Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(1), 78-89
Published Online January 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2017.61010

The *J*-Selfadjoint Realizations of Two-Interval Forth-Order *J*-Symmetric Operators

Zhimin Zhang*, Meizhen Xu

College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
Email: *735062610@qq.com, 542789305@qq.com

Received: Jan. 2nd, 2017; accepted: Jan. 21st, 2017; published: Jan. 24th, 2017

Abstract

In this paper we characterize all *J*-selfadjoint extensions for two-interval forth-order *J*-symmetric differential operators with regular or limit endpoints by the theory of the direct sum in Hilbert spaces.

Keywords

***J*-Symmetric Differential Operators, *J*-Selfadjoint Extensions, Regular Point, limit Point, Two-Interval**

两区间四阶*J*-对称微分算子*J*-自伴扩张域的描述

张志敏*，许美珍

内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特
Email: *735062610@qq.com, 542789305@qq.com

收稿日期：2017年1月2日；录用日期：2017年1月21日；发布日期：2017年1月24日

*通讯作者。

文章引用: 张志敏, 许美珍. 两区间四阶 *J*-对称微分算子 *J*-自伴扩张域的描述[J]. 应用数学进展, 2017, 6(1): 78-89.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2017.61010

摘 要

本文利用Hilbert空间上的直和理论刻画了具有正则点和极限点的两区间四阶*J*-对称微分算子的所有*J*-自伴扩张。

关键词

***J*-对称微分算子，*J*-自伴扩张，正则点，极限点，两区间**

1. 引言

J-对称微分算子是一类特殊的有着重要应用背景的非对称微分算子，对此已经有了很多方面的研究(见[1]-[9])。在原子核物理、电磁场理论以及非均匀介质中的无线电波的传播等应用问题中，由微分算式所生成的 J-自伴微分算子是很重要的一类算子。

为了研究非对称算子的自伴扩张问题，Glazman [3]最先从数学上提出了 J-对称微分算子和 J-自伴微分算子的概念。

在 Hilbert（简称 H）空间中闭稠定算子称为 J-对称的，如果对任何 $x,y\in D(A)$，都有 $(Jx,Ay)=(JAx,y)$，其中 $D(A)$ 表示 A 的定义域。如果 A 是 J-对称的当且仅当 $A\subseteq JA^{*}J$，这里 A^{*} 是 A 的共轭算子。如果 $A=JA^{*}J$，则称 A 是 J-自伴的。

Galindo [4]和 Knowles [5]分别于 1963 年和 1980 年相继应用不同的方法给出了任何 J-对称微分算子都有 J-自伴扩张的证明。

1959 年，Zhikhar [6]在 J-对称微分算子正则域不空的情况下给出了它的部分特殊的(一端奇异) J-自伴域的边界条件的描述。1981 年，Knowles [1]在正则域不空的情况下给出了 J-对称微分算子的任一 J-自伴扩张域的边界条件的描述。但是判断一个算子正则域是否非空并不是一件容易的事，1985 年，Race [2]取消了正则域非空这一限制，得到了 J-对称微分算子的 J-自伴扩张的一般理论。1992 年，刘景麟[7]又对这种 J-自伴扩张的一般理论作了另一种完整的处理，得到 J-自伴扩张域的一种抽象的边界条件的描述。

1988 年，尚在久[8]应用 Race 的理论以及曹之江[11]和孙炯[12]的方法，取消了最小算子最小亏指数的限制，利用方程 $\tau^{+}\tau(y)=-y$ 的解给出 J-自伴扩张域的边界条件的描述，这些边界条件不仅在正则点处有限制，而且在奇异点处也有限制。1996 年，尚在久[9]给出了 J-对称微分算子 J-自伴扩张的新描述，利用方程 $\tau(y)=\lambda y$ 的解而不是更高阶方程 $\tau^{+}\tau(y)=-y$ 的解描述了 J-对称微分算子的所有 J-自伴域在奇异端点的边条件，但其假设生成的最小算子具有非空正则域。

关于对称微分算子的自伴扩张不仅在一区间上有了很好的研究成果(见[10] [11] [12])，在两区间上也有了一系列的成果。自伴微分算子在两区间的研究最早在 1986 年由 Everitt 和 Zettl 在文[13]提出。2005 年，Zettl [14]用 GKN 理论从最大定义域中选出两组向量，根据亏指数的不同分别给出自伴域的刻画。2007 年，王爱平、孙炯[15]用最大算子域中的实值向量给出了在带有适当乘数参数的 Hilbert 空间的直和框架下，二阶正则两区间实系数微分算子自伴域的描述。2007 年，孙炯、王爱平[16]等人在一个带有适当乘数参数的 Hilbert 空间下，给出了两端奇异两区间二阶实系数微分算子的所有自伴扩张的描述。2012 年，索建青[17]利用方程 $l(y)=\lambda y$ 的实参数解，先后描述了两区间一端正则一端奇异和两端奇异的自伴扩张。然而，两区间 J-自伴扩张的研究成果甚少。由于 J-对称微分算子的 J-自伴扩张与对称微分算子的自伴

扩张有很大的相似之处，因此，我们将自伴的两区间理论推广到 J -自伴的两区间理论。

本文给出四阶微分算式生成的最小算子在两区间上所有的 J -自伴扩张域的特征，其中只考虑区间端点为正则点或极限点的情形。对于两区间而言，实际上我们有两个 J -对称微分算子：M_1 定义在区间 I_1 上，M_2 定义在区间 I_2 上。一般的，区间 I_1 的右端点和区间 I_2 的左端点是否相同已不在重要，区间 I_1 和区间 I_2 是任意的两个区间，他们可能是相同的，重合的或者完全不相交的。特别的，我们定义两个微分算式生成的相应的最小算子和最大算子，并利用边界条件描述最小算子所有的 J -自伴扩张域。

2. 预备知识

引理 2.1 [2] 每个 J -对称算子都有一个 J -自伴延拓。

引理 2.2 [2] A 是一个 J -对称算子，$\bar{A}$ 是 A 的 J -对称扩张，如果 $\bar{A}$ 是 J -自伴算子，当且仅当 $\bar{A}$ 是最大的 J -对称算子。

