Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2015, 4(4), 307-312
Published Online November 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.44038

Hans汉斯

Imaginary Axis Symmetry of the Point Spectrum of the Diagonal Infinite Dimensional Hamiltonian Operators

Lijun Yan, Angran Liu

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: yanli_jun@163.com, liuang_ran@163.com

Received: Sep. 26th, 2015; accepted: Oct. 9th, 2015; published: Oct. 14th, 2015

Abstract

In this article, the point spectrum of infinite dimension of Hamilton operators is divided into four parts, getting the sufficient and necessary condition about symmetry of each part of the point spectrum. Using structural characteristics of spectrum of infinite dimension of Hamilton operators, then the symmetry axis of the point spectrum is characterized by using the residual spectrum of internal elements. In the end, some examples are constructed to illustrate the effectiveness of criterion.

Keywords

Infinite Dimensional Hamilton Operator, Point Spectrum, Residual Spectrum

对角无穷维哈密顿算子点谱关于虚轴的对称性

闫利君，刘盎然

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特市
Email: yanli_jun@163.com, liuang_ran@163.com

收稿日期：2015年9月26日；录用日期：2015年10月9日；发布日期：2015年10月14日

文章引用：闫利君，刘盎然．对角无穷维哈密顿算子点谱关于虚轴的对称性[J]．应用数学进展, 2015, 4(4): 307-312.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.44038

摘 要

本文将无穷维数Hamilton算子点谱划分为四个部分，得到每个部分的点谱关于虚轴对称的充要条件。运用无穷维数Hamilton算子的谱的结构特点，从而实现了运用内部元素的剩余谱来刻画整体的点谱的关于虚轴的对称性。最后证明了结论的正确性。

关键词

无穷维数Hamilton算子，点谱，剩余谱

1. 引言

无穷维 Hamilton 算子的谱理论是解决数学及力学方程的重要方法之一，逐渐在数学，天文学，物理学以及航天科学领域受到关注。Kurina 和 Azizov [1] [2]等人研究了非负无穷维 Hamilton 算子的可逆性和一类分块的算子函数的可约性；阿拉坦仓等人研究了无穷维 Hamilton 算子的谱理论，Cauchy 主值意义下的完备性和可逆性等问题[3]-[5]。[6]研究了上三角文无穷维 Hamilton 算子点谱的特点，利用其结构特点，得到点谱关于虚轴对称的充要条件。[7]研究了无穷维 Hamilton 算子的点谱和剩余谱的并集关于虚轴的对称性。本文主要是将对角无穷维 Hamilton 算子点谱划分为四个部分，从内部元素谱的性质出发从而分别进行讨论，这将与[4] [5]的证明方法有本质区别。

2. 预备知识

定义 2.1 设 X 是 Hilbert 空间，$H=\begin{pmatrix} A & C \\ B & -A^* \end{pmatrix}: D(H)\subseteq X\times X\to X\times X$ 是稠定线性算子，如果 H 满足 $(JH)^*=JH$，$J=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$，$A$ 为稠定闭算子，B,C 均为自伴算子，则称 H 为无穷维 Hamilton 算子。

定义 2.2 [8] 若 X 为 Banach 空间，$T: D(T)\subseteq X\to X$ 为线性算子，称以下集合为 T 的预解集。

$$\rho(T)=\left\{\lambda\in C: T-\lambda\text{是单射}, R(T-\lambda I)=X\text{且}(T-\lambda)^{-1}\text{有界}\right\}$$

称 $\sigma(T)=C\setminus\rho(T)$ 为 T 的谱集。它可分为三个互不相交的集合，

$$\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)\cup\sigma_c(T)$$

其中

$$\sigma_P(T)=\{\lambda\in C: T-\lambda\text{不是单射}\};$$

$$\sigma_r(T)=\left\{\lambda\in C: T-\lambda\text{是单射},\text{但}\overline{R(T-\lambda)}\neq X\right\};$$

$$\sigma_c(T)=\left\{\lambda\in C: T-\lambda\text{是单射},\overline{R(T-\lambda)}=X,\text{但}(T-\lambda)^{-1}\text{无界}\right\};$$

