纠缠态在其中起着不可缺少的重要作用。如何探测和度量复合系统中量子态的纠缠性是一个重要而极富挑战性的问题，也是许多物理学家、数学家等研究者高度关注的问题。目前对于有限维两体量子态的纠缠识别已有很多判据，比如 PPT 判据、重排判据、约化判据和控制判据等[2-5]。然而无限维量子系统在量子世界中也是非常重要的，但是对于无限维量子系统量子态的纠缠性研究已有结果甚少。最近，基于特殊酉

群 $SU(N)$ 的生成元所表示的量子态，Zhao Hui[6]和 Li Ming[7]等作者分别提出了一个两体或三体量子态可分的必要性判据。本文我们考虑两体量子系统，其中子系统有且只有一个是无限维的情况。我们得到了一个 $N\otimes+\infty$ 情形量子态可分的必要性判据(其中 $2\le N<+\infty$)。

首先，我们固定一些常用的记号。令 $H_A,H_B$ 是可分复 Hilbert 空间，在 $H_A\otimes H_B$ 中的全体量子态集合标记为 $S(H_A\otimes H_B)$。在 $H_A\otimes H_B$ 中的全体迹类算子所组成的集合标记为 $\Gamma(H_A\otimes H_B)$。在 $H_A\otimes H_B$ 中的全体有界算子所组成的集合标记为 $B(H_A\otimes H_B)$。设 $\rho\in S(H_A\otimes H_B)$，如果 $\rho^2=\rho$，则称 $\rho$ 为纯态，否则称 $\rho$ 为混合态。全文使用 Dirac 记号，用符号 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 表示给定 Hilbert 空间的两元素的内积。设 $H=H_A\otimes H_B$，记 $S_{S-P}(H)$ 表示 $H$ 上的可分纯态组成的集合，对于无限维复合两体系统的可分量子态 $\rho$ 来说，文献[8]指出可分态 $\rho$ 蕴含一种 Bochner 积分形式：

$$\rho=\int_{S_{S-P}}\varphi(\rho^A\otimes\rho^B)\mathrm{d}\mu(\rho^A\otimes\rho^B), \tag{1}$$

其中 $\mu$ 是 $S_{S-P}(H)$ 上的 Borel 概率测度，$\rho_A\otimes\rho_B\in S(H_A\otimes H_B)$，$\varphi:S_{S-P}(H)\to S_{S-P}(H)$ 是一个可测函数。进一步存在阶梯函数序列 $\varphi_n$ 使得：

$$\varphi(\rho^A\otimes\rho^B)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\rho^A\otimes\rho^B), \tag{2}$$

这里的极限按迹范数拓扑收敛，其中：

$$\varphi_n(\rho^A\otimes\rho^B)=\sum_{i=1}^{k_n}\chi_{E_i}(\rho^A\otimes\rho^B)\rho_i^A\otimes\rho_i^B, \tag{3}$$

这里 $\chi_{E_i}(\cdot)$ 是 $E_i$ 上的特征函数，$\{E_i\}_{i=1}^{k_n}$ 是可分纯态 $S_{S-P}(H)$ 上的一个分划，记 $E$ 表示所有的分划，我们有：

$$\rho=\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu(E_i)\rho_i^A\otimes\rho_i^B, \tag{4}$$

相对于迹范数拓扑，也相对于 Hilbert Schmidt 范数，$\rho_i^A=|\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A|,\rho_i^B=|\phi_i^B\rangle\langle\phi_i^B|$ 分别是 $H_A,H_B$ 上的纯态。