引理 2.3 [2] (1) T_0 是闭稠定的 J -对称微分算子，且 $T_m = JT_0^*J$；

(2) 对任何 $y,z \in D(T_m)$，极限 $[y,\bar{z}]_a = \lim_{x\to a^+}[y,\bar{z}]$ 和 $[y,\bar{z}]_b = \lim_{x\to b^-}[y,\bar{z}]$ 都存在，且

$$\int_a^b \tau(y) z\mathrm{d}x = [y,\bar{z}]_a^b + \int_a^b y\tau(z)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

这里，$(\tau(y),Jz)-(y,J\tau(y)) = [y,\bar{z}]_a^b = [y,\bar{z}]_b - [y,\bar{z}]_a$；

(3) $D(T_0) = \left\{y\in D(T_m): \text{对任何 } z\in D(T_m), [y,\bar{z}]_a^b = 0\right\}$。若 a 是正则的，b 是奇异的，则

$$D(T_0) = \left\{y\in D(T_m): y^{[k]}(a) = 0, 0\le k\le 2n-1; [y,\bar{z}]_b = 0, z\in D(T_m)\right\}。 \tag{2}$$

引理 2.4 [2] (Lagrange 恒等式) 对一切 $y,z\in D(T_m)$，

$$\tau(y)z - y\tau(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y,\bar{z}], \tag{3}$$

其中，

$$[y,z] = \sum_{k=1}^{n}\left(y^{[k-1]}\bar{z}^{[2n-k]} - y^{[2n-k]}\bar{z}^{[k-1]}\right) = R(\bar{z})QC(y), \tag{4}$$

称为 Lagrange 双线性型。其中 $R(\bar{z}) = \left(\bar{z}^{[0]},\cdots,\bar{z}^{[2n-1]}\right)$，$C(y) = \left(y^{[0]},\cdots,y^{[2n-1]}\right)^{\mathrm{T}}$，且 $z^{[0]} = z$，$y^{[0]} = y$，

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & & & & & -I \\ & & & & \iddots & \\ & & & -I & & \\ & & I & & & \\ & \iddots & & & & \\ I & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

，其中，I 是单位矩阵，且 Q 有性质 $Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1} = -Q$。

引理 2.5 [1] (Naimark 补缀定理) 假定 τ 在区间 (a,b) 是正则的，令 $\alpha_s,\beta_s\in C$，$s = 0,1,\cdots,n-1$。则存在函数 $y\in D(T_m)$ 使得

$$y_1^{[s]}(a) = \alpha_s,\qquad y_1^{[s]}(b) = \beta_s,\quad s = 0,1,\cdots,n-1。$$

引理 2.6 [2] 设 $d = \operatorname{def} T_0(\tau)$，则 $D(T_m)$ 中的线性流形 D 是 T_0 的 J -自伴扩张域的充要条件是存在函数 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_d\in D(T_m)$，使得

(a) $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_d$ 模 $D(T_0)$ 线性无关；

(b) $\left[\omega_i,\bar{\omega}_j\right]_a^b=0,\quad i,j=1,2,\cdots,d$；

(c) $D=\left\{y\in D(T_m):\left[y,\bar{\omega}_j\right]_a^b=0, j=1,2,\cdots,d\right\}$。

定理 2.7 [2] 对于任意的 $y,z\in D(T_m)$，如果 τ 在点 a 是正则的，点 b 是极限点型的，且 $\operatorname{def} T_0=n$，则有 $[y,\bar{z}]_b=0$。因此，在引理 2.6 的条件(b)，(c)中，$\left[\omega_i,\bar{\omega}_j\right]_b=0$，$\left[y,\bar{\omega}_j\right]_b=0$。

3. 主要结论及证明

令 $-\infty\le a_r\le b_r\le\infty$，$I_r$ 表示以 a_r 为左端点 b_r 为右端点的区间，即 $I_r=(a_r,b_r)$，$r=1,2$。设四阶微分算式 M_r 为

$$M_r y=(p_r y'')-(h_r y')+q_r y,\quad r=1,2。\tag{5}$$

函数 $\frac{1}{p_r},h_r,q_r\in L_{loc}(I_r,C)$。

定义 M_r 在 $L^2(I_r)$ 生成的最大算子 T_{mr}，其定义域为

$$D_{mr}=\left\{y\in L^2(I_r):y^{[k]}\in AC_{loc}(I_r),k=1,2,3,M_r y\in L^2(I_r)\right\},\ r=1,2。$$

定义 T_{0r} 为微分算式 M_r 在 $L^2(I_r)$ 生成的最小算子。

设

$$H=H_1+H_2，\quad H_r=L^2(I_r),\ r=1,2。\tag{6}$$

两区间最大、最小算子域及最大、最小算子是每个区间上相应算子域和算子的直和，即

$$D_m=D(T_m)=D(T_{m1})+D(T_{m2})=D_{m1}+D_{m2}，\tag{7}$$

$$D_0=D(T_0)=D(T_{01})+D(T_{02})=D_{01}+D_{02}。\tag{8}$$

$$T_m=T_{m1}+T_{m2}=JT_{01}^*J+JT_{02}^*J=JT_0^*J，\tag{9}$$

$$T_0=T_{01}+T_{02}=JT_{m1}^*J+JT_{m2}^*J=JT_m^*J。\tag{10}$$

令 $f=\{f_1,f_2\}$，$g=\{g_1,g_2\}$ 表示空间 $H=H_1+H_2$ 中的元素，其中 $f_1,g_1\in D_1$，$f_2,g_2\in D_2$。则

$$[f,\bar{g}]=[f_1,\bar{g}_1]_1(b_1)-[f_1,\bar{g}_1]_1(a_1)+[f_2,\bar{g}_2]_2(b_2)-[f_2,\bar{g}_2]_2(a_2)。\tag{11}$$

如果 T_1 是 T_{01} 的 J-自伴扩张，T_2 是 T_{02} 的 J-自伴扩张，则 $T=T_1+T_2$ 是 T_0 的 J-自伴扩张。

引理 3.1 [12] 定义在 H 中的最小算子 T_0 是稠定的闭的 J-对称微分算子，其亏指数 $d=d_1+d_2$。其中，d_1 是 T_{01} 在空间 H_1 的亏指数，d_2 是 T_{02} 在空间 H_2 的亏指数。

