Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(3), 349-359
Published Online August 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53043

Hans汉斯

H^1-Galerkin Mixed Element Method for Fourth-Order Parabolic Integro-Differential Equation

Yan Li, Yaxin Hou

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: 919974757@qq.com, 1446722623@qq.com

Received: Jul. 20th, 2016; accepted: Aug. 14th, 2016; published: Aug. 17th, 2016

Abstract

In this paper, an H^1-Galerkinmixed element method is considered for one-dimensional fourth-order integro-differential equation of parabolic type. According to the characteristics of the considered equation, the three auxiliary variables are introduced, then the original fourth-order problem can be split into the coupled system with first order derivative. Some optimal error estimates for both semi-and fully discrete scheme are proved and the stability for fully discrete system is also derived.

Keywords

Fourth-Order Parabolic Integral Differential Equations, H^1-Galerkin Mixed Finite Element Method, Error Estimation, Stability Analysis

四阶抛物型积分微分方程的H^1-Galerkin混合元方法

李　岩，侯雅馨

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古　呼和浩特
Email: 919974757@qq.com, 1446722623@qq.com

文章引用: 李岩, 侯雅馨. 四阶抛物型积分微分方程的 H^1-Galerkin 混合元方法[J]. 应用数学进展, 2016, 5(3): 349-359.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53043

收稿日期：2016年7月20日；录用日期：2016年8月14日；发布日期：2016年8月17日

摘 要

本文讨论四阶抛物型积分微分方程的H¹-Galerkin混合有限元方法，研究一维情形下带有四阶空间导数项的抛物型积分微分方程H¹-Galerkin混合有限元数值方法。根据方程的特点，通过三个适当中间变量的引入，可将原四阶问题化为一个仅含有一阶导数的耦合方程组系统。对系统半离散和全离散格式的最优收敛误差估计给出详细的分析证明，并推导了全离散系统的稳定性结果。

关键词

四阶抛物型积分微分方程，H¹-Galerkin混合有限元方法，误差估计，稳定性分析

1. 引言

很多实际问题可以转化成微分方程的形式进行研究，其中发展型积分微分方程具有时间记忆项，能够反映很多实际问题，例如核反应堆问题等。此类积分微分方程也得到了很多计算学者的广泛关注，并产生了很多有效的数值计算方法。张在文献[1]中对一些积分微分方程的有限元和体积元理论做了详细的论述。Jiang 在文献[2]中给出了抛物型积分微分方程的传统混合元方法误差估计。Liu 等在文献[3]中基于扩展混合方法和分裂正定混合方法提出了正定扩展混合元方法，通过抛物型积分微分方程给出了相关的数值理论研究，并通过二维数值例子对提出数值理论进行有效验证。Liu 等在文献[4]中，研究了一类新型的扩展混合元方法，推导了相关的误差理论结果，给出了二维数值例子对研究理论结果进行验证说明。Guo 在文献[5]中利用分裂正定混合元方法研究了抛物型积分微分方程，并给出了计算数据说明方法的有效性。Zhu 等在文献[6]中针对抛物型积分微分方程给出了弱 Galerkin 方法进行数值研究。Guo 和 Rui 在文献[7]中利用最小二乘有限元法数值求解抛物型积分微分方程，对理论误差进行了详细讨论。在文献[8]，李和王利用间断时空元法研究了半线性抛物型积分微分方程问题。在文献[9]中，何等对时间间断时空元法进行了详细的讨论，并给出发展型积分微分方程的相关研究。所有这些研究都是关于二阶积分微分方程的，而对于四阶积分微分方程数值解法的相关研究还是很少见到报道。在文献[10]中，李和刘给出一类四阶抛物型积分微分方程的混合间断元数值方法。而在文献[11]中，丛和杨利用混合有限体积元方法研究该类方程。在这里我们主要利用 H^1-Galerkin 混合元方法数值求解如下四阶抛物积分微分方程[10] [11]

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} - \int_0^t u_{xx}\mathrm{d}s + \beta\cdot u_x + cu = f, & (x,t)\in(a,b)\times(0,T], \\ u(a,t)=u(b,t)=u_{xx}(a,t)=u_{xx}(b,t), & t\in[0,T], \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in[a,b], \end{cases} \tag{1.1}$$

其中(a,b)为空间区间，$(0,T]$是时间区间，β 和 c 是正常数，f 是已知源项。

H^1-Galerkin 混合方法首先由 Pani 在文献[12]中针对抛物方程问题提出的一种有效的混合元数值方法，同时他指出该方法具有不必满足著名的 LBB 相容性条件，混合元空间中的多项式次数可以灵活选取，不受混合空间之间的相互限制，同时得到中间变量和原未知量函数的最优收敛结果。正因于此，国际学者开始对此方法进行不断的研究和发展，并数值求解了很多二阶发展方程问题[12]-[24]。直到文献[23]的出现，方可将该方法应用于四阶偏微分方程数值求解。

本文的主要目的是研究一维四阶抛物型积分微分方程[10] [11]的 H^1-Galerkin 混合元方法，首先利用 H^1-Galerkin 混合元法数值求解一维情形下四阶抛物型积分微分方程，通过三个中间变量的引入，形成了四个低阶方程的耦合系统，给出了系统半离散和全离散格式的最优收敛误差估计，并讨论了全离散系统的稳定性分析。

2. 一维问题的 H^1-Galerkin 混合有限元格式

为了形成混合格式，首先引入二阶导数 $v=-u_{xx}$ 作为中间变量，可将原一维问题将为二阶方程组系统的初边值问题：

$$\begin{cases} v=-u_{xx}, \\ u_t - v_{xx} + \int_0^t v\mathrm{d}s + \beta\cdot u_x + cu = f, \\ u(a,t)=u(b,t)=v(a,t)=v(b,t)=0, t\in[0,T], \\ u(x,0)=u_0(x), x\in[a,b], \end{cases}$$

