Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2015, 4, 105-111
Published Online May 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.42014

Hans汉斯

Supercloseness Analysis of an H¹-Galerkin Nonconforming Mixed Finite Element Method for Sine-Gordon Equations

Yanhua Shi*, Fenling Wang

School of Mathematics and Statistics, Xuchang University, Xuchang Henan
Email: syhsdq@163.com, mathwfl@163.com

Received: Apr. 14th, 2015; accepted: Apr. 30th, 2015; published: May 7th, 2015

Abstract

In this paper, an H¹-Galerkin nonconforming mixed finite element method is mainly proposed for Sine-Gordon equations under fully-discrete scheme. By use of the properties of bilinear element and a nonconforming element and interpolation theory, the supercloseness properties are derived for the original variable in H^1 norm and the flux variable in $H(div,\Omega)$ norm with order $O(h^2+\tau^2)$, respectively.

Keywords

Sine-Gordon Equations, H¹-Galerkin Mixed Finite Element, Fully-Discrete, Supercloseness

Sine-Gordon方程H¹-Galerkin非协调混合元法的超逼近分析

史艳华*，王芬玲

许昌学院数学与统计学院，河南 许昌
Email: syhsdq@163.com, mathwfl@163.com

*武汉大学访问学者。

收稿日期：2015年4月14日；录用日期：2015年4月30日；发布日期：2015年5月7日

摘　要

本文主要提出了非线性Sine-Gordon方程的H¹-Galerkin非协调混合元方法的全离散逼近格式。利用双线性元和一个非协调元的性质及插值理论，分别得到了原始变量和流量在 H^1 模和 $H(div,\Omega)$ 模下具有 $O(h^2+\tau^2)$ 阶的超逼近性质。

关键词

Sine-Gordan方程，H¹-Galerkin混合元方法，全离散，超逼近

1. 引言

本文考虑下面 Sine-Gordon (SG)方程

$$\begin{cases} u_{tt}+\alpha u_t-\gamma\Delta u+\beta\sin u=f, & (X,t)\in\Omega\times(0,T], \\ u=0, & (X,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \\ u(X,0)=u_0(X), \qquad u_t(X,0)=u_1(X), & X\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathrm{R}^2$ 为有界矩形区域，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界，$X=(x,y)$，$f=f(X,t)$，α,β,γ 是正常数，$u_0(X),u_1(X)$ 是已知充分光滑的函数。

SG 方程常用于描绘磁性晶体的 Bloch 壁运动，沿类脂膜的扩张波的传播等。已有很多关于其数值解的研究，[1] [2]分别研究了半离散格式下的一类非协调元和协调元方法。[3]借助插值与投影之间的关系给出了线性三角形元半离散和全离散格式下新的高精度分析。[4]提出了 H^1-Galerkin 混合元方法，它不要求具备传统混合元方法所要求满足的 B-B 条件，已被广泛应用于伪双曲线方程[5]和双曲线积分微分方程[6]等。[7]借助投影讨论了(1)中 $f(X,t)=0$ 时的 H^1-Galerkin 混合元方法，给出了最优误差估计式。

本文主要建立方程(1)的 H^1-Galerkin 非协调混合元方法的全离散逼近格式。首先通过引入流量 $\vec{p}$ 对原始问题进行等价变形，然后分别用双线性元和交叉单元对原始变量和流量进行逼近建立其全离散格式。最后借助这两个单元的性质得到了这两个变量分别在 H^1 模和 $H(div,\Omega)$ 模下的超逼近性质。

2. 混合元格式的单元构造及性质

为方便起见，设 Γ_h 是对 Ω 的一族矩形剖分。给定 $K\in\Gamma_h$，边长分别为 $2h_x,2h_y$，与 x 轴和 y 轴平行的边分别为 l_1,l_3 和 l_2,l_4，四顶点依次记作 $a_i,i=1,2,3,4$。记 $h_K=\max\{h_x,h_y\},h=\max\limits_{K\in\Gamma_h}h_K$。