引理 3.2 [1] (Naimark 补缀定理) 假定 M_r 在 I_r 上是正则的，$r=1,2$。令 $\alpha_s,\beta_s,\delta_s,\eta_s\in C$，$s=0,1,\cdots,n-1$。则存在函数 $y=\{y_1,y_2\}\in D_m$ 使得

$$y_1^{[s]}(a_1)=\alpha_s，\quad y_1^{[s]}(b_1)=\beta_s，\quad y_2^{[s]}(a_2)=\delta_s，\quad y_2^{[s]}(b_2)=\eta_s，\quad s=0,1,\cdots,n-1。$$

定理 3.3 令 $d=\operatorname{def} T_0$，D_m 中线性流形 D 是最小算子 T_0 的 J-自伴扩张域当且仅当存在函数 $\omega_1,\omega_2\cdots,\omega_d\in D_m$ 满足

(i) $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_d$ 模 D_0 线性无关；

(ii) $\left[\omega_i,\bar{\omega}_j\right]=0,\ i,j=1,2,\cdots,d$；

(iii) $D=\left\{y\in D_m:\left[y,\bar{\omega}_j\right]=0, j=1,2,\cdots,d\right\}$。

证明 这个结果是本文的基础，定理的证明与[2]的定理 4.7 相似，因此省略。

定理 3.4 设 M_r 在端点 $a_r, b_r\ (r=1,2)$ 是正则的，且 $d = \operatorname{def} T_0 = 8$，那么 D_m 中的线性流形 D 是 T_0 的 J-自伴扩张域的充要条件是存在四个 8×4 阶矩阵 A_1, B_1, A_2, B_2 满足

(a) $\operatorname{rank}(A_1, B_1, A_2, B_2) = 8$；

(b) $A_1QA_1^{\mathrm T} + A_2QA_2^{\mathrm T} = B_1QB_1^{\mathrm T} + B_2QB_2^{\mathrm T}$；

(c) $D = \left\{ y=\{y_1,y_2\}\in D_m : A_1\begin{bmatrix} y_1(a_1)\\ y_1^{[1]}(a_1)\\ y_1^{[2]}(a_1)\\ y_1^{[3]}(a_1)\end{bmatrix} + B_1\begin{bmatrix} y_1(b_1)\\ y_1^{[1]}(b_1)\\ y_1^{[2]}(b_1)\\ y_1^{[3]}(b_1)\end{bmatrix} + A_2\begin{bmatrix} y_2(a_2)\\ y_2^{[1]}(a_2)\\ y_2^{[2]}(a_2)\\ y_2^{[3]}(a_2)\end{bmatrix} + B_2\begin{bmatrix} y_2(b_2)\\ y_2^{[1]}(b_2)\\ y_2^{[2]}(b_2)\\ y_2^{[3]}(b_2)\end{bmatrix} = 0 \right\}$。

证明 必要性。设 D 是最小算子 T_0 的 J-自伴扩张域。由定理 3.3 知，存在 $\omega_1=\{\omega_{11},\omega_{12}\}$, $\omega_2=\{\omega_{21},\omega_{22}\},\cdots,\omega_8=\{\omega_{81},\omega_{82}\}\in D_m$ 满足定理 3.3 的条件(i)，(ii)，(iii)。由(4)有

$$-\left(\left[y_r,\bar\omega_{jr}\right]_r(a_r)\right)_{8\times1} = -W_r^{\mathrm T}(a_r)Q\begin{bmatrix} y_r(a_r)\\ y_r^{[1]}(a_r)\\ y_r^{[2]}(a_r)\\ y_r^{[3]}(a_r)\end{bmatrix} = W_r^{\mathrm T}(a_r)Q^{\mathrm T}\begin{bmatrix} y_r(a_r)\\ y_r^{[1]}(a_r)\\ y_r^{[2]}(a_r)\\ y_r^{[3]}(a_r)\end{bmatrix},$$

$$\left(\left[y_r,\bar\omega_{jr}\right]_r(b_r)\right)_{8\times1} = W_r^{\mathrm T}(b_r)Q\begin{bmatrix} y_r(b_r)\\ y_r^{[1]}(b_r)\\ y_r^{[2]}(b_r)\\ y_r^{[3]}(b_r)\end{bmatrix},$$

这里

$$W_r(x)=\begin{bmatrix} \omega_{1r}(x) & \omega_{2r}(x) & \cdots & \omega_{8r}(x)\\ \omega_{1r}^{[1]}(x) & \omega_{2r}^{[1]}(x) & \cdots & \omega_{8r}^{[1]}(x)\\ \omega_{1r}^{[2]}(x) & \omega_{2r}^{[2]}(x) & \cdots & \omega_{8r}^{[2]}(x)\\ \omega_{1r}^{[3]}(x) & \omega_{2r}^{[3]}(x) & \cdots & \omega_{8r}^{[3]}(x)\end{bmatrix}, r=1,2。\quad Q=\begin{bmatrix} 0&0&0&-1\\ 0&0&-1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&0&0\end{bmatrix}。$$

令

$$A_1=W_1^{\mathrm T}(a_1)Q^{\mathrm T},\quad B_1=W_1^{\mathrm T}(b_1)Q,\quad A_2=W_2^{\mathrm T}(a_2)Q^{\mathrm T},\quad B_2=W_2^{\mathrm T}(b_2)Q。$$

因此条件(iii)等价于定理 3.4 的条件(c)。

下面证明矩阵 A_1,B_1,A_2,B_2 满足定理 3.4 的条件(a)与(b)。

显然 $\operatorname{rank}(A_1,B_1,A_2,B_2)\le 8$。若 $\operatorname{rank}(A_1,B_1,A_2,B_2)<8$，则存在不全为零的数 $c_1,c_2,\cdots,c_8$ 使得

$$(c_1,c_2,\cdots,c_8)(A_1,B_1,A_2,B_2)=0。\tag{12}$$

因此

$$(c_1,c_2,\cdots,c_8)A_1=(c_1,c_2,\cdots c_8)W_1^{\mathrm T}(a_1)Q^{\mathrm T}=0,$$

$$(c_1,c_2,\cdots,c_8)B_1=(c_1,c_2,\cdots c_8)W_1^{\mathrm T}(b_1)Q=0,$$

同理

$$(c_1,c_2,\cdots,c_8)A_2=(c_1,c_2,\cdots c_8)W_2^{\mathrm T}(a_2)Q^{\mathrm T}=0,$$

$$\left(c_1,c_2,\cdots,c_8\right)B_2=\left(c_1,c_2,\cdots c_8\right)W_2^{\mathrm{T}}\left(b_2\right)Q=0\text{。}$$