正如文献[25]，为了应用 H^1-Galerkin 混合元法，上面的方程继续降阶，也就是相当于对原问题引入 $q=u_x,\sigma=v_x,v=-q_x$，可将原问题转化为如下耦合形式：

$$\begin{cases} u_x = q, \\ v_x = \sigma, \\ u_t - \sigma_x + \int_0^t v\mathrm{d}s + \beta\cdot q + cu = f, \\ v + q_x = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

即我们能够形成 H^1-Galerkin 混合弱形式：求 $\{u,v;q,\sigma\}:[0,T]\mapsto H_0^1\times H^1$ 使得：

$$\begin{cases} (u_x,\chi_x)=(q,\chi_x), \forall\chi\in H_0^1, \\ (v_x,w_x)=(\sigma,w_x), \forall w\in H_0^1, \\ (q_t,\phi)+(\sigma_x,\phi_x)+c(q,\phi)=\left(\int_0^t v\mathrm{d}s,\phi_x\right)+(\beta\cdot q,\phi_x)-(f,\phi_x), \forall\phi\in H^1, \\ (\sigma,\psi)-(q_x,\psi_x)=0, \forall\psi\in H^1. \end{cases} \tag{2.2}$$

为了形成有限元混合弱形式，首先引入如下有限元空间。

引理 2.1. [12] 现在分别找 H_0^1 和 H^1 有限维子空间 V^h 和 W^h，使得对 $1\le p\le\infty$ 及正整数 k,r，成立如下性质：

$$\begin{aligned} &\inf_{v^h\in V_h}\left\{\left\|v-v^h\right\|_{L^p}+h\left\|v-v^h\right\|_{W^{1,p}}\right\}\le Ch^{k+1}\|v\|_{W^{k+1,p}}, v\in H_0^1\cap W^{k+1,p}, \\ &\inf_{w^h\in W_h}\left\{\left\|w-w^h\right\|_{L^p}+h\left\|w-w^h\right\|_{W^{1,p}}\right\}\le Ch^{k+1}\|w\|_{W^{r+1,p}}, w\in W^{r+1,p}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

基于以上有限元空间，可得空间半离散 H^1-Galerkin 的混合元数值格式：求 $\{u^h,v^h;q^h,\sigma^h\}:[0,T]\mapsto V^h\times W^h$，使得：

$$\begin{cases} (u_x^h,\chi_x^h)=(q^h,\chi_x^h), \\ (v_x^h,w_x^h)=(\sigma^h,w_x^h), \\ (q_t^h,\phi_x^h)+(\sigma_x^h,\phi_x^h)+c(q^h,\phi^h)=\left(\int_0^t v^h\mathrm{d}s,\phi_x^h\right)+(\beta\cdot q^h,\phi_x^h)-(f,\phi_x^h), \\ (\sigma^h,\psi^h)-(q_x^h,\psi_x^h)=0. \end{cases} \tag{2.4}$$

其中$\left(u^h(0),v^h(0),q^h(0),\sigma^h(0)\right)$为已知量。

下面分别定义u和v相关的椭圆投影[14]，求$\bar{u}^h,\bar{v}^h\in V_h$，满足：

$$\left(u_x-\bar{u}_x^h,\chi_x^h\right)=0,\left(v_x-\bar{v}_x^h,w_x^h\right)=0,\chi^h,w^h\in V_h.$$

同时，我们也分别定义中间变量q和σ的椭圆投影，$\bar{q}^h,\bar{\sigma}^h\in W_h$满足：

$$A\left(q-\bar{q}^h,\phi^h\right)=0,A\left(\sigma-\bar{\sigma}^h,\psi^h\right)=0,\phi^h,\psi^h\in W_h.$$

其中，$A(\varphi,\omega)=(\varphi_x,\omega_x)+\lambda(\varphi,\omega)$，$\lambda$为正常数，且存在常数$\mu_0>0$，使得：

$$A(\omega,\omega)\geq\mu_0\|\omega\|_1^2,\omega\in H^1.$$

基于以上投影，我们有相应的估计结果如下

引理 2.2. [12] [25] 设$\eta=u-\bar{u}^h,\tau=v-\bar{v}^h,\rho=q-\bar{q}^h,\delta=\sigma-\bar{\sigma}^h$，对于$j=0,1$，有

$$\|\eta\|_j+\|\eta_t\|_j\leq Ch^{k+1-j}\left[\|u\|_{k+1}+\|u_t\|_{k+1}\right],\tag{2.5}$$

$$\|\tau\|_j+\|\tau_t\|_j\leq Ch^{k+1-j}\left[\|v\|_{k+1}+\|v_t\|_{k+1}\right],\tag{2.6}$$

$$\|\rho\|_j\leq Ch^{r+1-j}\|q\|_{r+1},\|\rho_t\|_j\leq Ch^{r+1-j}\|q_t\|_{r+1},\|\rho_{tt}\|_j\leq Ch^{r+1-j}\|q_{tt}\|_{r+1},\tag{2.7}$$

$$\|\delta\|_j\leq Ch^{r+1-j}\|\sigma\|_{r+1},\|\delta_t\|_j\leq Ch^{r+1-j}\|\sigma_t\|_{r+1},\|\delta_{tt}\|_j\leq Ch^{r+1-j}\|\sigma_{tt}\|_{r+1}.\tag{2.8}$$

3. 半离散情形下的误差分析

下面给出误差估计，令：

$$\begin{aligned}&u-u^h=u-\bar{u}^h+\bar{u}^h-u^h=\eta+\varsigma,v-v^h=v-\bar{v}^h+\bar{v}^h-v^h=\tau+\theta,\\&q-q^h=q-\bar{q}^h+\bar{q}^h-q^h=\rho+\xi,\sigma-\sigma^h=\sigma-\bar{\sigma}^h+\bar{\sigma}^h-\sigma^h=\delta+r.\end{aligned}$$