进一步，由文[9]可知，$N$ 维 Hilbert 空间上的任意自伴算子都能被特殊的酉群 $SU(N)$ 的生成元所表示。$SU(N)$ 的生成元可如下给出：设 $\{|i\rangle\}_{i=1}^N$ 是 $N$ 维 Hilbert 空间 $H$ 的标准正交基，定义转移投影算子 $P_{jk}=|j\rangle\langle k|$，设

$$\chi_l=-\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}}\left(P_{11}+P_{22}+\cdots+P_{ll}-lP_{l+1,l+1}\right),\quad u_{jk}=P_{jk}+P_{kj},\quad v_{jk}=i\left(P_{jk}-P_{kj}\right) \tag{5}$$

其中 $1\le l\le N-1$，$1\le j<k\le N$。设

$$\Delta=\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_{N-1},u_{12},u_{13},\cdots,u_{N-1,N},v_{12},v_{13},\cdots,v_{N-1,N}\} \tag{6}$$

易见 $\forall\alpha_i\in\Delta$，我们有 $Tr(\alpha_i)=0,\ Tr(\alpha_i\alpha_j)=2\delta_{ij}$。$\Delta$ 集合中的 $N^2-1$ 个自伴算子即为 $SU(N)$ 的生成元。为了给出本文的主要结果，我们首先给出如下引理。

引理 1[6] 令 $H$ 是可分复 Hilbert 空间且 $\dim H=N\ (2\le N<+\infty)$，$\rho\in S(H)$。如果 $\rho$ 是纯态，则 $\rho$ 可表示为：

$$\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{N}I_N+\sum_{j=1}^{N^2-1}a_j\lambda_j\right) \tag{7}$$

其中 $\lambda_j\ (j=1,2,\cdots,N^2-1)$ 是群 $SU(N)$ 的生成元，$a_j=Tr(\rho\lambda_j)$ 且 $\sum_{j=1}^{N^2-1}a_j^2=2\left(1-\frac{1}{N}\right)$，$I_N$ 是 $N\times N$ 单位矩阵。引理 1 的证明可参见文[6]，此处我们略去了证明。

## 2. 主要结果

下面我们给出本文的主要结果。

引理 2 设 $\rho\in S\left(H_A\otimes H_B\right)$，$\dim H_A=N\quad\left(2\le N<+\infty\right)$，$\dim H_B=+\infty$。如果 $\rho$ 是一个可分态，则存在 $H_B$ 中的纯态 $\rho_i^B=\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|$，使得 $\rho$ 能被表示为以下形式：

$$\rho=\frac{1}{2}\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu\left(E_i\right)\left(\frac{2}{N}I_N+\sum_{j=1}^{N^2-1}a_{ij}^A\lambda_{ij}^A\right)\otimes\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right| \tag{8}$$

这里极限按迹范数拓扑收敛。$\mu$ 是 $S_{S-P}\left(H\right)$ 上的 Borel 概率测度，$\left\{E_i\right\}_{i=1}^{k_n}$ 是可分纯态 $S_{S-P}\left(H\right)$ 上的一个分划，$E$ 表示所有的分划，$a_{ij}^A=Tr\left(\rho_i^A\lambda_{ij}^A\right)$，这里 $\rho_i^A=\left|\psi_i^A\right\rangle\left\langle\psi_i^A\right|$ 是 $H_A$ 上的纯态，且 $\sum_{j=1}^{N^2-1}\left(a_{ij}^A\right)^2=2\left(1-\frac{1}{N}\right)$，$\lambda_{ij}^A\left(j=1,2,\cdots,N^2-1\right)$ 是群 $SU\left(N\right)$ 的生成元。进一步 $\rho$ 可被表示为：

$$\rho=I_N\otimes M_0+\sum_{j=1}^{N^2-1}\lambda_{ij}^A\otimes M_j. \tag{9}$$

其中

$$M_0=\frac{1}{N}\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu\left(E_i\right)\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|, \tag{10}$$

$$M_j=\frac{1}{2}\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu\left(E_i\right)a_{ij}^A\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|. \tag{11}$$