由于 Q 是非奇异的，有

$$W_1\left(a_1\right)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_8\end{bmatrix}=0,\quad W_1\left(b_1\right)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_8\end{bmatrix}=0,\quad W_2\left(a_2\right)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_8\end{bmatrix}=0,\quad W_2\left(b_2\right)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_8\end{bmatrix}=0\text{。}$$

令 $f=\{f_1,f_2\}=\sum_{i=1}^{8}c_i\omega_i$，即，$f_1=\sum_{i=1}^{8}c_i\omega_{i1}$，$f_2=\sum_{i=1}^{8}c_i\omega_{i2}$，则

$$\begin{bmatrix}f_r\left(a_r\right)\\f_r^{[1]}\left(a_r\right)\\f_r^{[2]}\left(a_r\right)\\f_r^{[3]}\left(a_r\right)\end{bmatrix}=W_r\left(a_r\right)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_8\end{bmatrix}=0,\quad \begin{bmatrix}f_r\left(b_r\right)\\f_r^{[1]}\left(b_r\right)\\f_r^{[2]}\left(b_r\right)\\f_r^{[3]}\left(b_r\right)\end{bmatrix}=W_r\left(b_r\right)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_8\end{bmatrix}=0, \tag{13}$$

故由(13)与(2)有 $f_1\in D_{01}$，$f_2\in D_{02}$，所以 $f=\{f_1,f_2\}\in D_0$，这与 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_8$ 模 D_0 线性无关矛盾。

下面证明(b)。由(4)，有

$$\left(\left[\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}\right]_1\left(a_1\right)\right)_{8\times8}^{\mathrm{T}}=W_1^{\mathrm{T}}\left(a_1\right)QW_1\left(a_1\right)=W_1^{\mathrm{T}}\left(a_1\right)Q^{-1}QQW_1\left(a_1\right)=A_1QA_1^{\mathrm{T}},$$

$$\left(\left[\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}\right]_1\left(b_1\right)\right)_{8\times8}^{\mathrm{T}}=W_1^{\mathrm{T}}\left(b_1\right)QW_1\left(b_1\right)=W_1^{\mathrm{T}}\left(b_1\right)QQQ^{-1}W_1\left(b_1\right)=B_1QB_1^{\mathrm{T}},$$

$$\left(\left[\omega_{i2},\bar{\omega}_{j2}\right]_2\left(a_2\right)\right)_{8\times8}^{\mathrm{T}}=W_2^{\mathrm{T}}\left(a_2\right)QW_2\left(a_2\right)=W_2^{\mathrm{T}}\left(a_2\right)Q^{-1}QQW_2\left(a_2\right)=A_2QA_2^{\mathrm{T}},$$

$$\left(\left[\omega_{i2},\bar{\omega}_{j2}\right]_2\left(b_2\right)\right)_{8\times8}^{\mathrm{T}}=W_2^{\mathrm{T}}\left(b_2\right)QW_2\left(b_2\right)=W_2^{\mathrm{T}}\left(b_2\right)QQQ^{-1}W_2\left(b_2\right)=B_2QB_2^{\mathrm{T}},$$

$i,j=1,2,\cdots,8$。因此定理 3.3 的条件(ii)等价于

$$B_1QB_1^{\mathrm{T}}-A_1QA_1^{\mathrm{T}}+B_2QB_2^{\mathrm{T}}-A_2QA_2^{\mathrm{T}}=0,\ \text{即}\ A_1QA_1^{\mathrm{T}}+A_2QA_2^{\mathrm{T}}=B_1QB_1^{\mathrm{T}}+B_2QB_2^{\mathrm{T}}\text{。}$$

充分性。设矩阵 A_1,B_1,A_2,B_2 满足条件(a)与(b)。下面证明由(c)定义的 D 是 T_0 的 J -自伴扩张域。令

$$QA_1^{T}=\left(a_{ij}\right)_{4\times8},\quad QB_1^{\mathrm{T}}=\left(b_{ij}\right)_{4\times8},\quad QA_2^{\mathrm{T}}=\left(c_{ij}\right)_{4\times8},\quad QA_1^{\mathrm{T}}=\left(a_{ij}\right)_{4\times8}\text{。} \tag{14}$$

由引理 3.2，选择函数 $\omega_1=\{\omega_{11},\omega_{12}\},\omega_2=\{\omega_{21},\omega_{22}\},\cdots,\omega_8=\{\omega_{81},\omega_{82}\}$ 属于 D_m 使得

$$-\omega_{i1}^{[j-1]}\left(a_1\right)=a_{ij},\quad \omega_{i1}^{[j-1]}\left(b_1\right)=b_{ij},\quad -\omega_{i2}^{[j-1]}\left(a_2\right)=c_{ij},\quad \omega_{i2}^{[j-1]}\left(a_2\right)=d_{ij}, \tag{15}$$

其中，$i=1,2,\cdots,8$，$j=1,2,3,4$。

由(14)与(4)，有

$$-A_1\begin{bmatrix}y_1\left(a_1\right)\\y_1^{[1]}\left(a_1\right)\\y_1^{[2]}\left(a_1\right)\\y_1^{[3]}\left(a_1\right)\end{bmatrix}=-\left(a_{ij}\right)_{8\times4}^{\mathrm{T}}Q\begin{bmatrix}y_1\left(a_1\right)\\y_1^{[1]}\left(a_1\right)\\y_1^{[2]}\left(a_1\right)\\y_1^{[3]}\left(a_1\right)\end{bmatrix}=W_1^{\mathrm{T}}\left(a_1\right)Q\begin{bmatrix}y_1\left(a_1\right)\\y_1^{[1]}\left(a_1\right)\\y_1^{[2]}\left(a_1\right)\\y_1^{[3]}\left(a_1\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left[y_1,\bar{\omega}_{11}\right]_1\left(a_1\right)\\\left[y_1,\bar{\omega}_{21}\right]_1\left(a_1\right)\\\vdots\\\left[y_1,\bar{\omega}_{81}\right]_1\left(a_1\right)\end{bmatrix},$$

$$B_1\begin{bmatrix} y_1(b_1) \\ y_1^{[1]}(b_1) \\ y_1^{[2]}(b_1) \\ y_1^{[3]}(b_1) \end{bmatrix} = (b_{ij})_{8\times 4}^T Q \begin{bmatrix} y_1(b_1) \\ y_1^{[1]}(b_1) \\ y_1^{[2]}(b_1) \\ y_1^{[3]}(b_1) \end{bmatrix} = W_1^T(b_1) Q \begin{bmatrix} y_1(b_1) \\ y_1^{[1]}(b_1) \\ y_1^{[2]}(b_1) \\ y_1^{[3]}(b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y_1,\bar{\omega}_{11}]_1(b_1) \\ [y_1,\bar{\omega}_{21}]_1(b_1) \\ \vdots \\ [y_1,\bar{\omega}_{81}]_1(b_1) \end{bmatrix},$$