定义混合元有限元 $(K,P^i,\Sigma^i)(i=1,2,3)$：

$$\Sigma^1=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},P^1=span\{1,x,y,xy\},$$

$$\Sigma^2=\{p_1,p_2,p_3,p_4\},P^2=span\{1,x,y,y^2\},$$

$$\Sigma^3=\{q_1,q_2,q_3,q_4\},P^3=span\{1,x,y,x^2\},$$

其中 $v_i=v(a_i),\ \varphi_i=\frac{1}{|l_i|}\int_{l_i}\varphi\mathrm{ds},\ i=1,2,3,4$，$\varphi=p$ 或 q。

相关的有限元空间 V_h 和 $\vec{W}_h$ 分别定义为

$$V_h=\left\{v_h;v_h\big|_K\in P^1\right\},\ V_0^h=\left\{v_h;v_h\in V_h,v_h\big|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

$$\vec{W}_h=\left\{\vec{w}_h=\left(w_{1h},w_{2h}\right)\in H\left(div,\Omega\right);\vec{w}_h\big|_K\in P^2\times P^3,\int_F[\vec{w}_h]\mathrm{d}s=0,F\subset\partial K\right\},$$

这里 $[\varphi]$ 为 φ 穿过边界 F 的跳跃值，且当 $F\subset\partial\Omega$ 时，$[\varphi]=\varphi$。记 I_h 和 Π_h 分别为 $H^2(\Omega)\to V_h$ 和 $\left(H^2(\Omega)\right)^2\to\vec{W}_h$ 的插值算子。

[8]和[5]中已分别证明如下性质。

引理 1 设 $u\in H^3(\Omega)$，则

$$\left(\nabla\left(u-I_hu\right),\nabla v_h\right)\le Ch^2\|u\|_3\|v_h\|_1,\ \forall v_h\in V_h.$$

引理 2 假定 $\vec{p}\in H\left(div,\Omega\right)$，$\varphi\in H^3(\Omega)$，对 $\forall\vec{w}_h\in\vec{W}_h$，成立

$$\left(\nabla\cdot\left(\vec{p}-\Pi_h\vec{p}\right),\nabla\cdot\vec{w}_h\right)=0,\quad\left|\sum_K\int_{\partial K}\varphi\left(\vec{w}_h\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}s\right|\le Ch^2\|\varphi\|_3\|\vec{w}_h\|_0.$$

令 $\vec{p}=\nabla u$，则方程(1)可变形为

$$\begin{cases}\nabla u=\vec{p}, & (X,t)\in\Omega\times(0,T],\\ u_{tt}+\alpha u_t-\gamma\nabla\cdot\vec{p}+\beta\sin u=f, & (X,t)\in\Omega\times(0,T],\\ u=0, & (X,t)\in\partial\Omega\times(0,T],\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X). & X\in\Omega.\end{cases}\tag{2}$$

(2)的变分形式为：求 $\{u,\vec{p}\}:(0,T]\to H_0^1(\Omega)\times H\left(div,\Omega\right)$ 使得

$$\begin{cases}\left(\nabla u,\nabla v\right)=\left(\vec{p},\nabla v\right), & \forall v\in H_0^1(\Omega),\\ \left(\vec{p}_{tt},\vec{w}\right)+\alpha\left(\vec{p}_t,\vec{w}\right)+\gamma\left(\nabla\cdot\vec{p},\nabla\cdot\vec{w}\right)+\beta\left(\vec{p}\cos u,\vec{w}\right)=-\left(f,\nabla\cdot\vec{w}\right), & \forall\vec{w}\in H\left(div,\Omega\right),\\ u(X,0)=u_0(X),u_t(X,0)=u_1(X), & X\in\Omega.\end{cases}\tag{3}$$

3. 全离散格式的超逼近分析

把时间区间 $[0,T]$ 进行 N 等分，则时间步长 $\tau=T/N$，时间节点 $t_n=n\tau,n=0,1,\cdots,N$。对于任意光滑函数 $\varphi\in[0,T]$，定义

$$\varphi^n=\varphi(t_n),\ \varphi^{n+\frac12}=\frac{\varphi^{n+1}+\varphi^n}{2},\ \partial_t\varphi^{n+\frac12}=\frac{\varphi^{n+1}-\varphi^n}{\tau},\ \varphi^{n,\frac14}=\frac{\varphi^{n+1}+2\varphi^n+\varphi^{n-1}}{4}=\frac{\varphi^{n+\frac12}+\varphi^{n-\frac12}}{2},$$

$$\partial_t\varphi^n=\frac{1}{2\tau}\left(\varphi^{n+1}-\varphi^{n-1}\right)=\frac1\tau\left(\varphi^{n+\frac12}-\varphi^{n-\frac12}\right)=\frac12\left(\partial_t\varphi^{n+\frac12}-\partial_t\varphi^{n-\frac12}\right).$$

