Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(1), 90-103
Published Online January 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2017.61011

Convergence Analysis of the Two-Step Combined Method for Solving Nonlinear Operator Equations

Weidi Wu, Weiping Shen, Lihua Xu

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 1570398202@qq.com, shenweiping@zjnu.cn, 792612569@qq.com

Received: Jan. 3rd, 2017; accepted: Jan. 21st, 2017; published: Jan. 24th, 2017

Abstract

In this paper, we consider the convergence of the two-step combined method for solving nonlinear operator equations. A semi-local convergence of the method is presented under some continuity conditions. Moreover, we establish the uniqueness result of the solutions. Finally, a numerical example is provided to demonstrate our theoretical results.

Keywords

Semi-Local Convergence, Two-Step Combined Method, Divided Differences

求解非线性算子方程的两步组合方法的收敛性分析

吴伟笛，沈卫平，徐丽华

浙江师范大学数学系，浙江 金华
Email: 1570398202@qq.com, shenweiping@zjnu.cn, 792612569@qq.com

收稿日期：2017年1月3日；录用日期：2017年1月21日；发布日期：2017年1月24日

文章引用: 吴伟笛，沈卫平，徐丽华. 求解非线性算子方程的两步组合方法的收敛性分析[J]. 应用数学进展，2017, 6(1): 90-103. http://dx.doi.org/10.12677/aam.2017.61011

摘　要

本文考虑求解非线性方程问题的两步组合方法的收敛性。在某些连续性条件下，我们给出了该方法的半局部收敛性。另外对算子方程的解的唯一性也做出了说明。最后通过数值例子来说明收敛性分析的有效性。

关键词

半局部收敛性，两步组合方法，差商

1. 引言

设 X 与 Y 为 Banach 空间，且 D 为 X 中的一开凸子集。考虑非线性算子方程

$$F(x)=0 \tag{1}$$

其中，F 为定义在 D 上的一个非线性算子。

众所周知，牛顿法是求解方程(1)的最著名的方法之一。其中，文献[1]及[2]研究了在算子 F 的一阶导数满足 Lipschitz 条件下牛顿法的平方收敛性结果。

在文章[3]中，M. Bartish 首次提出了两步修正牛顿法：

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\left[F'\left(\dfrac{x_n+y_n}{2}\right)\right]^{-1}F(x_n) \\ y_{n+1}=x_{n+1}-\left[F'\left(\dfrac{x_n+y_n}{2}\right)\right]^{-1}F(x_{n+1}) \end{cases} \text{对任意的 } n=0,1,\cdots. \tag{2}$$

并且在康托洛维奇型条件下给出了该算法的半局部收敛性。这里，x_0，y_0 为给定的初始值。此外，文章[4] [5] [6] [7] [8]对该算法及其收敛性也做了一定的研究。

同样，通过引入了差商的定义，M. Bartish 在文章[3]中给出了不同于(2)的如下两步算法来求解方程(1)：

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\left[\delta F(x_n,y_n)\right]^{-1}F(x_n) \\ y_{n+1}=x_{n+1}-\left[\delta F(x_n,y_n)\right]^{-1}F(x_{n+1}) \end{cases} \text{对任意的 } n=0,1,\cdots. \tag{3}$$

这里，x_0，y_0 为给定的初始值，δF 为由 X 到 Y 的有界线性算子。很多学者对算法(3)的收敛性也作出了一定的研究。例如，文[9]在相对弱的康托洛维奇条件下对算法(3)的半局部收敛性进行了研究。再如，类似[10] [11] [12]中古典割线法的收敛条件，S. M. Shakhno 研究了仅在 Hölder 条件下算法(3)的收敛性问题。又如，文章[13]与[14]给出了二阶均差满足 Lipschitz 条件下该方法的收敛性定理。另外，文章[15]及[16]也对算法(3)的收敛性进行了研究。特别地，当算子 F 满足下列条件时：

$$\left\|A_0^{-1}\left(\delta F(x,y)-\delta F(u,v)\right)\right\|\le p_0\left(\|x-y\|^{\alpha}+\|u-v\|^{\alpha}\right), \tag{4}$$

文章[16]给出了算法(3)的半局部收敛性以及方程(1)的解的唯一性。这里，$\alpha\in(0,1]$，$A_0=\delta F(x_0\cdot y_0)$。

下面，我们考虑非线性算子方程

$$H(x)\equiv F(x)+G(x)=0. \tag{5}$$

这里，F,G 均为定义在 D 上的非线性算子。F 为 Fréchet 可微算子，G 为连续算子。最近，S. M.