同理

$$-A_2\begin{bmatrix} y_2(a_2) \\ y_2^{[1]}(a_2) \\ y_2^{[2]}(a_2) \\ y_2^{[3]}(a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y_2,\bar{\omega}_{11}]_2(a_2) \\ [y_2,\bar{\omega}_{21}]_2(a_2) \\ \vdots \\ [y_2,\bar{\omega}_{81}]_2(a_2) \end{bmatrix}, \quad B_2\begin{bmatrix} y_2(b_2) \\ y_2^{[1]}(b_2) \\ y_2^{[2]}(b_2) \\ y_2^{[3]}(b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y_2,\bar{\omega}_{11}]_2(b_2) \\ [y_2,\bar{\omega}_{21}]_2(b_2) \\ \vdots \\ [y_2,\bar{\omega}_{81}]_2(b_2) \end{bmatrix}。$$

故条件(c)转化为边界条件(iii)，即

$$[y_1,\bar{\omega}_{i1}]_1(b_1) - [y_1,\bar{\omega}_{i2}]_1(a_1) + [y_2,\bar{\omega}_{i2}]_2(b_2) - [y_2,\bar{\omega}_{i2}]_2(a_2) = 0，\quad i = 1,2,\cdots,8。$$

最后证明 $\omega_i, i = 1,2,\cdots,8$ 满足定理 3.3 的条件(i)与(ii)。

用反证法证明条件(i)成立。如若不然，那么存在不全为零的数 $h_1,h_2,\cdots,h_8$ 使得

$$\gamma = \sum_{i=1}^{8} h_i\omega_i \in D_0，\text{ 即 } \gamma_1 = \sum_{i=1}^{8} h_i\omega_{i1} \in D_{01}，\quad \gamma_2 = \sum_{i=1}^{8} h_i\omega_{i2} \in D_{02}。$$

因此

$$\begin{bmatrix} \gamma_1(a_1) \\ \gamma_1^{[1]}(a_1) \\ \gamma_1^{[2]}(a_1) \\ \gamma_1^{[3]}(a_1) \end{bmatrix} = -(a_{ij})_{4\times 8}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_8 \end{bmatrix} = -QA_1^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

则 $(h_1,h_2,\cdots,h_8)(a_{ij})_{8\times 4}^{\mathrm{T}} = (h_1,h_2,\cdots,h_8)A_1Q^{\mathrm{T}} = 0$，由于 $\operatorname{rank}Q^{\mathrm{T}} \neq 0$，于是

$$(h_1,h_2,\cdots,h_8)A_1 = 0,\quad (h_1,h_2,\cdots,h_8)B_1 = 0，$$

$$(h_1,h_2,\cdots,h_8)A_2 = 0,\quad (h_1,h_2,\cdots,h_8)B_2 = 0。$$

所以 $(h_1,h_2,\cdots,h_8)(A_1,B_1,A_2,B_2) = 0$，这与 $\operatorname{rank}(A_1,B_1,A_2,B_2) = 8$ 矛盾。

下面证明条件(ii)成立。由(14)和(15)有

$$\begin{aligned}\left([\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}]_1(a_1)\right)_{8\times 8} &= W_1^{\mathrm{T}}(a_1)QW_1(a_1) \\ &= \left[-(a_{ij})\right]_{8\times 4}^{\mathrm{T}} Q\left[-(a_{ij})\right]_{4\times 8} \\ &= A_1Q^{-1}QQA_1^{\mathrm{T}} \\ &= A_1QA_1^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left([\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}]_1(b_1)\right)_{8\times 8} &= W_1^{\mathrm{T}}(b_1)QW_1(b_1) \\ &= (b_{ij})_{8\times 4}^{\mathrm{T}} Q(b_{ij})_{4\times 8} \\ &= B_1Q^{-1}QQB_1^{\mathrm{T}} \\ &= B_1QB_1^{\mathrm{T}}，\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\left(\left[\omega_{i2},\bar{\omega}_{j2}\right]_2(a_2)\right)_{8\times8} &= W_2^{\mathrm{T}}(a_2)QW_2(a_2)\\ &= \left[-(c_{ij})\right]_{8\times4}^{\mathrm{T}} Q\left[-(c_{ij})\right]_{4\times8}\\ &= A_2Q^{-1}QQA_2^{\mathrm{T}}\\ &= A_2QA_2^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\left[\omega_{i2},\bar{\omega}_{j2}\right]_2(b_2)\right)_{8\times8} &= W_2^{\mathrm{T}}(b_2)QW_2(b_2)\\ &= (d_{ij})_{8\times4}^{\mathrm{T}} Q(d_{ij})_{4\times8}\\ &= B_2Q^{-1}QQB_2^{\mathrm{T}}\\ &= B_2QB_2^{\mathrm{T}}。\end{aligned}$$

所以，由条件(b)得

$$\begin{aligned}&\left(\left[\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}\right]_1(b_1)-\left[\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}\right]_1(a_1)+\left[\omega_{i2},\bar{\omega}_{j2}\right]_2(b_2)-\left[\omega_{i2},\bar{\omega}_{j2}\right]_2(a_2)\right)_{8\times8}\\ &= B_1QB_1^{\mathrm{T}}-A_1QA_1^{\mathrm{T}}+B_2QB_2^{\mathrm{T}}-A_2QA_2^{\mathrm{T}}=0。\end{aligned}$$