全离散逼近格式：求 $\left(U^n,\vec{P}^n\right)\to V_0^h\times\vec{W}_h$，使得

$$\begin{cases}\left(\nabla U^{n+\frac12},\nabla v_h\right)=\left(\vec{P}^{n+\frac12},\nabla v_h\right),\quad\forall v_h\in V_0^h,\\ \left(\partial_{tt}\vec{P}^n,\vec{w}_h\right)+\alpha\left(\partial_t\vec{P}^n,\vec{w}_h\right)+\gamma\left(\nabla\cdot\vec{P}^{n,\frac14},\nabla\cdot\vec{w}_h\right)+\beta\left(\left(\vec{P}\cos U\right)^{n,\frac14},\vec{w}_h\right)=-\left(f^{n,\frac14},\vec{w}_h\right),\forall\vec{w}_h\in\vec{W}_h,\\ U^0=I_hu_0(X),U^1=I_h\left(u_0(X)+\tau u_1(X)+2^{-1}\tau^2u_{tt}(X,0)\right).\end{cases}\tag{4}$$

其中 $u_{tt}(X,0)=-\alpha u_1(X)+\gamma\Delta u_0(X)-\beta\sin u_0(X)+f(X,0)$。

令 $u^n-U^n=(u^n-I_hu^n)+(I_hu^n-U^n)=\eta_h^n+\xi_h^n$，

$$\vec{p}^n-\vec{P}^n=(\vec{p}^n-\Pi_h\vec{p}^n)+(\Pi_h\vec{p}^n-\vec{P}^n)=\vec{\rho}_h^n+\vec{\theta}_h^n.$$

下面我们给出本文的超逼近结果。

定理 1 设 $(u^n,\vec{p}^n),(U^n,\vec{P}^n)$ 分别是(2)和(4)的解。假定 $\vec{\theta}_h^0(0)=0$，$u,u_t,u_{tt}\in L^\infty(H^3(\Omega))$，$\vec{p}\in L^\infty((H^2(\Omega))^2)$，$\vec{p}_t,\vec{p}_{tt}\in(H^2(\Omega))^2$，$\vec{p}_{ttt},\vec{p}_{tttt}\in(L^2(\Omega))^2$，则对任意正整数$1\le n\le N$，有

$$\left\|U^{n-\frac12}-I_hu^{n-\frac12}\right\|_1=O(h^2+\tau^2),\quad \left\|\vec{P}^n-\Pi_h\vec{p}^n\right\|_{H(div,\Omega)}=O(h^2+\tau^2),$$

这里$\|\varphi\|_{L^\infty(H^k(\Omega))}=\sup\limits_{0\le t\le T}\|\varphi\|_{H^k(\Omega)}$。

证明 对于任意$v_h\in V_0^h,\vec{w}_h\in\vec{W}_h$，由(2)得

$$\begin{cases}\left(\nabla u^{n+\frac12},\nabla v_h\right)=\left(\vec{p}^{n+\frac12},\nabla v_h\right),\\ \left(\partial_{tt}\vec{p}^n,\vec{w}_h\right)+\alpha\left(\partial_t\vec{p}^n,\vec{w}_h\right)+\gamma\left(\nabla\cdot\vec{p}^{n,\frac14},\nabla\cdot\vec{w}_h\right)+\beta\left((\vec{p}\cos u)^{n,\frac14},\vec{w}_h\right)\\ \quad=-\left(f^{n,\frac14},\vec{w}_h\right)+\sum\limits_{K\in\Gamma_h}\int_{\partial K}\left(u_{tt}^{n,\frac14}+\alpha u_t^{n,\frac14}+\beta(\sin u)^{n,\frac14}\right)\vec{w}_h\cdot\vec{n}\mathrm{d}s+\left(R_1^n+\alpha R_2^n,\vec{w}_h\right),\end{cases}\tag{5}$$