Shakhno 等通过结合算法(2)与(3)在文章[17]中首次提出了下列两步组合方法用于求解方程(5)：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \left[F'\left(\dfrac{x_n + y_n}{2}\right) + \delta G(x_n, y_n)\right]^{-1}\left[F(x_n) + G(x_n)\right] \\ y_{n+1} = x_{n+1} - \left[F'\left(\dfrac{x_n + y_n}{2}\right) + \delta G(x_n, y_n)\right]^{-1}\left[F(x_{n+1}) + G(x_{n+1})\right] \end{cases} \text{对任意的 } n = 0,1,\cdots. \tag{6}$$

其中，x_0, y_0 为给定的初始值。文章[18]通过假设 F, G 满足带有积分形式的 Lipschitz 条件，给出该算法的局部收敛性结果，并且证明了它的收敛阶为 $1+\sqrt{2}$ 。

在这篇文章中，我们讨论用于求解方程(5)的两步组合方法的半局部收敛性问题。当算子 F 的一阶 F-导数满足 Lipschitz 条件，二阶导数满足 Hölder 条件以及算子 G 的差商满足 Hölder 条件下，我们给出了该方法的收敛性定理， 并证明了解的唯一性。另外，在最后一节中，我们还给出了一个数值例子来说明我们理论结果。

2. 定义与引理

本节中，我们给出一些基本的定义及引理。

定义 1 [16]假设 δG 表示由 X 到 Y 的一个线性算子。设 $x, y \in D$，若 $\delta G(x, y)$ 满足条件：

$$\delta G(x, y)(x - y) = G(x) - G(y). \tag{7}$$

则称 $\delta G(x, y)$ 为在点 x, y 的差商。

引理 2 (Banach 引理[19]) 设 $F: X \to Y$ 的有界线性算子，$I: X \to Y$ 且为单位算子，若 $\|F - I\| < 1$, 则 F 为可逆的且有

$$\|F^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|F - I\|}.$$

引理 3 [8]已知 $k \in N$，$\alpha \in (0,1]$。设 $C^{2,\alpha}(D)$ 表示所有连续可微的且二阶导数 Hölder 连续的全体算子。假设(1) $F \in C^{2,\alpha}(D)$。

(2) $\forall x \in D, F'(x)$ 可逆且存在非负数 M 使得 $\sup\limits_{x \in D}\left\|F'(x)^{-1}\right\| \le M$.

(3) $\forall x, y \in D,\ h \in X$，

$$\|F'(x) - F'(y)\| \le L_1\|x - y\|.$$
$$\|F''(x)h - F''(y)h\| \le L_2\|x - y\|^{\alpha}\|h\|.$$

则有

$$\begin{aligned} &F(x) - F(y) - F'\left(\frac{x+y}{2}\right)(x - y) \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1\left[(1-t)\left(F''\left(\frac{x+y}{2} + \frac{t}{2}(x-y)\right) - F''\left(\frac{x+y}{2} + \frac{t}{2}(y-x)\right)\right)\right](x-y)(x-y)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

3. 半局部收敛性定理

下面，我们建立两步组合方法的半局部收敛性定理。在下面的讨论中，我们令 $U(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| \le r\}$ 表示以 x_0 为中心以 r 为半径的闭球。假设算子 F 的一阶 F-导数 F' 和二阶 F'-导数 F''，以及算子 G 的差商 δG 均存在。设 x_0, y_0 为 D 中的两点。令 $p \equiv \|x_0 - y_0\|$, $q \equiv \left\|A_0^{-1}H(x_0)\right\|$. 其中 $A_0 \equiv F'\left(\dfrac{x_0 + y_0}{2}\right) + \delta G(x_0 \cdot y_0)$.

定理 1 假设(1)算子 A_0 可逆；

(2)存在非负常数 a_0, b_0, c_0 及 $\alpha, \beta \in (0,1]$，使得对 $\forall x, y \in D$，下列条件成立：

$$\left\| A_0^{-1}\left(F'(x) - F'(y)\right)\right\| \le a_0 \|x - y\| \tag{8}$$

$$\left\| A_0^{-1}\left(F''(x) - F''(y)\right)\right\| \le b_0 \|x - y\|^{\alpha} \tag{9}$$

$$\left\| A_0^{-1}\left(\delta G(x,y) - \delta G(u,v)\right)\right\| \le c_0 \left(\|x-u\|^{\beta} + \|y-v\|^{\beta}\right); \tag{10}$$

(3) $q > p$ 且存在非负数 r_0 使得

$$g_0\left(r_0^{\alpha+1} + 3r_0^{\beta} + (3r_0)^{\beta} + (r_0 - p)^{\beta}\right) < 1,\ r_0 \ge q/(1-\gamma), \tag{11}$$