于是由定理 3.3 得 D 是 T_0 的 J -自伴扩张域。

定理 3.4 给出了最小算子的 J -自伴扩张域边界条件耦合的情况，其条件(c)等价于

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{4}a_{jk}y_1^{[k-1]}(a_1)+\sum_{k=1}^{4}b_{jk}y_1^{[k-1]}(b_1)+\sum_{k=1}^{4}c_{jk}y_2^{[k-1]}(a_2)\\ &+\sum_{k=1}^{4}d_{jk}y_2^{[k-1]}(b_2)=0,\ \ j=1,2,\cdots,8。\end{aligned} \tag{16}$$

条件(b)等价于

$$\begin{aligned}&\sum_{v=1}^{2}a_{jv}a_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}a_{j4-v+1}a_{kv}+\sum_{v=1}^{2}c_{jv}c_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}c_{j4-v+1}c_{kv}\\ &=\sum_{v=1}^{2}b_{jv}b_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}b_{j4-v+1}b_{kv}+\sum_{v=1}^{2}d_{jv}d_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}d_{j4-v+1}d_{kv},\\ &\qquad j,k=1,2,\cdots,8。\end{aligned} \tag{17}$$

区间 I_1 和 I_2 可以有不同的关系，如相同、重合、分离；于是，考虑区间四个端点的关系，讨论如下

(1) 区间四个端点中任意一个点与其他三个点分离，此时区间 I_1 和 I_2 是不分离的假设 b_2 点被分离，选择

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=0,\quad j=7,8；$$

$$d_{j1}=d_{j2}=d_{j3}=d_{j4}=0,\ \ j=1,2,3,4,5,6。$$

则边界条件(16)转化为

$$\sum_{k=1}^{4}a_{jk}y_1^{[k-1]}(a_1)+\sum_{k=1}^{4}b_{jk}y_1^{[k-1]}(b_1)+\sum_{k=1}^{4}c_{jk}y_2^{[k-1]}(a_2)=0,\ \ j=1,2,\cdots,6, \tag{18}$$

$$d_{71}y_2(b_2)+d_{72}y_2^{[1]}(b_2)+d_{73}y_2^{[2]}(b_2)+d_{74}y_2^{[3]}(b_2)=0, \tag{19}$$

$$d_{81}y_2(b_2)+d_{82}y_2^{[1]}(b_2)+d_{83}y_2^{[2]}(b_2)+d_{84}y_2^{[3]}(b_2)=0。 \tag{20}$$

判定 J -自伴性的边界条件(17)转化为

$$\begin{gathered}\sum_{v=1}^{2}a_{jv}a_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}a_{j4-v+1}a_{kv}+\sum_{v=1}^{2}c_{jv}c_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}c_{j4-v+1}c_{kv}\\=\sum_{v=1}^{2}b_{jv}b_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}b_{j4-v+1}b_{kv},\qquad j,k=1,2,\cdots,6,\end{gathered}\tag{21}$$

$$d_{71}d_{84}+d_{72}d_{83}-d_{73}d_{82}-d_{74}d_{81}=0。\tag{22}$$

(2) 区间四个端点中任意两个点分离。

(i) 区间 I_1 和 I_2 是不分离的。假设 b_1 与 b_2 是分离的，选择

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=0,\ \ j=3,4,7,8；$$

$$b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=0,\ \ j=1,2,5,6,7,8；$$

$$d_{j1}=d_{j2}=d_{j3}=d_{j4}=0,\ \ j=1,2,3,4,5,6。$$

边界条件(16)转化为(19)和(20)以及

$$\sum_{k=1}^{4}a_{jk}y_1^{[k-1]}(a_1)+\sum_{k=1}^{4}c_{jk}y_2^{[k-1]}(a_2)=0,\ \ j=1,2,5,6,\tag{23}$$

$$b_{31}y_1(b_1)+b_{32}y_1^{[1]}(b_1)+b_{33}y_1^{[2]}(b_1)+b_{34}y_1^{[3]}(b_1)=0,\tag{24}$$

$$b_{41}y_1(b_1)+b_{42}y_1^{[1]}(b_1)+b_{43}y_1^{[2]}(b_1)+b_{44}y_1^{[3]}(b_1)=0。\tag{25}$$

判定 J -自伴性的边界条件(17)转化为(22)以及

$$\sum_{v=1}^{2}a_{jv}a_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}a_{j4-v+1}a_{kv}+\sum_{v=1}^{2}c_{jv}c_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}c_{j4-v+1}c_{kv}=0,\quad j,k=1,2,5,6,\tag{26}$$

$$b_{31}b_{44}+b_{32}b_{43}-b_{33}b_{42}-b_{34}b_{41}=0。\tag{27}$$

(ii) 区间 I_1 和 I_2 是分离的。假设 a_2 与 b_2 是分离的，选择

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=0,\ \ j=5,6,7,8；$$

$$c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=0,\quad j=1,2,3,4,7,8；$$

$$d_{j1}=d_{j2}=d_{j3}=d_{j4}=0,\ \ j=1,2,3,4,5,6。$$

边界条件(16)转化为(19)和(20)以及

$$\sum_{k=1}^{4}a_{jk}y_1^{[k-1]}(a_1)+\sum_{k=1}^{4}b_{jk}y_1^{[k-1]}(b_1)=0,\ \ j=1,2,3,4,\tag{28}$$

$$c_{51}y_2(a_2)+c_{52}y_2^{[1]}(a_2)+c_{53}y_2^{[2]}(a_2)+c_{54}y_2^{[3]}(a_2)=0,\tag{29}$$

$$c_{61}y_2(a_2)+c_{62}y_2^{[1]}(a_2)+c_{63}y_2^{[2]}(a_2)+c_{64}y_2^{[3]}(a_2)=0。\tag{30}$$

判定 J -自伴性的边界条件(17)转化为(22)以及

$$\sum_{v=1}^{2}a_{jv}a_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}a_{j4-v+1}a_{kv}=\sum_{v=1}^{2}b_{jv}b_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}b_{j4-v+1}b_{kv},\ \ j,k=1,2,3,4,\tag{31}$$

$$c_{51}c_{64}+c_{52}c_{63}-c_{53}c_{62}-c_{54}c_{61}=0。\tag{32}$$

(3) 区间四个端点都是分离的，此时区间 I_1 和 I_2 是分离的。选择

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=0,\quad j=3,4,5,6,7,8；$$

$$b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=0,\quad j=1,2,5,6,7,8\text{；}$$

$$c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=0,\quad j=1,2,3,4,7,8\text{；}$$

$$d_{j1}=d_{j2}=d_{j3}=d_{j4}=0,\quad j=1,2,3,4,5,6\text{。}$$

边界条件(16)转化为(19)，(20)，(24)，(25)和(29)，(30)以及

$$a_{11}y_1(a_1)+a_{12}y_1^{[1]}(a_1)+a_{13}y_1^{[2]}(a_1)+a_{14}y_1^{[3]}(a_1)=0\text{，}\tag{33}$$

$$a_{21}y_1(a_1)+a_{22}y_1^{[1]}(a_1)+a_{23}y_1^{[2]}(a_1)+a_{24}y_1^{[3]}(a_1)=0\text{。}\tag{34}$$