那么误差方程为：

$$\begin{cases}(a)\ \left(\varsigma_x,\chi_x^h\right)=\left(\rho,\chi_x^h\right)+\left(\xi,\chi_x^h\right),\forall\chi^h\in \mathrm{V}_h,\\(b)\ \left(\theta_x,w_x^h\right)=\left(\delta,w_x^h\right)+\left(r,w_x^h\right),\forall w^h\in \mathrm{V}_h,\\(c)\ \left(\xi_t,\phi^h\right)+A\left(r,\phi^h\right)+c\left(\xi,\phi^h\right)+\left(\int_0^t\theta\mathrm{d}s,\phi_x^h\right)\\\quad=-\left(\rho_t,\phi^h\right)+\lambda\left(r+\delta,\phi^h\right)-c\left(\rho,\phi^h\right)-\left(\int_0^t\tau\mathrm{d}s,\phi_x^h\right)+\left(\beta\cdot\rho,\phi_x^h\right),\forall\phi^h\in W_h,\\(d)\ \left(r,\psi^h\right)-A\left(\xi,\psi^h\right)=-\left(\delta,\psi^h\right)-\lambda\left(\xi+\rho,\psi^h\right),\forall\psi^h\in W_h.\end{cases}\tag{3.1}$$

定理 3.1. 若取$q^h(0)=\bar{q}^h(0),\sigma^h(0)=\bar{\sigma}^h(0)$，则

$$\left\|u-u^h\right\|+\left\|v-v^h\right\|+\left(\int_0^t\left\|v-v^h\right\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}+h\left\|u-u^h\right\|_1+h\left\|v-v^h\right\|_1\leq Ch^{\min(k+1,r+1)},$$

$$\left\|q-q^h\right\|+\left\|\sigma-\sigma^h\right\|+\left(\int_0^t\left\|q-q^h\right\|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}+h\left\|q-q^h\right\|_1+h\left\|\sigma-\sigma^h\right\|_1\leq Ch^{\min(k+1,r+1)}.$$

证明： 在(3.1) (b)，(c)，(d)中，令$\phi^h=\xi,\psi^h=r,w^h=\theta$，并将结果相加，得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|^2+c\|\xi\|^2+\|r\|^2+\|\theta_x\|^2\\&=(\delta,\theta_x)+(r,\theta_x)-(\delta,r)-(\rho_t,\xi)-\lambda(\xi,r)-\lambda(\rho,r)+\lambda(r,\xi)\\&\quad+\lambda(\delta,\xi)-\left(\int_0^t\tau\mathrm{d}s,\xi_x\right)-\left(\int_0^t\theta\mathrm{d}s,\xi_x\right)+(\beta\cdot\rho,\xi_x)+(\beta\cdot\xi,\xi_x).\end{aligned}$$

对上式，我们利用 Cauchy-Schwarz 不等式，容易得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|^2+c\|\xi\|^2+\|r\|^2+\|\theta_x\|^2\\&\le\frac{3}{4}\left(\|\theta_x\|^2+\|r\|^2\right)+C\left(\|\delta\|^2+\|\rho_t\|^2+\|\xi\|^2+\|\rho\|^2\right.\\&\quad\left.+\int_0^t\|\tau\|^2\,\mathrm{d}s+\|\xi_x\|^2+\int_0^t\|\theta\|^2\,ds+\|\beta\cdot\rho\|^2\right).\end{aligned}\tag{3.2}$$

对(3.2)两端关于时间进行积分，并由 Cauchy-Schwarz 不等式，得到

$$\begin{aligned}&\|\xi\|^2+\int_0^t\|\xi\|^2\,\mathrm{d}s+\int_0^t\|r\|^2\,\mathrm{d}s+\int_0^t\|\theta_x\|^2\,\mathrm{d}s\\&\le C\int_0^t\left(\|\delta\|^2+\|\rho_t\|^2+\int_0^l\|\tau\|^2\,\mathrm{d}t+\int_0^l\|\theta\|^2\,\mathrm{d}t+\|\xi\|^2+\|\xi_x\|^2+\|\rho\|^2\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{3.3}$$

在(3.1)，我们取 $\phi^h=r,\psi^h=\xi_t$，并将(c)，(d)两个方程相减，得到

$$\begin{aligned}&(r_x,r_x)+\lambda(r,r)+(\xi_x,\xi_{xt})+\lambda(\xi,\xi_t)+c(\xi,r)\\&=-(\rho_t,r)+\lambda(r,r)+\lambda(\delta,r)-c(\rho,r)-\left(\int_0^t\tau\mathrm{d}s,r_x\right)-\left(\int_0^t\theta\mathrm{d}s,r_x\right)\\&\quad+(\beta\cdot\rho,r_x)+(\beta\cdot\xi,r_x)+(\delta,\xi_t)+\lambda(\xi+\rho,\xi_t).\end{aligned}\tag{3.4}$$

在(3.1) (b)中令 $w^h=\theta$，并将结果带入到(3.4)中，得到

$$\begin{aligned}&\|r_x\|^2+\lambda\|r\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi_x\|^2+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|^2+\|\theta_x\|^2\\&\le C\left(\|\xi\|^2+\|r\|^2+\|\delta\|^2+\|\rho\|^2+\int_0^t\|\tau\|^2\,\mathrm{d}s+\int_0^t\|\theta\|^2\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\|r_x\|^2+\|\beta\cdot\rho\|^2\right.\\&\quad\left.+\|\beta\cdot\xi\|^2+\|\delta_t\|^2+\|\rho_t\|^2\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta,\xi)-(\delta_t,\xi)+\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho,\xi)-\lambda(\rho_t,\xi).\end{aligned}\tag{3.5}$$