分别称作 T 的点谱、剩余谱和连续谱。

定义 2.3 此外，对于点谱和剩余谱还可以进一步细化：

$$\sigma_{P,1}(T)=\{\lambda\in\sigma_P(T): R(T-\lambda)=X\};$$

$$\sigma_{p,2}(T)=\left\{\lambda\in\sigma_p(T):\overline{R(T-\lambda)}=X,R(T-X)\text{不闭}\right\};$$

$$\sigma_{p,3}(T)=\left\{\lambda\in\sigma_p(T):\overline{R(T-\lambda)}\neq X,R(T-X)\text{闭的}\right\};$$

$$\sigma_{p,4}(T)=\left\{\lambda\in\sigma_p(T):\overline{R(T-\lambda)}\neq X,R(T-X)\text{不闭}\right\}$$

$$\sigma_{r,1}(T)=\left\{\lambda\in\sigma_r(T):R(T-X)\text{闭的}\right\};$$

$$\sigma_{r,2}(T)=\left\{\lambda\in\sigma_r(T):R(T-X)\text{不闭}\right\};$$

注 我们约定$\varnothing$关于虚轴对称。

引理 2.1 [9] [10] 设X为 Hilbert 空间，$A:D(A)\to X$是稠定闭线性算子，则

1) 若$\lambda\in\sigma_P(A)$，则$\overline{\lambda}\in\sigma_P(A^*)\cup\sigma_r(A^*)$；

2) 若$\lambda\in\sigma_r(A)$，则$\overline{\lambda}\in\sigma_p(A^*)$；

引理 2.2 [11] 设T是 Hilbert 空间X中的线性算子，则有

1) $\lambda\in\sigma_{p,1}(T)\Leftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma_{r,1}(T^*)$；

2) $\lambda\in\sigma_{p,2}(T)\Leftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma_{r,2}(T^*)$；

3) $\lambda\in\sigma_{p,3}(T)\Leftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma_{p,3}(T^*)$；

4) $\lambda\in\sigma_{p,4}(T)\Leftrightarrow\overline{\lambda}\in\sigma_{p,4}(T^*)$；

3. 主要结果及证明

对于对角型的无穷维 Hamilton 算子

$$H=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & -A^*\end{bmatrix}:D(H)\subseteq X\times X\to X\times X$$

其点谱有如下的刻画

$$\sigma_p(H)=\sigma_{p,1}(H)\cup\sigma_{p,2}(H)\cup\sigma_{p,3}(H)\cup\sigma_{p,4}(H).$$

定理 3.1 对角型的无穷维 Hamilton 算子有下列性质

1) $\lambda\in\sigma_{p,3}(H)\Leftrightarrow-\overline{\lambda}\in\sigma_{p,3}(H)$；

2) $\lambda\in\sigma_{p,4}(H)\Leftrightarrow-\overline{\lambda}\in\sigma_{p,4}(H)$；

证明：因为H为对角型的无穷维 Hamilton 算子，则有

$$H^*=-JHJ$$

再应用引理 2.2 则以上结论得证。

推论 3.1 $\sigma_p(H)$关于虚轴对称当且仅当$\sigma_{p,1}(H)$，$\sigma_{p,2}(H)$分别关于虚轴对称。

证明：容易证明，当$\sigma_{p,1}(H)$关于虚轴对称且$\sigma_{p,2}(H)$关于虚轴对称时，结合定理 3.1 知道$\sigma_p(H)$关于虚轴对称。而$\sigma_p(H)$关于虚轴对称时，设$\sigma_{p,1}(H)\neq\varnothing$，当$\lambda\in\sigma_{p,1}(H)$时，$\lambda\in\sigma_p(H)$且有$-\overline{\lambda}\in\sigma_p(H)$，进而$-\overline{\lambda}\in\sigma_{p,1}(H)\cup\sigma_{p,2}(H)\cup\sigma_{p,3}(H)\cup\sigma_{p,4}(H)$，假设$-\overline{\lambda}\in\sigma_{p,2}(H)$，则$\lambda\in\sigma_{r,2}(H)$，这与$\lambda\in\sigma_{p,1}(H)$矛盾。同理$-\overline{\lambda}\notin\sigma_{p,3}(H)\cup\sigma_{p,3}(H)$。则$-\overline{\lambda}\in\sigma_{p,1}(H)$。类似可证$\lambda\in\sigma_{p,2}(H)$时，$-\overline{\lambda}\in\sigma_{p,2}(H)$。再由定理 3.1 则推论 3.1 即证。