判定 J -自伴性的边界条件(17)转化为(22)，(27)和(32)以及

$$a_{11}a_{24}+a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}-a_{14}a_{21}=0\text{。}\tag{35}$$

(4) 区间四个端点中任意两个点耦合，另外两个点也是耦合的。

(i) 区间 I_1 和 I_2 是不分离的。假设 a_1 与 b_2 是耦合的， b_1 与 a_2 是耦合的，选择

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=d_{j1}=d_{j2}=d_{j3}=d_{j4}=0,\ j=1,2,3,4\text{；}$$

$$b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=0,\ j=5,6,7,8\text{。}$$

边界条件(16)转化为

$$\sum_{k=1}^{4}b_{jk}y_1^{[k-1]}(b_1)+\sum_{k=1}^{4}c_{jk}y_2^{[k-1]}(a_2)=0,\ j=1,2,3,4\text{，}\tag{36}$$

$$\sum_{k=1}^{4}a_{jk}y_1^{[k-1]}(a_1)+\sum_{k=1}^{4}d_{jk}y_2^{[k-1]}(b_2)=0,\ j=5,6,7,8\text{。}\tag{37}$$

判定 J -自伴性的边界条件(17)转化为

$$\sum_{v=1}^{2}b_{jv}b_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}b_{j4-v+1}b_{kv}=\sum_{v=1}^{2}c_{jv}c_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}c_{j4-v+1}c_{kv},\quad j,k=1,2,3,4\text{，}\tag{38}$$

$$\sum_{v=1}^{2}a_{jv}a_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}a_{j4-v+1}a_{kv}=\sum_{v=1}^{2}d_{jv}d_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}d_{j4-v+1}d_{kv},\ j,k=5,6,7,8\text{。}\tag{39}$$

(ii) 区间 I_1 和 I_2 是分离的。假设 a_1 与 b_1 是耦合的， a_2 与 b_2 是耦合的，选择

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=0,\ j=5,6,7,8\text{；}$$

$$c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=d_{j1}=d_{j2}=d_{j3}=d_{j4}=0,\ j=1,2,3,4\text{。}$$

边界条件(16)转化为(28)以及

$$\sum_{k=1}^{4}c_{jk}y_2^{[k-1]}(a_2)+\sum_{k=1}^{4}d_{jk}y_2^{[k-1]}(b_2)=0,\ j=5,6,7,8\text{。}\tag{40}$$

判定 J -自伴性的边界条件(17)转化为(31)以及

$$\sum_{v=1}^{2}c_{jv}c_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}c_{j4-v+1}c_{kv}=\sum_{v=1}^{2}d_{jv}d_{k4-v+1}-\sum_{v=1}^{2}d_{j4-v+1}d_{kv},\ j,k=5,6,7,8\text{。}\tag{41}$$

定理 3.4 给出了亏指数为 8 的最小算子的 J -自伴扩张域的描述，并讨论了 J -自伴算子边界条件分离与耦合的情形。根据两区间正则点和极限点的个数可将最小算子 T_0 的亏指数取 0，2，4，6。并可根据亏指数的不同，在正则情况下分析 J -自伴算子边界条件分离与耦合的情况。讨论如下

1. 当区间四个端点都为极限点时，最小算子 T_0 的亏指数 $d=0$，此时 T_0 是本身的 J -自伴扩张。

2. 当区间端点有三个点是极限点，一个点是正则点时，$d=2$。此时归纳为一区间的 J-自伴扩张域的描述，边界条件只在正则点处有限制。假设 a_1 是正则点，其他情形和这种完全类似。

设 $y=\{y_1,y_2\}$，$\omega_j=\{\omega_{j1},\omega_{j2}\}$，$j=1,2$。于是定理 3.3 可归纳为

(a) ω_1,ω_2 模 D_0 线性无关；

(b) $\left[\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}\right]_1(a_1)=0,\quad i,j=1,2$；

(c) $D=\left\{y\in D_m:\left[y_1,\bar{\omega}_{j1}\right]_1(a_1)=0,\ j=1,2\right\}$。

3. 当区间端点有两个点是极限点，两个点是正则点时，$d=4$。这时有以下两种情况

(1) 两个正则点在同一个区间上，故 $d_1=\operatorname{def}T_{01}=0$，$d_2=\operatorname{def}T_{02}=4$。假设 I_2 是正则区间，T_2 为 T_{02} 的 J-自伴扩张，则最小算子 T_0 在两区间的 J-自伴扩张为 $T=T_{01}+T_2$。

(2) 两个正则点不在同一个区间上，故 $d_1=2$，$d_2=2$。假设 a_1,b_2 是极限点，b_1,a_2 是正则点。其他情形和这种完全类似。

设 $y=\{y_1,y_2\}$，$\omega_j=\{\omega_{j1},\omega_{j2}\}$，$j=1,2,3,4$。于是定理 3.3 可归纳为

(a) $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ 模 D_0 线性无关；

(b) $\left[\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}\right]_1(b_1)-\left[\omega_{i2},\bar{\omega}_{j2}\right]_2(a_2)=0,\ i,j=1,2,3,4$；

(c) $D=\left\{y\in D_m:\left[y_1,\bar{\omega}_{j1}\right]_1(b_1)-\left[y_2,\bar{\omega}_{j2}\right]_2(a_2)=0,\ j=1,2,3,4\right\}$。

因此，条件(c)就等价于(36)的四个等式，条件(b)就等价于(38)的六个等式，条件(a)说明 $\left(b_{j1},b_{j2},b_{j3},b_{j4},c_{j1},c_{j2},c_{j3},c_{j4}\right)$，$j=1,2,3,4$ 线性无关。