对(3.5)两端积分，有 Cauchy-Schwarz 不等式，得到

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|r_x\|^2\,\mathrm{d}s+\int_0^t\|r\|^2\,\mathrm{d}s+\|\xi_x\|^2+\|\xi\|^2+\int_0^t\|\theta_x\|^2\,\mathrm{d}s\\&\le C\int_0^t\left(\|\xi\|^2+\|r\|^2+\|\delta\|^2+\|\rho\|^2+\int_0^s\|\tau\|^2\,\mathrm{d}l+\int_0^s\|\theta\|^2\,\mathrm{d}l\right.\\&\quad\left.+\|\beta\cdot\rho\|^2+\|\beta\cdot\xi\|^2+\|\delta_t\|^2+\|\rho\|^2\right)\mathrm{d}s+C\left(\|\delta\|^2+\|\xi\|^2+\|\rho\|^2\right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

注意到 Poincare 不等式 $\|\theta\|^2\le C\|\theta_x\|^2$ 和 Gronwall 引理，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^t\|r_x\|^2\,\mathrm{d}s+\int_0^t\|r\|^2\,\mathrm{d}s+\|\xi_x\|^2+\|\xi\|^2+\int_0^t\|\theta\|^2\,\mathrm{d}s\\&\le\int_0^t\left(\|\delta\|^2+\|\rho\|^2+\int_0^s\|\tau\|^2\,\mathrm{d}l+\|\delta_t\|^2+\|\rho_t\|^2\right)\mathrm{d}s+\|\delta\|^2+\|\rho\|^2.\end{aligned}\tag{3.7}$$

联立(3.7)和(3.3)，可得

$$\|\xi\|_1^2+\int_0^t\left(\|r\|_1^2+\|\xi\|^2+\|\theta\|_1^2\right)\mathrm{d}s$$
$$\le\int_0^t\left(\|\delta\|^2+\|\rho\|^2+\int_0^s\|\tau\|^2\,\mathrm{d}l+\|\delta_t\|^2+\|\rho_t\|^2\right)\mathrm{d}s+\|\delta\|^2+\|\rho\|^2. \tag{3.8}$$

对(3.1) (d)时间求导，并令 $\psi^h=r$，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|r\|^2-(\xi_{xt},r_x)=-(\delta_t,r)-\lambda(\rho_t,r). \tag{3.9}$$

在(3.1) (c)中取 $\phi^h=\xi_t$，得到

$$\|\xi_t\|^2+(r_x,\xi_{xt})+c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|^2=-(\rho_t,\xi_t)+\lambda(\delta,\xi_t)-c(\rho,\xi_t)-\left(\int_0^t\tau\mathrm{d}s,\xi_{xt}\right)$$
$$-\left(\int_0^t\theta\mathrm{d}s,\xi_{xt}\right)+(\beta\cdot\rho,\xi_{xt})+(\beta\cdot\xi,\xi_{xt}). \tag{3.10}$$

将(3.9)和(3.10)相加，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|r\|^2+\|\xi_t\|^2+c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|^2=-(\delta_t,r)-\lambda(\rho_t,r)-(\rho_t,\xi_t)+\lambda(\delta,\xi_t)-c(\rho,\xi_t)$$
$$-\left(\int_0^t\tau\mathrm{d}s,\xi_{xt}\right)-\left(\int_0^t\theta\mathrm{d}s,\xi_{xt}\right)+(\beta\cdot\rho,\xi_{xt})+(\beta\cdot\xi,\xi_{xt}). \tag{3.11}$$

在(3.1) (b)中令 $w^h=\theta$，加到(3.11)中，得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|r\|^2+\|\xi_t\|^2+c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\xi\|^2+\|\theta_x\|^2$$
$$=-(\delta_t,r)-\lambda(\rho_t,r)-(\rho_t,\xi_t)+\lambda(\delta,\xi_t)-c(\rho,\xi_t)+(\tau,\xi_x)$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t\tau\mathrm{d}s,\xi_x\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t\theta\mathrm{d}s,\xi_x\right)+(\theta,\xi_x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta\cdot\rho,\xi_x)$$
$$-(\beta\cdot\rho_t,\xi_x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta\cdot\xi,\xi_x)-(\beta\cdot\xi_t,\xi_x)+(\delta,\theta_x)+(r,\theta_x). \tag{3.12}$$

对(3.12)关于时间积分，利用 Cauchy-Schwarz 不等式，得到

$$\|r\|^2+\int_0^t\|\xi_t\|^2\,\mathrm{d}s+\|\xi\|^2+\int_0^t\|\theta_x\|^2\,\mathrm{d}s$$
$$\le C\int_0^t\left(\|r\|^2+\|\rho_t\|^2+\|\xi_x\|^2+\|\delta\|^2+\|\rho\|^2+\|\theta_x\|^2+\|\tau\|^2\right)\mathrm{d}s$$
$$+C\left(\int_0^t\|\tau\|^2\,\mathrm{d}s+\|\xi_x\|^2+\int_0^t\|\theta\|^2\,\mathrm{d}s+\|\rho\|^2+\|\xi\|^2\right). \tag{3.13}$$

将(3.8)带入(3.13)，并应用 Gronwall 引理，可得

$$\|r\|^2+\int_0^t\|\xi_t\|^2\,\mathrm{d}s+\|\xi\|^2+\int_0^t\|\theta_x\|^2\,\mathrm{d}s$$
$$\le C\int_0^t\left(\|\rho_t\|^2+\|\delta\|^2+\|\delta_t\|^2+\|\rho\|^2+\|\tau\|^2\right)\mathrm{d}s. \tag{3.14}$$