于是$\sigma_p(H)$关于虚轴对称的问题自然的转化为$\sigma_{p,1}(H)$，$\sigma_{p,2}(H)$分别关于虚轴对称的问题，下列

定理刻画了 $\sigma_{p,1}(H)$，$\sigma_{p,2}(H)$ 分别关于虚轴对称的充要条件。

定理 3.2

1) $\sigma_{r,1}(-A^*)\neq\varnothing,\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$ 时，$\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称当且仅当 $\Delta6=\varnothing$。

2) $\sigma_{r,1}(-A^*)=\varnothing,\sigma_{r,1}(A)\neq\varnothing$ 时，$\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称当且仅当 $\Delta7=\varnothing$。

3) $\sigma_{r,1}(-A^*)\neq\varnothing,\sigma_{r,1}(A)\neq\varnothing$ 时，$\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称当且仅当 $\Delta4\cup\Delta6\cup\Delta7=\varnothing$。

4) $\sigma_{r,1}(-A^*)=\varnothing,\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$ 时，$\sigma_{p,1}(H)=\varnothing$ 是关于虚轴对称的。

证明：对于 $\sigma_{p,1}(H)$，$\sigma_{p,2}(H)$ 有如下刻画

$$\sigma_{p,1}(H)=\left(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*)\right)\cup\left(\sigma_{p,1}(A)\cap\rho(-A^*)\right)\cup\left(\rho(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*)\right)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{p,2}(H)=&\left(\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*)\right)\cup\left(\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)\right)\cup\left(\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_{c}(-A^*)\right)\\&\cup\left(\sigma_{p,2}(A)\cap\rho(-A^*)\right)\cup\left(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)\right)\\&\cup\left(\sigma_{c}(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)\right)\cup\left(\rho(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)\right)\end{aligned}$$

记

$$\Delta1=\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*),\Delta2=\sigma_{p,1}(A)\cap\rho(-A^*),\Delta3=\rho(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*),$$

$$\Delta4=\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\sigma_{r,1}(A),\Delta5=\sigma_{p,2}(H),\Delta6=\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\rho(A),\Delta7=\rho(-A^*)\cap\sigma_{r,1}(A).$$

当 $\lambda\in\Delta1$ 时，$-\bar{\lambda}\in\Delta4$，可发现 $\Delta4$ 与 $\Delta1,\Delta2,\Delta3$ 并没有交集，进 $-\bar{\lambda}\notin\Delta1,\Delta2,\Delta3$。同理证明 $-\bar{\lambda}\notin\Delta5$。若 $\Delta1$ 关于虚轴对称则 $\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$，另外 $\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$，则 $\Delta1$ 关于虚轴对称。综上若 $\Delta1$ 关于虚轴对称当且仅当 $\Delta4=\varnothing$。

当 $\lambda\in\Delta2$ 时，$-\bar{\lambda}\in\Delta6$，可发现 $\Delta6$ 与 $\Delta1,\Delta2,\Delta3$ 并没有交集，进 $-\bar{\lambda}\notin\Delta1,\Delta2,\Delta3$。同理有 $-\bar{\lambda}\notin\Delta5$。于是若 $\Delta2$ 关于虚轴对称，则 $\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\rho(A)=\varnothing$。另一方面，当 $\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\rho(A)=\varnothing$ 时，$\Delta2$ 为空，这样 $\Delta2$ 关于虚轴对称当且仅当 $\Delta6=\varnothing$。

当 $\lambda\in\Delta3$ 时，$-\bar{\lambda}\in\Delta7$，可发现 $\Delta7$ 与 $\Delta1,\Delta2,\Delta3$ 并没有交集，进 $-\bar{\lambda}\notin\Delta1,\Delta2,\Delta3$。同理可证明 $-\bar{\lambda}\notin\Delta5$。若 $\Delta7$ 关于虚轴对称，则 $\rho(-A^*)\cap\sigma_{p,1}(A)=\varnothing$。另一方面，当 $\rho(-A^*)\cap\sigma_{p,1}(A)=\varnothing$ 时，$\Delta7$ 为空，这样 $\Delta3$ 关于虚轴对称当且仅当 $\Delta7=\varnothing$。综上可知