其中 $R_1^n=\partial_{tt}\vec{p}^n-\vec{p}_{tt}^{n,\frac14}=O(\tau^2\vec{p}_{tttt}),R_2^n=\partial_t\vec{p}^n-\vec{p}_t^{n,\frac14}=O(\tau^2\vec{p}_{ttt})$。

结合(4)和(5)得如下误差方程

$$\begin{cases}\left(\nabla\xi_h^{n+\frac12},\nabla v_h\right)-\left(\vec{\theta}_h^{n+\frac12},\nabla v_h\right)=-\left(\nabla\eta_h^{n+\frac12},\nabla v_h\right)+\left(\vec{\rho}_h^{n+\frac12},\nabla v_h\right),\\ \left(\partial_{tt}\vec{\theta}_h^n,\vec{w}_h\right)+\alpha\left(\partial_t\vec{\theta}_h^n,\vec{w}_h\right)+\gamma\left(\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n,\frac14},\nabla\cdot\vec{w}_h\right)+\beta\left((\vec{p}\cos u)^{n,\frac14}-(\vec{P}\cos U)^{n,\frac14},\vec{w}_h\right)\\ \quad=-\left(\partial_{tt}\vec{\rho}_h^n,\vec{w}_h\right)-\alpha\left(\partial_t\vec{\rho}_h^n,\vec{w}_h\right)+\sum\limits_{K\in\Gamma_h}\int_{\partial K}\left(u_{tt}^{n,\frac14}+\alpha u_t^{n,\frac14}+\beta(\sin u)^{n,\frac14}\right)\vec{w}_h\cdot\vec{n}\mathrm{d}s+\left(R_1^n+\alpha R_2^n,\vec{w}_h\right).\end{cases}\tag{6}$$

在(6)中取 $v_h=\xi_h^{n+\frac12}$，则

$$\left\|\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right\|_0^2=-\left(\nabla\eta_h^{n+\frac12},\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right)+\left(\vec{\rho}_h^{n+\frac12},\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right)+\left(\vec{\theta}_h^{n+\frac12},\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right).$$

根据引理 1 得

$$\left|\left(\nabla\eta_h^{n+\frac12},\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right)\right|\le Ch^2\left\|u^{n+\frac12}\right\|_3\left\|\xi_h^{n+\frac12}\right\|_1\le Ch^2\left\|u^{n+\frac12}\right\|_3\left\|\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right\|_0.$$

由 Schwartz 引理和插值理论得

$$\left|\left(\vec{\rho}_h^{n+\frac12},\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right)\right|\le\left\|\vec{\rho}_h^{n+\frac12}\right\|_0\left\|\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right\|_0\le Ch^2\|\vec{p}\|_2\left\|\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right\|_0,$$

$$\left|\left(\vec{\theta}_h^{n+\frac12},\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right)\right|\le\left\|\vec{\theta}_h^{n+\frac12}\right\|_0\left\|\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right\|_0.$$

因此

$$\left\|\nabla\xi_h^{n+\frac12}\right\|_0\le Ch^2\left(\left\|u^{n+\frac12}\right\|_3+\left\|\vec{p}^{n+\frac12}\right\|_2\right)+\left\|\vec{\theta}_h^{n+\frac12}\right\|_0.\tag{7}$$

在(6)中取 $\vec{w}_h=\partial_t\vec{\theta}_h^n$。再添加上项 $\gamma\left(\vec{\theta}^{n,\frac14},\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)$，则

$$\begin{aligned}
&\left(\partial_{tt}\vec{\theta}_h^n,\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)+\alpha\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2+\gamma\left(\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n,\frac14},\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)+\gamma\left(\vec{\theta}^{n,\frac14},\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)\\
&=-\left(\partial_{tt}\vec{\rho}_h^n,\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)-\alpha\left(\partial_t\vec{\rho}_h^n,\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)+\sum_{K\in\Gamma_h}\int_{\partial K}\left(u_{tt}^{n,\frac14}+\alpha u_t^{n,\frac14}+\beta\left(\sin u\right)^{n,\frac14}\right)\partial_t\vec{\theta}_h^n\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\\
&\quad-\beta\left(\left(\vec{p}\cos u\right)^{n,\frac14}-\left(\vec{P}\cos U\right)^{n,\frac14},\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)+\left(R_1^n+\alpha R_2^n,\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)+\gamma\left(\vec{\theta}^{n,\frac14},\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)=\sum_{i=1}^{6}A_i.
\end{aligned}$$