在(3.1) (a)和(b)中分别取 $\chi^h=\varsigma, w^h=\theta$，并注意到 Poincare 不等式，有

$$\|\varsigma\|^2\le C\|\varsigma_x\|^2\le\|\rho\|^2+\|\xi\|^2,$$
$$\|\theta\|^2\le C\|\theta_x\|^2\le\|\delta\|^2+\|r\|^2. \tag{3.15}$$

联立(3.8)，(3.14)，(3.15)，并结合三角不等式及(2.5)~(2.8)，我们可得定理结论。

4. 全离散稳定性及误差估计

首先根据半离散格式，我们给出系统在 $t=t_n$ 处的一阶向后 Euler 格式

$$\begin{cases}(a)\ \left(U_x^n,\chi_x^h\right)=\left(Q^n,\chi_x^h\right),\\(b)\ \left(V_x^n,w_x^h\right)=\left(Z_x^n,w_x^h\right),\\(c)\ \left(\bar{\partial}_tQ^n,\phi^h\right)+\left(Z_x^n,\phi_x^h\right)+c\left(Q^n,\phi_x^h\right)\\\qquad=-\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}V^j,\phi_x^h\right)-\left(R_1^n,\phi_x^h\right)+\left(\beta\cdot Q^n,\phi_x^h\right)-\left(f^n,\phi_x^h\right),\\(d)\ \left(Z^n,\psi^h\right)-\left(Q_x^n,\psi_x^h\right)=0.\end{cases}\tag{4.1}$$

定理 4.1. 当Δt充分小时，有如下不等式成立

$$\left\|U^n\right\|_1+\left\|Q^n\right\|+\left(\Delta t\sum_{j=1}^{n}\left\|Z^j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\Delta t\sum_{j=1}^{n}\left\|Q^j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\Delta t\sum_{j=1}^{n}\left\|V_x^j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le C\left(\left\|Q^0\right\|+\max_{0\le j\le n}\left\|f^j\right\|\right).$$

证明：在(4.1) (c)和(d)中，令$\phi^h=Q^n,\psi^h=Z^n$，并将两式相加，可得

$$\begin{aligned}&\left(\bar{\partial}_tQ^n,Q^n\right)+\left\|Z^n\right\|^2+c\left\|Q^n\right\|^2\\&=-\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}V^j,Q_x^n\right)+\left(\beta\cdot Q^n,Q_x^n\right)-\left(f^n,Q_x^n\right).\end{aligned}\tag{4.2}$$

在(4.1) (b)中，取$w^h=V^n$，并将结果带入(4.2)中，得到

$$\begin{aligned}&\left(\bar{\partial}_tQ^n,Q^n\right)+\left\|Z^n\right\|^2+c\left\|Q^n\right\|^2+\left\|V_x^n\right\|^2\\&=-\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}V^j,Q_x^n\right)+\left(\beta\cdot Q^n,Q_x^n\right)-\left(f^n,Q_x^n\right)+\left(Z^n,V_x^n\right).\end{aligned}\tag{4.3}$$

注意到

$$\left(\bar{\partial}_tQ^n,Q^n\right)=\frac{1}{2}\bar{\partial}_t\left\|Q^n\right\|^2,$$

那么有

$$\begin{aligned}&\left\|Q^n\right\|^2-\left\|Q^{n-1}\right\|^2+2\Delta t\left\|Z^n\right\|^2+c\Delta t\left\|Q^n\right\|^2+2\Delta t\left\|V_x^n\right\|^2\\&\le 2\Delta t\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\left\|V^j\right\|^2+\left\|Q_x^n\right\|^2+\left\|\beta\cdot Q^n\right\|^2+\left\|f^n\right\|^2\right).\end{aligned}\tag{4.4}$$

对$n=1$到$J\left(1\le J\le M\right)$求和，得到

$$\begin{aligned}&\left\|Q^J\right\|^2-\left\|Q^0\right\|^2+2\Delta t\sum_{n=1}^{J}\left\|Z^j\right\|^2+c\Delta t\sum_{n=1}^{J}\left\|Q^j\right\|^2+2\Delta t\sum_{n=1}^{J}\left\|V_x^j\right\|^2\\&\le 2\Delta t\sum_{n=1}^{J}\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\left\|V^j\right\|^2+\left\|Q_x^j\right\|^2+\left\|\beta\cdot Q^j\right\|^2+\left\|f^j\right\|^2\right).\end{aligned}\tag{4.5}$$

在(4.1) (d)中取$\psi^h=Q^n$，得到

$$\left\|Q_x^n\right\|^2\le\varepsilon\left\|Z^n\right\|^2+C\left\|Q^n\right\|^2\tag{4.6}$$

联合(4.5)和(4.6)，并应用 Gronwall 引理，可得

$$\left\|Q^n\right\|^2\le\left\|Q^0\right\|^2+C\max_{0\le j\le n}\left\|f^j\right\|\tag{4.7}$$

在(4.1) (a)中，令$\chi^h=U^n$，由 Cauchy-Schwarz 不等式，得到

$$\left\|U_x^n\right\| \le \left\|Q^n\right\|$$

由 Poincare 不等式，得到

$$\left\|U^n\right\| \le C\left\|U_x^n\right\| \le C\left\|Q^n\right\| \tag{4.8}$$