1) 当 $\sigma_{r,1}(-A^*)\neq\varnothing,\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$ 时，有 $\Delta4\cup\Delta7=\varnothing$，则 $\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称 $\Leftrightarrow\Delta6=\varnothing$。

2) 当 $\sigma_{r,1}(-A^*)=\varnothing,\sigma_{r,1}(A)\neq\varnothing$ 时，有 $\Delta4\cup\Delta6=\varnothing$，则 $\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称 $\Leftrightarrow\Delta7=\varnothing$。

3) 当 $\sigma_{r,1}(-A^*)\neq\varnothing,\sigma_{r,1}(A)\neq\varnothing$ 时，有 $\Delta4\cup\Delta6\cup\Delta7\neq\varnothing$，$\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称 $\Leftrightarrow\Delta4\cup\Delta6\cup\Delta7=\varnothing$。

4) $\sigma_{r,1}(-A^*)=\varnothing,\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$ 时，$\sigma_{p,1}(H)=\varnothing$ 是平凡的，所以是关于虚轴对称的。

定理 3.3

1) $\sigma_{r,2}(-A^*)\neq\varnothing,\sigma_{r,2}(A)=\varnothing$ 时，$\sigma_{p,2}(H)$ 关于虚轴对称 $\Leftrightarrow\kappa8\cup\kappa11\cup\kappa12=\varnothing$。

2) $\sigma_{r,2}(-A^*)=\varnothing,\sigma_{r,2}(A)\neq\varnothing$ 时，$\sigma_{p,2}(H)$ 关于虚轴对称 $\Leftrightarrow\kappa13\cup\kappa14\cup\kappa15=\varnothing$。

3) $\sigma_{r,2}(-A^*)\neq\varnothing,\sigma_{r,2}(A)\neq\varnothing$ 时，$\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称 $\Leftrightarrow\kappa8\cup\kappa10\cup\kappa11\cup\kappa12\cup\kappa13\cup\kappa14\cup\kappa15=\varnothing$。

4) $\sigma_{r,2}(-A^*)=\varnothing,\sigma_{r,2}(A)=\varnothing$ 时，$\sigma_{p,2}(H)=\varnothing$ 是关于虚轴对称。

证明：对于 $\sigma_{p,1}(H)$，$\sigma_{p,2}(H)$ 有如下刻画

$$\sigma_{p,2}(H)=\left(\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*)\right)\cup\left(\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)\right)\cup\left(\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_c(-A^*)\right)$$
$$\cup\left(\sigma_{p,2}(A)\cap\rho(-A^*)\right)\cup\left(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)\right)$$
$$\cup\left(\sigma_c(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)\right)\cup\left(\rho(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)\right)$$

$$\sigma_{p,1}(H)=\left(\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*)\right)\cup\left(\sigma_{p,1}(A)\cap\rho(-A^*)\right)\cup\left(\rho(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*)\right)$$

记

$$\kappa1=\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_{p,1}(-A^*),\kappa2=\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*),\kappa3=\sigma_{p,2}(A)\cap\sigma_c(-A^*)$$

$$\kappa4=\sigma_{p,2}(A)\cap\rho(-A^*),\kappa5=\sigma_{p,1}(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*),\kappa6=\sigma_c(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*)$$

$$\kappa7=\rho(A)\cap\sigma_{p,2}(-A^*),\kappa8=\sigma_{r,2}(-A^*)\cap\sigma_{r,1}(A),\kappa9=\sigma_{p,1}(H)$$

$$\kappa10=\sigma_{r,2}(-A^*)\cap\sigma_{r,2}(A),\kappa11=\sigma_{r,2}(-A^*)\cap\sigma_c(A),\kappa12=\sigma_{r,2}(-A^*)\cap\rho(A)$$

$$\kappa13=\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\sigma_{r,2}(A),\kappa14=\sigma_c(-A^*)\cap\sigma_{r,2}(A),\kappa15=\rho(-A^*)\cap\sigma_{r,2}(A)$$

当$\lambda\in\kappa1$时，$-\bar{\lambda}\in\kappa8$,我们发现$\kappa8$与$\kappa i(i=1,\cdots,7)$并没有交集，$-\bar{\lambda}\notin\kappa i(i=1,\cdots,7)$。同理$-\bar{\lambda}\notin\Delta9$。若$\kappa1$关于虚轴对称则$\sigma_{r,2}(-A^*)\cap\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$，$\sigma_{r,2}(-A^*)\cap\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$，则$\kappa1$关于虚轴对称。综上若$\kappa1$关于虚轴对称当且仅当$\kappa8=\varnothing$。