注意到等式左端两项可以变形为

$$\left(\partial_{tt}\vec{\theta}_h^n,\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)=(2\tau)^{-1}\left(\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^{n+\frac12}\right\|_0^2-\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^{n-\frac12}\right\|_0^2\right),\ \left(\vec{\theta}^{n,\frac14},\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)=(2\tau)^{-1}\left(\left\|\vec{\theta}_h^{n+\frac12}\right\|_0^2-\left\|\vec{\theta}_h^{n-\frac12}\right\|_0^2\right),$$

$$\left(\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n,\frac14},\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)=(2\tau)^{-1}\left(\left\|\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n+\frac12}\right\|_0^2-\left\|\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n-\frac12}\right\|_0^2\right).$$

下面依次估计 $A_i\ (i=1,\cdots,6)$。借助插值理论和 Young 不等式，我们得

$$\begin{aligned}
\left|A_1+A_2\right|&\le C\left(\left\|\partial_{tt}\vec{\rho}_h^n\right\|_0+\left\|\partial_t\vec{\rho}_h^n\right\|_0\right)\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0\le C\left(\left\|\partial_{tt}\vec{\rho}_h^n\right\|_0^2+\left\|\partial_t\vec{\rho}_h^n\right\|_0^2\right)+\frac{\alpha}{5}\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2\\
&\le Ch^4\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\left(\left\|\vec{p}_{tt}\right\|_2^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_2^2\right)\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{5}\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2,
\end{aligned}\tag{8}$$

$$\left|A_5\right|\le C\left(\left\|R_1^n\right\|_0+\left\|R_2^n\right\|_0\right)\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0\le C\left(\left\|R_1^n\right\|_0^2+\left\|R_2^n\right\|_0^2\right)\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0\le C\tau^4+\frac{\alpha}{5}\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2.\tag{9}$$

利用引理 2，我们有

$$\left|A_3\right|\le Ch^2\left(\left\|u_{tt}^{n,\frac14}\right\|_3+\left\|u_t^{n,\frac14}\right\|_3+\left\|u^{n,\frac14}\right\|_3\right)\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0\le Ch^4\left(\left\|u_{tt}^{n,\frac14}\right\|_3^2+\left\|u_t^{n,\frac14}\right\|_3^2+\left\|u^{n,\frac14}\right\|_3^2\right)+\frac{\alpha}{5}\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2.\tag{10}$$

对于非线性项 A_4，先变形再利用函数 $\cos u$ 的 Lipschtiz 连续性得

$$\begin{aligned}
\left|A_4\right|&=\beta\left|\left(\left(\vec{p}\left(\cos u-\cos U\right)\right)^{n,\frac14},\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)+\left(\left(\cos U\left(\vec{p}-\vec{P}\right)\right)^{n,\frac14},\partial_t\vec{\theta}_h^n\right)\right|\\
&\le C\left(\left\|\vec{p}^{n,\frac14}\right\|_{W^{0,\infty}(\Omega)}\left\|\left(\cos u-\cos U\right)^{n,\frac14}\right\|_0+\left\|\left(\vec{p}-\vec{P}\right)^{n,\frac14}\right\|_0\right)\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0\\
&\le C\left(\left\|\left(u-U\right)^{n,\frac14}\right\|_0+\left\|\left(\vec{p}-\vec{P}\right)^{n,\frac14}\right\|_0\right)\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0\\
&\le C\left(\left\|\eta_h^{n,\frac14}\right\|_0+\left\|\xi_h^{n,\frac14}\right\|_0+\left\|\vec{\rho}_h^{n,\frac14}\right\|_0+\left\|\vec{\theta}_h^{n,\frac14}\right\|_0\right)\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0\\
&\le C\left(\left\|\eta_h^{n,\frac14}\right\|_0^2+\left\|\xi_h^{n,\frac14}\right\|_0^2+\left\|\vec{\rho}_h^{n,\frac14}\right\|_0^2+\left\|\vec{\theta}_h^{n,\frac14}\right\|_0^2\right)+\frac{\alpha}{5}\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2\\
&\le Ch^4\left(\left\|u^{n,\frac14}\right\|_2^2+\left\|\vec{p}^{n,\frac14}\right\|_2^2\right)+C\left(\left\|\vec{\theta}_h^{n+\frac12}\right\|_0^2+\left\|\vec{\theta}_h^{n-\frac12}\right\|_0^2\right)+\frac{\alpha}{5}\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2.
\end{aligned}\tag{11}$$