最后结合(4.7)和(4.8)，得到稳定性证明。

接下来为了进行误差估计，我们可以写

$$\begin{aligned}
u(t_n)-U^n &= \left(u(t_n)-\bar{u}^h(t_n)\right)+\left(\bar{u}^h(t_n)-U^n\right)=\eta^n+\varsigma^n,\\
v(t_n)-V^n &= \left(v(t_n)-\bar{v}^h(t_n)\right)+\left(\bar{v}^h(t_n)-V^n\right)=\tau^n+\theta^n,\\
q(t_n)-Q^n &= \left(q(t_n)-\bar{q}^h(t_n)\right)+\left(\bar{q}^h(t_n)-Q^n\right)=\rho^n+\xi^n,\\
\sigma(t_n)-Z^n &= \left(\sigma(t_n)-\bar{\sigma}^h(t_n)\right)+\left(\bar{\sigma}^h(t_n)-Z^n\right)=\delta^n+r^n.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

在 $t=t_n$ 处，误差方程为

$$\begin{cases}
(a)\ \left(\varsigma_x^n,\chi_x^h\right)=\left(\rho^n,\chi_x^h\right)+\left(\xi^n,\chi_x^h\right),\\
(b)\ \left(\theta_x^n,w_x^h\right)=\left(\delta^n,w_x^h\right)+\left(r^n,w_x^h\right),\\
(c)\ \left(\bar{\partial}_t\xi^n,\phi^h\right)+A\left(r^n,\phi^h\right)+c\left(\xi^n+\rho^n,\phi^h\right)\\
\qquad =-\left(\bar{\partial}_t\rho^n+\pi^n,\phi^h\right)+\lambda\left(r^n+\delta^n,\phi^h\right)+\left(\beta\cdot\left(\rho^n+\xi^n\right),\phi_x^h\right)\\
\qquad\quad -\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\tau^j,\phi_x^h\right)-\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\theta^j,\phi_x^h\right)-\left(R_2^n,\phi_x^h\right)-\left(R_3^n,\phi_x^h\right),\\
(d)\ \left(r^n,\psi^h\right)-A\left(\xi^n,\psi^h\right)=-\left(\delta^n,\psi^h\right)-\lambda\left(\xi^n+\rho^n,\psi^h\right).
\end{cases} \tag{4.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
\pi^n &= q_t(t_n)-\bar{\partial}_t q(t_n),\\
R_2^n &= \int_0^t \tau^n \mathrm{d}s-\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\tau^j,\\
R_3^n &= \int_0^t \theta^n \mathrm{d}s-\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\theta^j.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

定理 4.2. 对于 $1\le J\le M$，成立如下误差估计

$$\begin{aligned}
&\left\|q^J-Q^J\right\|+\left\|\sigma^J-Z^J\right\| \le C\left(h^{\min(r+1,k+1)}+\Delta t\right),\\
&\left\|q^J-Q^J\right\|_1+\left(\Delta t\sum_{n=1}^{J}\left\|\sigma^J-Z^J\right\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\left(h^{\min(r,k+1)}+\Delta t\right),\\
&\left\|u^J-U^J\right\|+\left\|v^J-V^J\right\| \le C\left(h^{\min(r+1,k)}+\Delta t\right),\\
&\left\|u^J-U^J\right\|_1+\left\|v^J-V^J\right\|_1 \le C\left(h^{\min(r+1,k)}+\Delta t\right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

证明： 在(4.10) (a)，(b)中，令 $\chi^h=\varsigma^n, w^h=\theta^n$，由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Poincare 不等式，得到

$$\begin{aligned}
\left\|\varsigma^n\right\|^2 &\le C\left\|\varsigma_x^n\right\|^2 \le C\left(\left\|\rho^n\right\|^2+\left\|\xi^n\right\|^2\right),\\
\left\|\theta^n\right\|^2 &\le C\left\|\theta_x^n\right\|^2 \le C\left(\left\|\delta^n\right\|^2+\left\|r^n\right\|^2\right).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

在(4.10) (b)，(c)，(d)中，令 $\phi^h = r^n, \psi^h = \bar{\partial}_t \xi^n, w^h = \theta^n$，将(c)和(d)相减再与(b)相加，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\bar{\partial}_t\left\|\xi_x^n\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|r_x^n\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|\theta_x^n\right\|^2 \\
&=-\left(\bar{\partial}_t\rho^n+\pi^n,r^n\right)-\left(\rho^n+\xi^n,r^n\right)+\lambda\left(\delta^n,r^n\right)+\left(\beta\cdot\left(\rho^n+\xi^n\right),r_x^n\right) \\
&\quad-\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\tau^j,r_x^n\right)-\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\theta^j,r_x^n\right)-\left(R_2^n,r_x^n\right)-\left(R_3^n,r_x^n\right) \\
&\quad+\left(\delta^n,\bar{\partial}_t\xi^n\right)+\lambda\left(\rho^n,\bar{\partial}_t\xi^n\right)+\left(\delta^n,\theta_x^n\right)+\left(r^n,\theta_x^n\right). \\
&\le C\left(\left\|\bar{\partial}_t\rho^n\right\|^2+\left\|\pi^n\right\|^2+\left\|r^n\right\|^2+\left\|\delta^n\right\|^2+\left\|\bar{\partial}_t\xi^n\right\|^2+\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\left\|\tau^j\right\|^2\right. \\
&\quad\left.+\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\left\|\theta^j\right\|^2+\left\|R_2^n\right\|^2+\left\|R_3^n\right\|^2\right).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

在(4.15)中，对 $n=1$ 到 $J\,(1\le J\le M)$ 求和，得到

$$\begin{aligned}
\left\|\xi_x^J\right\|^2+\Delta t\sum_{n=1}^{J}\left\|r_x^n\right\|^2 &\le \Delta t\sum_{n=1}^{J}\left(\left\|\bar{\partial}_t\rho^n\right\|^2+\left\|\pi^n\right\|^2+\left\|r^n\right\|^2+\left\|\delta^n\right\|^2+\left\|\rho^n\right\|^2\right. \\
&\quad\left.+\left\|\bar{\partial}_t\xi^n\right\|^2+\left\|R_2^n\right\|^2+\left\|R_3^n\right\|^2+\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\left\|\tau^j\right\|^2\right).
\end{aligned} \tag{4.15}$$