证明：这可由(4)(7)式直接推得。

引理 3 设 $\Gamma\left(H\right)$ 是 Hilbert 空间 $H$ 上的迹类算子所组成的集合。$T_n,T\in\Gamma\left(H\right)$。如果 $\lim_{n\to+\infty}T_n=T$ 按迹范数收敛，则 $\lim_{n\to+\infty}T_n^2=T^2$ 按迹范数收敛。

证明：注意到，对 $T\in\Gamma\left(H\right)$，我们有 $\|T\|\le\|T\|_{Tr}<\infty$。由于 $T_n,T\in\Gamma\left(H\right)\subseteq B\left(H\right)$ 且 $\left\|T_n-T\right\|_{Tr}\to0$，故存在正数 $M$，使得 $\sup\left\{\left\|T_n\right\|_{Tr}\right\}=M<+\infty$。进而

$$\left\|T_n^2-T^2\right\|_{Tr}=\left\|T_n^2-T_nT+T_nT-T^2\right\|_{Tr}\le M\left\|T_n-T\right\|_{Tr}+\|T\|\cdot\left\|T_n-T\right\|_{Tr}$$

所以 $\left\|T_n^2-T^2\right\|_{Tr}\to0\left(n\to+\infty\right)$。

定理 4：设 $\rho\in S\left(H_A\otimes H_B\right)$，$\dim H_A=N\quad\left(2\le N<+\infty\right)$，$\dim H_B=+\infty$。如果 $\rho$ 是一个可分态，则以下两式成立：

① $\frac{3N-2}{4}M_0-\sum_{j=1}^{N^2-1}l_jM_j\ge0$，其中 $\boldsymbol{l}=\left(l_1,l_2,\cdots,l_{N^2-1}\right)$ 满足 $|\boldsymbol{l}|\le1$；

② $Tr\left[\frac{N\left(N-1\right)}{2}M_o^2-\sum_{j=1}^{N^2-1}M_j^2\right]\ge0$，其中 $M_0,M_j$ 定义如上。

证明：由于 $\rho$ 是一个可分态，根据引理 1 和引理 2，以及(10)(11)式，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{3N-2}{4}M_0-\sum_{j=1}^{N^2-1}l_jM_j\\
&=\frac{1}{N}\lim_{\{E_i\}\in E}\left[\frac{3N-2}{4}\sum_i\mu\left(E_i\right)\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|\right]-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N^2-1}\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu\left(E_i\right)l_ja_{ij}^A\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|\\
&\ge\frac{1}{2}\left\{\lim_{\{E_i\}\in E}\left[\frac{2}{N}\frac{3N-2}{4}\sum_i\mu\left(E_i\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N^2-1}\sum_i\mu\left(E_i\right)\left(\left(a_{ij}^A\right)^2+l_j^2\right)\right]\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|\right\}\\
&\ge\frac{1}{2}\left\{\lim_{\{E_i\}\in E}\left[\frac{2}{N}\frac{3N-2}{4}-\sum_i\mu\left(E_i\right)\frac{3N-2}{2N}\right]\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|\right\}\\
&=0.
\end{aligned}$$

另一方面，根据引理 1~3，以及(10)(11)式，有

$$
\begin{aligned}
&Tr\left[\frac{N(N-1)}{2}M_o^2-\sum_{j=1}^{N^2-1}M_j^2\right]\\
&=Tr\left\{\frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{1}{N}\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu(E_i)\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|\right)^2-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N^2-1}\left(\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu(E_i)a_{ij}^A\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|\right)^2\right\}\\
&=\frac{1}{4}\lim_{\{E_i\}\in E}\lim_{\{E_k\}\in E}\sum_i\sum_k\mu(E_i)\mu(E_k)\left[\frac{2(N-1)}{N}-\sum_{j=1}^{N^2-1}a_{ij}^Aa_{kj}^A\right]\left|\left\langle\phi_i^B\middle|\varphi_i^B\right\rangle\right|^2\\
&\ge\frac{1}{4}\lim_{\{E_i\}\in E}\lim_{\{E_k\}\in E}\sum_i\sum_k\mu(E_i)\mu(E_k)\left[\frac{2(N-1)}{N}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N^2-1}\left(\left(a_{ij}^A\right)^2+\left(a_{kj}^A\right)^2\right)\right]\left|\left\langle\phi_i^B\middle|\varphi_i^B\right\rangle\right|\\
&=0.
\end{aligned}
$$