显然， A_6 可估计为

$$\left|A_6\right|\le\gamma\left\|\vec{\theta}_h^{n,\frac14}\right\|_0\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0\le C\left(\left\|\vec{\theta}_h^{n+\frac12}\right\|_0^2+\left\|\vec{\theta}_h^{n-\frac12}\right\|_0^2\right)+\frac{\alpha}{5}\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2.\tag{12}$$

综合(8)~(12)，再消去 $\alpha\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2$ 得

$$(2\tau)^{-1}\left(\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^{n+\frac{1}{2}}\right\|_0^2-\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_0^2+\gamma\left\|\vec{\theta}_h^{n+\frac{1}{2}}\right\|_{H(div,\Omega)}^2-\gamma\left\|\vec{\theta}_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_{H(div,\Omega)}^2\right)$$
$$\le C\left(\left\|\vec{\theta}_h^{n+\frac{1}{2}}\right\|_0^2+\left\|\vec{\theta}_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_0^2\right)+Ch^2\left\{\left(\left\|u^{n,\frac{1}{4}}\right\|_3^2+\left\|\vec{p}^{n,\frac{1}{4}}\right\|_2^2+\left\|u_{tt}^{n,\frac{1}{4}}\right\|_3^2+\left\|u_t^{n,\frac{1}{4}}\right\|_3^2\right)+\tau^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}}\left(\left\|\vec{p}_{tt}\right\|_2^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_2^2\right)\mathrm{d}s\right\}+C\tau^4.$$

上式两边同乘以 2τ，然后关于 n 从 1 到 $N-1$ 求和，我们得

$$\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^{N-\frac{1}{2}}\right\|_0^2+\gamma\left\|\vec{\theta}_h^{N-\frac{1}{2}}\right\|_{H(div,\Omega)}^2$$
$$\le Ch^4\left\{\tau\sum_{n=1}^{N-1}\left(\left\|u^{n,\frac{1}{4}}\right\|_3^2+\left\|\vec{p}^{n,\frac{1}{4}}\right\|_2^2+\left\|u_{tt}^{n,\frac{1}{4}}\right\|_3^2+\left\|u_t^{n,\frac{1}{4}}\right\|_3^2\right)+\int_0^{t_N}\left(\left\|\vec{p}_{tt}\right\|_2^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_2^2\right)\mathrm{d}s\right\}$$
$$+C\tau^4+\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^{\frac{1}{2}}\right\|_0^2+\gamma\left\|\vec{\theta}_h^{\frac{1}{2}}\right\|_{H(div,\Omega)}^2+C\tau\sum_{n=0}^{N-1}\left(\left\|\vec{\theta}_h^{n+1}\right\|_0^2+\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2\right).$$

根据定义知 $\vec{\theta}_h^1=U^1-I_hu^1=O\left(\tau^3\right)$，且 $\vec{\theta}_h^0=0$。因此

$$\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^{\frac{1}{2}}\right\|_0^2+\gamma\left\|\vec{\theta}_h^{\frac{1}{2}}\right\|_{H(div,\Omega)}^2=\tau^{-2}\left\|\vec{\theta}_h^1-\vec{\theta}_h^0\right\|_0^2+\frac{\gamma}{4}\left\|\vec{\theta}_h^1-\vec{\theta}_h^0\right\|_{H(div,\Omega)}^2=O\left(\tau^4\right).$$