在(4.10) (b)，(c)，(d)中，令 $\phi^h = \xi^n, \psi^h = r^n, w^h = \theta^n$，将三式相加，得到

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\partial}_t\xi^n,\xi^n\right)+\left\|r^n\right\|^2 &= -\left(\bar{\partial}_t\rho^n+\pi^n,\xi^n\right)+\lambda\left(\delta^n+r^n,\xi^n\right)-\lambda\left(\delta^n+\rho^n,r^n\right) \\
&\quad-\left(\delta^n,r^n\right)+\left(\beta\cdot\rho^n,\xi_x^n\right)+\left(\beta\cdot\xi^n,\xi_x^n\right)-\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\tau^j,\xi_x^n\right) \\
&\quad-\left(\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\theta^j,\xi_x^n\right)-\left(R_2^n,\xi_x^n\right)-\left(R_3^n,\xi_x^n\right).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\bar{\partial}_t\left\|\xi^n\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|r^n\right\|^2 &\le C\left(\left\|\bar{\partial}_t\rho^n\right\|^2+\left\|\pi^n\right\|^2+\left\|\xi^n\right\|^2+\left\|\delta^n\right\|^2+\left\|\rho^n\right\|^2\right. \\
&\quad\left.+\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\left\|\tau^j\right\|^2+\left\|\xi_x^n\right\|^2+\Delta t\sum_{j=0}^{n-1}\left\|\theta^j\right\|^2+\left\|R_2^n\right\|^2+\left\|R_3^n\right\|^2\right).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\left\|\bar{\partial}_t\rho^n\right\|^2 \le Ch^2\left(r+1\right)\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|q_t\left(s\right)\right\|_{r+1}^2\,\mathrm{d}s, \\
&\left\|\pi^n\right\|^2 \le C\Delta t\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|q_{tt}\left(s\right)\right\|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

对于(4.17)关于 $n=1$ 到 $J\,(1\le J\le M)$ 求和，并根据(1.4.15)，由 Gronwall 引理，可得

$$\left\|\xi^J\right\|^2+\Delta t\sum_{n=1}^{J}\left\|r^n\right\|^2+\Delta t\sum_{n=1}^{J}\left\|Q_x^n\right\|^2 \le C\left(h^2\left(r+1\right)+\left(\Delta t\right)^2\right). \tag{4.19}$$

由(4.10) (d)，得到

$$\left(\bar{\partial}_t r^n,\psi^h\right)-\left(\bar{\partial}_t\xi_x^n,\psi_x^h\right)=-\left(\bar{\partial}_t\delta^n,\psi^h\right)-\lambda\left(\bar{\partial}_t\rho^n,\psi^h\right). \tag{4.20}$$

在(4.20)，令$\psi^h = r^n$，得到

$$\left(\bar{\partial}_t r^n, r^n\right) - \left(\bar{\partial}_t \xi_x^n, r_x^n\right) = -\left(\bar{\partial}_t \delta^n, r^n\right) - \lambda\left(\bar{\partial}_t \rho^n, r^n\right). \tag{4.21}$$

由(4.10) (c)，取$\phi^n = \bar{\partial}_t \xi^n$，得到

$$\begin{aligned}\left(\bar{\partial}_t \xi^n, \bar{\partial}_t \xi^n\right) + \left(r_x^n, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) = &-\left(\bar{\partial}_t \rho^n + \pi^n, \bar{\partial}_t \xi^n\right) - c\left(\rho^n + \xi^n, \bar{\partial}_t \xi^n\right) + \lambda\left(\delta^n, \bar{\partial}_t \xi^n\right) \\ &+ \left(\beta \cdot \left(\rho^n + \xi^n\right), \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) - \left(\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \tau^j, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) - \left(\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) \\ &- \left(R_2^n, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) - \left(R_3^n, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right).\end{aligned} \tag{4.22}$$

将上面两式相加，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\bar{\partial}_t \left\|r^n\right\|^2 + \left\|\bar{\partial}_t \xi^n\right\|^2 = &-\left(\bar{\partial}_t \delta^n, r^n\right) - \lambda\left(\bar{\partial}_t \rho^n, r^n\right) - \left(\bar{\partial}_t \rho^n + \pi^n, \bar{\partial}_t \xi^n\right) \\ &- c\left(\rho^n + \xi^n, \bar{\partial}_t \xi^n\right) + \lambda\left(\delta^n, \bar{\partial}_t \xi^n\right) + \left(\beta \cdot \left(\rho^n + \xi^n\right), \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) \\ &- \left(\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \tau^j, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) - \left(\Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \theta^j, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) - \left(R_2^n, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right) - \left(R_3^n, \bar{\partial}_t \xi_x^n\right).\end{aligned} \tag{4.23}$$

上式对$n=1$到$J\left(1 \le J \le M\right)$求和，应用 Gronwall 引理，得到

$$\begin{aligned}&\left(1 - C\Delta t\right)\left\|r^J\right\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{J} \left\|\bar{\partial}_t \xi^n\right\|^2 \\ &\le \Delta t \sum_{n=1}^{J} \left(\left\|\bar{\partial}_t \rho^n\right\|^2 + \left\|\pi^n\right\|^2 + \left\|\delta^n\right\|^2 + \left\|\bar{\partial}_t \xi^n\right\|^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{n-1} \left\|\tau^j\right\|^2 + \left\|R_2^n\right\|^2 + \left\|R_3^n\right\|^2 \right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