证毕。

进一步，设 $\rho\in S(H_A\otimes H_B)$， $\dim H_A=N\quad(2\le N<+\infty)$， $\dim H_B=+\infty$ 。如果 $\rho$ 可分，则 $\rho$ 可表示为 $\rho=I_N\otimes M_0+\sum_{j=1}^{N^2-1}\lambda_{ij}^A\otimes M_j$ ，其中 $M_0=\frac{1}{N}\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu(E_i)\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|$， $M_j=M_j=\frac{1}{2}\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu(E_i)a_{ij}^A\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|$，对任意的 $(N^2-1)\times(N^2-1)$ 实矩阵 $R$ ，满足 $\frac{1}{(N-1)^2}I-R^{\mathrm{T}}R\ge0$ ，定义

$$
\gamma_R(\rho)=I_N\otimes M_0+\sum_{j=1}^{N^2-1}\lambda_{ij}^A\otimes M_j',\ M_j'=\sum_{k=1}^{N^2-1}R_{jk}M_k, \tag{12}
$$

$\lambda_{ij}^A\ (j=1,2,\cdots,N^2-1)$ 是群 $SU(N)$ 的生成元。我们有

定理 5 设 $\rho\in S(H_A\otimes H_B)$， $\dim H_A=N\quad(2\le N<+\infty)$， $\dim H_B=+\infty$ 。如果 $\rho$ 可分，则 $\gamma_R(\rho)\ge0$ 。

证明：如果 $\rho$ 可分，则 $\rho$ 可表示为 $\rho=I_N\otimes M_0+\sum_{j=1}^{N^2-1}\lambda_{ij}^A\otimes M_j$ ，这里 $M_0,M_j$ 如(10)(11)定义。注意到

$$
M_j'=\frac{1}{2}\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu(E_i)\left(a_{ij}^A\right)'\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|. \tag{13}
$$

注意到 $\gamma_R(\rho)$ 也可表示为 $\gamma_R(\rho)=\lim_{\{E_i\}\in E}\sum_i\mu(E_i)\left[A\otimes\left|\phi_i^B\right\rangle\left\langle\phi_i^B\right|\right]$，这里

$$
A=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{N}I_N+\sum_{j=1}^{N^2-1}\lambda_{ij}^A\left(a_{ij}^A\right)'\right], \tag{14}
$$

记 $\left(\boldsymbol{a}_i^A\right)'=\left(\left(a_{i1}^A\right)',\left(a_{i2}^A\right)',\cdots,\left(a_{i(N^2-1)}^A\right)'\right)\in\Re^{N^2-1}$ 为Block 向量,记 $B\left(\Re^{N^2-1}\right)$ 表示由组成密度矩阵的所有的Block 向量组成的集合，也称 Block 球或 Block 向量空间。由文献[10]， $\mathrm{D}_l\left(\Re^{N^2-1}\right)\subseteq B\left(\Re^{N^2-1}\right)\subseteq\mathrm{D}_L\left(\Re^{N^2-1}\right)$ ，其中 $\mathrm{D}_l\left(\Re^{N^2-1}\right),\mathrm{D}_L\left(\Re^{N^2-1}\right)$ 分别是 $\Re^{N^2-1}$ 空间中的半径为 $l=\sqrt{\frac{2}{N(N-1)}}$ 以及 $L=\sqrt{2\left(1-\frac{1}{N}\right)}$ 的球，注意到矩阵 $A$ 是自伴的且迹为 1 的，但是不一定是正的，为了保证正性，根据文献[7,10]，需要满足

$$
\left(\left(a_{i1}^A\right)'\right)^2+\left(\left(a_{i2}^A\right)'\right)^2+\cdots+\left(\left(a_{i(N^2-1)}^A\right)'\right)^2\le\frac{2}{N(N-1)}. \tag{15}
$$