又

$$\left\|\vec{\theta}_h^{n-\frac{1}{2}}\right\|_{H(div,\Omega)}^2=\frac{1}{4}\left(\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_{H(div,\Omega)}^2+\left\|\vec{\theta}_h^{n-1}\right\|_{H(div,\Omega)}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{\theta}_h^n,\vec{\theta}_h^{n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\nabla\cdot\vec{\theta}_h^n,\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n-1}\right).$$

利用 Young 不等式得

$$\left(\vec{\theta}_h^n,\vec{\theta}_h^{n-1}\right)\le\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_0\left\|\vec{\theta}_h^{n-1}\right\|_0\le\frac{1}{4}\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2+\left\|\vec{\theta}_h^{n-1}\right\|_0^2.$$

类似地，

$$\left(\nabla\cdot\vec{\theta}_h^n,\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n-1}\right)\le\left\|\nabla\cdot\vec{\theta}_h^n\right\|_0\left\|\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n-1}\right\|_0\le\frac{1}{4}\left\|\nabla\cdot\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2+\left\|\nabla\cdot\vec{\theta}_h^{n-1}\right\|_0^2.$$

因此选取适当的 τ 满足 $\frac{\gamma}{8}-C\tau>0$，我们得

$$\left\|\partial_t\vec{\theta}_h^{N-\frac{1}{2}}\right\|_0^2+\left(\frac{\gamma}{8}-c\tau\right)\left\|\vec{\theta}_h^N\right\|_{H(div,\Omega)}^2\le Ch^4W+C\tau^4+C\tau\sum_{n=0}^{N-2}\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_0^2+\left(C\tau+\frac{\gamma}{4}\right)\left\|\vec{\theta}_h^{N-1}\right\|_0^2,$$

其中 $W=\|u\|_{L^\infty\left(H^3(\Omega)\right)}^2+\|\vec{p}\|_{L^\infty\left(H^2(\Omega)\right)}^2+\|u_{tt}\|_{L^\infty\left(H^3(\Omega)\right)}^2+\|u_t\|_{L^\infty\left(H^3(\Omega)\right)}^2+\int_0^{t_N}\left(\left\|\vec{p}_{tt}\right\|_2^2+\left\|\vec{p}_t\right\|_2^2\right)\mathrm{d}s$.

再利用离散的 Gronwall 不等式，可导出

$$\left\|\vec{\theta}_h^N\right\|_{H(div,\Omega)}^2\le Ch^4W+C\tau^4. \tag{13}$$

再结合(7)及(13)式，我们有

$$\left\|\xi_h^{n+\frac{1}{2}}\right\|_1\le C\left\|\nabla\xi_h^{n+\frac{1}{2}}\right\|_0\le Ch^2\left(W^{\frac{1}{2}}+\left\|u^{n+\frac{1}{2}}\right\|_3+\left\|\vec{p}^{n+\frac{1}{2}}\right\|_2\right)+C\tau^2.$$

定理 1 得证。

基金项目

许昌学院青年骨干教师项目。

参考文献 (References)

[1] 石东洋，张斐然 (2011) Sine-Gordon 方程的一类低阶非协调有限元分析. *计算数学*, **3**, 289-297.

[2] 王芬玲，石东洋 (2012) 非线性 Sine-Gordon 方程 Hermite 型有限元新的超收敛分析及外推. *应用数学学报*, **5**, 777-778.

[3] 石东洋，王芬玲，赵艳敏 (2014) 非线性 Sine-Gordon 方程的各向异性线性元高精度分析新模式. *计算数学*, **3**, 245-256.

[4] Pani, A.K. (1998) An H^1-Galerkin mixed finite element methods for parabolic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **2**, 21-727.

[5] 石东洋，张亚东 (2011) 伪双曲线方程的一个 H^1-Galerkin 非协调混合元格式. *应用数学*, **3**, 448-455.

[6] 王瑞文 (2006) 双曲型积分微分方程 H^1-Galerkin 混合元法的误差估计. *计算数学*, **1**, 19-30.

[7] 石东洋，王海红 (2009) 双曲型积分微分方程一个新的 H^1-Galerkin 混合元格式. *工程数学学报*, **4**, 648-652.

[8] 林群，严宁宁 (1996) 高效有限元构造与分析. 河北大学出版社，保定.