结合(4.24)，(4.19)，(4.15)，我们得到

$$\left\|\xi^J\right\|^2 + \left\|r^J\right\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{J} \left\|\bar{\partial}_t \xi^n\right\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{J} \left\|r^n\right\|^2 \le C\left(h^{2(r+1)} + \left(\Delta t\right)^2\right). \tag{4.25}$$

由(4.25)，(4.13)可得定理结论。

5. 总结

本文从一维空间讨论四阶抛物积分微分方程的 H^1-Galerkin 混合元方法，给出了系统稳定性分析和最优误差估计。从理论上得到的估计结果是不错的，同时我们可以考虑将该方法延拓应用到四阶双曲积分微分方程问题，并给出完善的数值理论分析过程，同时给出一维和多维的数值例子。

致　谢

感谢导师李宏教授和刘洋教授的指导与帮助，感谢编辑和审稿专家提出的宝贵意见。本文得到国家自然科学基金(11301258, 11361035)，内蒙古自然科学基金(2016MS0102)的资助。

参考文献 (References)

[1] Zhang, T. (2009) Finite Element Methods for Partial Integro-Differential- Equations. Chinese Science Press, Beijing.

[2] Jiang, Z.W. (1999) $L^\infty\left(L^2\right)$ and $L^\infty\left(L^\infty\right)$ Error Estimates for Mixed Methods For Integro-Differential Equations of Parabolic Type. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, **33**, 531-546.
http://dx.doi.org/10.1051/m2an:1999151

[3] Liu, Y., Li, H., Wang, J.F. and Gao, W. (2012) A New Positive Definite Expanded Mixed Element Method for Para-

bolic Integro-Differential Equation. *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, Article ID: 391372.

[4] Liu, Y., Fang, Z.C., Li, H., He, S. and Gao, W. (2015) A New Expanded Mixed Method for Parabolic Integro-Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **259**, 600-613. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.081

[5] Guo, H. (2012) A Splitting Positive Definite Mixed Finite Element Method for Two Classes of Integro-Differential Equations. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **39**, 271-301. http://dx.doi.org/10.1007/s12190-011-0527-7

[6] Zhu, A.L., Xu, T.T. and Xu, Q. (2016) Weak Galerkin Finite Element methods for Linear Parabolic Integro-Differential Equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **32**, 1357-1377. http://dx.doi.org/10.1002/num.22053

[7] Guo, H. and Rui, H. (2006) Crank-Nicolson Least-Squares Galerkin Procedures for Parabolic Integro-Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **180**, 622-634. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2005.12.047

[8] 李宏，王焕清. 半线性抛物型积分微分方程的间断时空有限元方法[J]. 计算数学, 2006, 28(3): 293-308.

[9] 何斯日古楞，李宏，刘洋. 发展型积分微分方程的时间间断时空有限元方法[J]. 数学进展, 2011, 40(5): 513-530.

[10] 李宏，刘洋. 一类四阶抛物型积分－微分方程的混合间断时空有限元法[J]. 计算数学, 2007, 29(4): 413-420.

[11] 丛美琴，杨青. 一类四阶抛物型积分－微分方程的混合有限体积方法[J]. 科学技术与工程, 11(23): 5502-5506.

[12] Pani, A.K. (1998) An H^1-Galerkin Mixed Finite Element Method for Parabolic Partial Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **35**, 712-727. http://dx.doi.org/10.1137/S0036142995280808

[13] 郭玲，陈焕祯. Sobolev 方程的 H^1-Galerkin 混合有限元方法[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(3): 301-314.

[14] 王瑞文. 双曲型积分微分方程的 H^1-Galerkin 混合有限元方法误差估计[J]. 计算数学, 2006, 28(1): 19-30.

[15] 陈红斌，徐大. 非线性抛物型偏积分微分方程的 H^1-Galerkin 混合有限元方法[J]. 应用数学学报，2008，31(4): 702-712.

[16] Liu, Y. and Li, H. (2009) H^1-Galerkin Mixed Finite Element Methods for Pseudo-Hyperbolic Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **212**, 446-457. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2009.02.039

[17] Liu, Y., Li, H. and Wang, J.F. (2009) Error Estimates of H^1-Galerkin Mixed Finite Element Method for Schrodinger Equation. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **24**, 83-89. http://dx.doi.org/10.1007/s11766-009-1782-3

[18] Zhou, Z.J. (2010) An H^1-Galerkin Mixed Finite Element Method for a Class of Heat Transport Equations. *Applied Mathematical Modelling*, **34**, 2414-2425. http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2009.11.007

[19] Liu, Y., Li, H., Du, Y.W. and Wang, J.F. (2013) Explicit Multi-Step Mixed Finite Element Method for RLW Equation. *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID: 768976.

[20] 石东洋，唐启立，董晓靖. 强阻尼波动方程的 H^1-Galerkin 混合有限元超收敛分析[J]. 计算数学, 2012, 34(3): 317-328.

[21] Liu, Y., Li, H., He, S., Gao, W. and Mu, S. (2013) A New Mixed Scheme Based on Variation of Constants for Sobolev Equation with Nonlinear Convection Term. *Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities*, **28**, 158-172. http://dx.doi.org/10.1007/s11766-013-2939-7

[22] Yu H, Sun T J, Li N. (2015) The Time Discontinuous H^1-Galerkin Mixed Finite Element Method for Linear Sobolev Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2015**, Article ID: 618258.

[23] 刘洋，李宏. 偏微分方程的非标准混合有限元方法[M]. 北京：国防工业出版社, 2015.

[24] 刘洋，李宏. 四阶强阻尼波方程的新混合元方法[J]. 计算数学, 2010, 32(2): 157-170.

[25] 刘洋，李宏，何斯日古楞，高巍，方志朝. 四阶偏抛物方程的 H^1-Galerkin 混合元方法及数值模拟[J]. 计算数学, 2012, 34(3): 259-274.