事实上，由于 $\left(\left(a_{i1}^A\right)',\left(a_{i2}^A\right)',\cdots,\left(a_{i(N^2-1)}^A\right)'\right)^{\mathrm{T}}=R\left(a_{i1}^A,a_{i2}^A,\cdots,a_{i(N^2-1)}^A\right)^{\mathrm{T}}$，注意到

$$\left(\left(a_{i1}^A\right)'\right)^2+\left(\left(a_{i2}^A\right)'\right)^2+\cdots+\left(\left(a_{i(N^2-1)}^A\right)'\right)^2=\left(a_{i1}^A,a_{i2}^A,\cdots,a_{i(N^2-1)}^A\right)R^{\mathrm{T}}R\left(a_{i1}^A,a_{i2}^A,\cdots,a_{i(N^2-1)}^A\right)^{\mathrm{T}}.$$

从而根据 $\frac{1}{(N-1)^2}I-R^{\mathrm{T}}R\geq 0$，由引理 1，我们有 $\sum_{j=1}^{N^2-1}\left(a_{ij}^A\right)^2=2\left(1-\frac{1}{N}\right)$，故

$$\left(\left(a_{i1}^A\right)'\right)^2+\left(\left(a_{i2}^A\right)'\right)^2+\cdots+\left(\left(a_{i(N^2-1)}^A\right)'\right)^2\leq\frac{1}{(N-1)^2}\left[\left(a_{i1}^A\right)^2+\left(a_{i2}^A\right)^2+\cdots+\left(a_{i(N^2-1)}^A\right)^2\right]=\frac{2}{N(N-1)}. \tag{16}$$

所以 $\gamma_R(\rho)$ 仍然是一个密度算子，即 $\gamma_R(\rho)\geq 0$。证明完成。

## 项目基金

国家自然科学基金资助(11172194)，山西省青年科学基金资助(2011021002-2)和(2010011008)。

## 参考文献 (References)


[1] Nielsen, M.A. and Chang, I.L. (2000) Quantum computation and quantum information. Cambridge University press, Cambridge.

[2] Horodecki, M., Horodecki, P. and Horodecki, R. (1996) Separablility of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, **223**, 1-14.

[3] Chen, K. and Wu, L.-A. (2003) A matrix realignment method for recognizing entanglement. *Quantum Information & Computation*, **3**, 193-202.

[4] Rudolph, O. (2005) Further results on the cross norm criterion for separability. *Quantum Information Processing*, **4**, 219-239.

[5] Nielsen, M.A. and Kempe, J. (2001) Separable states are more discorded globally than locally. *Physical Review Letters*, **86**, 5184-5187.

[6] Zhao, H. and Wang, Z.X. (2004) Separable criterion for quantum mixed states. *Theoretical Physics*, **42**, 529-534.

[7] Li, M., Fei, S.M. and Wang, Z.X. (2008) Separability of tripartite quantum systems. *International Journal of Quantum Information*, **6**, 859-866.

[8] Holevo, A.S., Shirokov, M.E. and Werner, R.F. (2005) Separability and entanglement breaking in infinite dimensions. *Russian Math Surveys*, **60**, 359-360.

[9] Hioe, F.T. and Eberly, J.H. (1981) N-level coherence vector and higher conservation laws in quantum optics and quantum mechanics. *Physical Review Letters*, **47**, 838-841.

[10] Harrimann, J.E. (1978) Geometry of density matrices. I. Definitions, N matrices and 1 matrices. *Physical Review A*, **17**, 1249-1256.