当$\lambda\in\kappa2$时，$-\bar{\lambda}\in\kappa10$，我们发现$\kappa10$与$\kappa i(i=1,\cdots,7)$并没有交集，$-\bar{\lambda}\notin\kappa i(i=1,\cdots,7)$。同理$-\bar{\lambda}\notin\Delta9$。若$\kappa2$关于虚轴对称则$\sigma_{r,2}(-A^*)\cap\sigma_{r,2}(A)=\varnothing$，$\sigma_{r,2}(-A^*)\cap\sigma_{r,1}(A)=\varnothing$时，$\kappa2$关于虚轴对称，进而$\kappa2$关于虚轴对称当且仅当$\kappa10=\varnothing$。同理可证明$\kappa3$关于虚轴对称当且仅当$\kappa11=\varnothing$。$\kappa4$关于虚轴对称当且仅当$\kappa12=\varnothing$。$\kappa5$关于虚轴对称当且仅当$\kappa13=\varnothing$，$\kappa6$关于虚轴对称当且仅当$\kappa14=\varnothing$。$\kappa7$关于虚轴对称当且仅当$\kappa15=\varnothing$。综上可知

1) $\sigma_{r,2}(-A^*)\neq\varnothing,\sigma_{r,2}(A)=\varnothing$时，$\sigma_{p,2}(H)$关于虚轴对称$\Leftrightarrow\kappa8\cup\kappa11\cup\kappa12=\varnothing$。

2) $\sigma_{r,2}(-A^*)=\varnothing,\sigma_{r,2}(A)\neq\varnothing$时，$\sigma_{p,2}(H)$关于虚轴对称$\Leftrightarrow\kappa13\cup\kappa14\cup\kappa15=\varnothing$。

3) $\sigma_{r,2}(-A^*)\neq\varnothing,\sigma_{r,2}(A)\neq\varnothing$时，$\sigma_{p,2}(H)$关于虚轴对称
$\Leftrightarrow\kappa8\cup\kappa10\cup\kappa11\cup\kappa12\cup\kappa13\cup\kappa14\cup\kappa15=\varnothing$。

4) $\sigma_{r,2}(-A^*)=\varnothing,\sigma_{r,2}(A)=\varnothing$时，$\sigma_{p,2}(H)=\varnothing$是平凡的，所以关于虚轴对称。

4. 举例与应用

例 4.1 设$A:l^2\to l^2$为线性算子，对于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$Ax=(2ix_1,-x_2,x_3,x_4,\cdots)$而$A^*x=(-2ix_1,-x_2,x_3,x_4,\cdots)$，则无穷维 Hamilton 算子

$$H=\begin{pmatrix}A&0\\0&-A^*\end{pmatrix}$$

中，$\sigma_P(A)=\sigma_P(-A^*)=\{\pm1,2i\}$，进而$\sigma_p(H)$关于虚轴对称。

通过计算知道$\sigma_r(A)=\sigma_r(-A^*)=\varnothing$，结合定理 3.2，3.3，则$\sigma_{P,1}(H)\cup\sigma_{P,2}(H)=\varnothing$，再由定理 3.1 知道$\sigma_p(H)$是关于虚轴对称的。

例 4.2 设$A:l^2\to l^2$为线性算子，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$Ax=(ix_1,ix_2+x_3,x_2,x_3,\cdots)$则

$A^*x=(-ix_1,-ix_2+x_3,x_2+x_4,x_5,x_6,\cdots)$，考虑无穷维 Hamilton 算子

$$H=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$$

由 $\sigma_p(-A^*)=\left\{i,\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}\right\}\cup\{\lambda\in C:|\lambda|<1\}$，$\sigma_P(A)=i$，则 $\sigma_p(H)$ 关于虚轴对称。

通过计算有 $\sigma_r(A)=\left\{\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}\right\}\cup\{\lambda\in C:|\lambda|<1\},\sigma_r(A^*)=\varnothing$。由定理 3.2 可判断 $\sigma_{p,1}(H)$ 是关于虚轴对称的，即判断 $\Delta7=\varnothing$，由 $\sigma_p(-A^*)=\left\{i,\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}\right\}\cup\{\lambda\in C:|\lambda|<1\}$，则 $\rho(-A^*)\cap\sigma_r(A)=\varnothing$，进而 $\Delta7=\varnothing$，$\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称。