4. 当区间端点有一个点是极限点，三个点是正则点时，$d=6$。那么一个区间的两个端点都为正则点，另一个区间一个端点为正则点一个端点为极限点。假设 a_1,b_1,a_2 是正则点，b_2 是极限点，所以，$d=4$，$d_2=2$。其他情形和这种完全类似。

设 $y=\{y_1,y_2\}$，$\omega_j=\{\omega_{j1},\omega_{j2}\}$，$j=1,2,\cdots,6$。于是定理 3.3 可归纳为

(a) $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6$ 模 D_0 线性无关；

(b) $\left[\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}\right]_1(b_1)-\left[\omega_{i1},\bar{\omega}_{j1}\right]_1(a_1)-\left[\omega_{i2},\bar{\omega}_{j2}\right]_2(a_2)=0,\ i,j=1,2,\cdots,6$；

(c) $D=\left\{y\in D_m:\left[y_1,\bar{\omega}_{j1}\right]_1(b_1)-\left[y_1,\bar{\omega}_{j1}\right]_1(a_1)-\left[y_2,\bar{\omega}_{j2}\right]_2(a_2)=0,\ j=1,2,\cdots,6\right\}$。

因此，条件(c)就等价于等式(18)，条件(b)等价于(21)，条件(a)说明 $\left(a_{j1},a_{j2},a_{j3},a_{j4},b_{j1},b_{j2},b_{j3},b_{j4},c_{j1},c_{j2},c_{j3},c_{j4}\right)$，$j=1,2,\cdots,6$ 线性无关。

等式(18)描述了 a_1,b_1,a_2 点边界条件耦合的情形，但边界条件在区间 I_1 和 I_2 可能是分离的，也可能是不分离的。

(1) 区间 I_1 和 I_2 是分离的，选择

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=0,\ \ j=5,6；$$

$$c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=0,\quad j=1,2,3,4。$$

(18)的六个边界条件转化为(28)-(30)，判定 J-自伴性的边界条件(21)转化为(31)和(32)。这种情形讨论了边界条件在 a_1 点和 b_1 点耦合与 a_2 点分离的情况，还有一种比较特殊的情形，即边界条件在三个点是分离的。令

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=0,\ \ j=3,4,5,6；$$

$$b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=0,\ \ j=1,2,5,6；$$

$$c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=0,\ \ j=1,2,3,4\text{。}$$

(18)的六个边界条件转化为(24)，(25)，(29)，(30)，(33)和(34)，判定 J -自伴性的边界条件(21)转化为(27)，(32)和(35)。

(2) 区间 I_1 和 I_2 是不分离的，选择

$$a_{j1}=a_{j2}=a_{j3}=a_{j4}=c_{j1}=c_{j2}=c_{j3}=c_{j4}=0,\ \ j=3,4\text{；}$$

$$b_{j1}=b_{j2}=b_{j3}=b_{j4}=0,\ \ j=1,2,5,6\text{。}$$

(18)的六个边界条件转化为(23)~(25)，判定 J -自伴性的边界条件(21)转化为(26)和(27)。

基金项目

国家自然科学基金(11361039, 11561051)；国家青年基金(11301259)。

参考文献 (References)

[1] Knowles, I. (1981) On the Boundary Conditions Characterizing J-Selfadjoint Extensions of J-Symmetric Operators. *Journal of Differential Equations*, **40**, 193-216. https://doi.org/10.1016/0022-0396(81)90018-8

[2] Race, D. (1985) The Theory of J-Selfadjoint Extensions of J-Symmetric Operators. *Journal of Differential Equations*, **57**, 258-274. https://doi.org/10.1016/0022-0396(85)90080-4

[3] Glazman, I.M. (1957) An Analogue of the Extension Theory of Hermitian Operators and a Non-Symmetric One-Dimensional Boundary Problem on a Half-Axis. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **115**, 214-216.

[4] Galindo, A. (1962) On the Existence of J-Selfadjoint Extensions of J-Symmetric Operators with Adjoint. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **15**, 423-425. https://doi.org/10.1002/cpa.3160150405

[5] Knowles, I. (1980) On J-Selfadjoint Extensions of J-Symmetric Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **79**, 42-44. https://doi.org/10.2307/2042383

[6] Zhikhar, N.A. (1959) The Theory of Extensions of J-Symmetric Operators. *Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal*, **11**, 352-364.

[7] 刘景麟. 关于 J-对称算子的自伴延拓[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 1992, 23(3): 312-316.

[8] Shang, Z. (1988) On J-Selfadjoint Extensions of J-Symmetric Ordinary Differential Operators. *Journal of Differential Equations*, **73**, 153-177. https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90123-4

[9] 尚在久. 关于 J-对称微分算子的 J-自伴扩张的若干注记[J]. 数学学报, 1996, 39(3): 387-395.

[10] Naimark, M.A. (1954) Linear Differential Operators. GITTI, Moscow.

[11] Cao, Z. (1985) On Self-Adjoint Extensions of n-th Order Differential Operators in the Limit Circle Case. *Acta Mathematocs Sinica*, **28**, 205-217.

[12] Sun, J. (1986) On the Self-Adjoint Extensions of Symmetric Ordinary Differential Operators with Middle Deficiency Indices. *Acta Mathematica Sinica*, **2**, 152-167. https://doi.org/10.1007/BF02564877

[13] Everitt, W.N. and Zettl, A. (1986) Sturm-Liouville Differential Operators in Direct Sum Spaces. Rocky Mountain *Journal of Mathematics*, **16**, 497-516. https://doi.org/10.1216/RMJ-1986-16-3-497

[14] Zettl, A. (2005) Sturm-Liouville Theory. American Mathematical Society.

[15] Wang, A., Sun, J. and Zettl, A. (2007) Two-Interval Sturm-Liouville Operators in Modified Hilbert Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **328**, 390-399. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.05.058

[16] Sun, J., Wang, A. and Zettl, A. (2007) Two-Interval Sturm-Liouville Operators in Direct Sum Spaces with Inner Product Multiples. *Results in Mathematics*, **50**, 155-168. https://doi.org/10.1007/s00025-006-0241-1

[17] Suo, J. and Wang, W. (2012) Two-Interval Even Order Differential Operators in Direct Sum Spaces. *Results in Mathematics*, **62**, 13-32. https://doi.org/10.1007/s00025-011-0126-9