由定理 3.2 知对于 $\sigma_{p,2}(H)$ 关于虚轴对称性要看 $\kappa13\cup\kappa14\cup\kappa15=\varnothing$ 是否成立。$\kappa13=\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\sigma_{r,2}(A)=\varnothing$ 是显然的，由 $\sigma_p(-A^*)=\left\{i,\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}\right\}\cup\{\lambda\in C:|\lambda|<1\}$，则 $\kappa15=\rho(-A^*)\cap\sigma_{r,2}(A)=\varnothing$ 成立。且 $\kappa14=\sigma_c(-A^*)\cap\sigma_{r,2}(A)=\varnothing$ 也成立。综上 $\sigma_{p,1}(H),\sigma_{p,2}(H)$ 分别关于虚轴对称成立。再由定理 3.1 知道 $\sigma_p(H)$ 关于虚轴对称。

例 4.3 设 $A:l^2\to l^2$ 为线性算子，对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$，$Ax=(3x_1+2x_2,2x_1+3x_2+x_4,\cdots,x_n,\cdots)$，$A^*x=(3x_1+2x_2,2x_1+3x_2,x_2,x_3,\cdots)$ 则无穷维 Hamilton 算子

$$H=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^* \end{pmatrix}$$

中，$\sigma_p(H)=\{1,\pm5\}\cup\{\lambda\in C:|\lambda|<1\}$，则 $\sigma_p(H)$ 不关于虚轴对称。

通过计算有 $\sigma_r(-A^*)=\{-1\}\cup\{\lambda\in C:|\lambda|<1\},\sigma_r(A)=\varnothing$，由定理 3.2 知道 $\sigma_{p,1}(H)$ 关于虚轴对称即判断 $\Delta6$ 是否为 $\varnothing$；由于 $\sigma_p(A)=\{1,5\}\cup\{\lambda\in C:|\lambda|<1\}$，$\sigma_{r,1}(-A^*)=\{-1\}$，则 $\sigma_{r,1}(-A^*)\cap\rho(A)=\{-1\}\neq\varnothing$，即 $\sigma_{p,1}(H)$ 不关于虚轴对称，进而 $\sigma_p(H)$ 不关于虚轴对称成立。

参考文献 (References)

[1] Azizov, T.Y., Kiriakidi, V.K. and Kurina, G.A. (2001) An Indefinite Approach to the Reduction of a Nonnegative Hamiltonian Operator Function to a Block Diagonal Form. *Functional Analysis and Its Applications*, **35**, 220-221.

[2] Kurina, G.A. and Martynenko, G.V. (2003) Reducibility of a Class of Operator Functions to Block-Diagonal Form. *Mathematical Notes*, **74**, 744-748.

[3] 阿拉坦仓. 一类无穷维 Hamilton 算子的本质谱及其应用[J]. 数学物理学报, 2013, 33(5): 984-992.

[4] 吴德玉. 一类无界上三角算子矩阵可逆的充分必要条件[J]. 应用数学与计算数学学报, 2014, 28(4): 486-492.

[5] 吴德玉. 无穷维 Hamilton 算子特征函数系的 Cauchy 主值意义下的完备性[J]. 中国科学数学(中文版), 2008, 38(8): 904-912.

[6] 王华, 黄俊杰. 对角无穷维 Hamilton 算子点谱关于实轴的对称性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2013, 25(1): 133-141.

[7] 黄俊杰. 无穷维 Hamilton 算子的谱及相关问题研究[J]. 数学进展, 2009, 38(2): 129-145.

[8] Azizov, T.Y. and Dijksma, A. (2012) Closedness and Adjoints of Products of Operators, and Compressions. *Integral Equations and Operator Theory*, **74**, 259-269. http://dx.doi.org/10.1007/s00020-012-1991-7

[9] 黄俊杰, 范小英. 无穷维 Hamilton 算子的谱结构[J]. 中国科学: A 辑, 2008, 38(1): 71-78.

[10] 孙炯, 王忠. 线性算子的谱分析[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[11] Akhiezer, N.I. and Glazman, I.M. (1993) Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Courier Corporation.