其中

$$\gamma \equiv g_0\left(r_0^{\alpha+1} + (r_0 - p)^{\beta} + 2r_0^{\beta}\right) \Big/ \left[1 - g_0\left((3r_0)^{\beta} + r_0^{\beta}\right)\right],$$

$$g_0 \equiv \max\left\{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\beta+1)}, \frac{1}{2}a_0 + c_0\right\};$$

(4) 闭球 $U(x_0, r_0) \subset D$。假设实序列 $\{s_n\}_{n\ge0}, \{t_n\}_{n\ge0}$ 由如下定义：

$$t_0 = r_0,\ s_0 = r_0 - p,\ t_1 = r_0 - q. \tag{12}$$

$$t_{n+1} - t_{n+2} = \left(\frac{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}(t_n - t_{n+1})^{\alpha+1} + \frac{1}{2}a_0(s_n - t_{n+1}) + c_0\left((t_n - t_{n+1})^{\beta} + (t_n - s_n)^{\beta}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}a_0 + c_0\right)\left((t_0 - t_{n+1})^{\beta} + \left(3(t_0 - s_{n+1})\right)^{\beta}\right)}\right)(t_n - t_{n+1}) \equiv B_{n+2}(t_n - t_{n+1}), \tag{13}$$

$$t_{n+1} - s_{n+1} = \left(\frac{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}(t_n - t_{n+1})^{\alpha+1} + \frac{1}{2}a_0(s_n - t_{n+1}) + c_0\left((t_n - t_{n+1})^{\beta} + (t_n - s_n)^{\beta}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}a_0 + c_0\right)\left((t_0 - t_n)^{\beta} + \left(3(t_0 - s_n)\right)^{\beta}\right)}\right)(t_n - t_{n+1}) \equiv C_{n+1}(t_n - t_{n+1}). \tag{14}$$

则我们有如下结论：

(i) $\{s_n\}_{n\ge0}, \{t_n\}_{n\ge0}$ 为非负，递减序列且收敛于 $t^* \in R$ 满足 $r_0 - q/(1-\gamma) \le t^* < t_0$；

(ii)算法(6)是适定的。所得序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛于解 $x^* \in U(x_0, r_0)$，且满足不等式

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le t_n - t^*,\ \left\|y_n - x^*\right\| \le s_n - s^*, \text{对任意 } n = 0,1,2\cdots. \tag{15}$$

并且解是唯一的。特别的，当 $n \ge 1$ 时，我们有

$$\left\|x_n - x^*\right\| \le \left(\frac{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}(t_n - t_{n-1})^{\alpha+1} + \frac{1}{2}a_0(s_{n-1} - t_n) + c_0\left((t_n - t_{n-1})^{\beta} + (t_{n-1} - s_{n-1})^{\beta}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}a_0 + c_0\right)\left((t_0 - s_0)^{\beta} + (t_0 - t_n)^{\beta} + (t_0 - t^*)^{\beta}\right)}\right)(t_n - t_{n-1}). \tag{16}$$

证明：(i) 我们用数学归纳法证明下列不等式是成立的：

$$s_n \ge t_{n+1} \ge s_{n+1} \ge t_{n+2} \ge r_0 - \frac{1-\gamma^{n+2}}{1-\gamma}q \ge 0. \tag{17}$$

以及

$$B_{n+2} \le \gamma,\ C_{n+1} \le \gamma. \tag{18}$$

其中，由γ定义，有$0 \le \gamma < 1$。那么由序列递减且有下界，就可得序列$\{s_n\},\{t_n\}$是收敛的。因此，由

$$t_{n+1} - t_{n+2} \ge s_{n+1} - t_{n+2} \ge 0 \text{ 及 } \lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_{n+2}) = 0.$$

即可得$\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} t_{n+2}$，从而$\{t_n - s_n\}$也收敛。

首先，当$n = 0$时，由式子(12)，(13)，(14)，我们可以得到

$$s_0 \ge t_1 \ge s_1 \ge t_2.$$

又由于

$$r_0 - q(1+\gamma) = r_0 - \frac{1 + g_0\left(r_0^{\alpha+1} + r_0^\beta + (r_0 - p)^\beta - (3r_0)^\beta\right)}{1 - g_0\left((3r_0)^\beta + r_0^\beta\right)} q.$$

因此

$$t_1 - t_2 \le \frac{g_0\left(t_0^{\alpha+1} + s_0 + 2t_0^\beta\right)}{1 - g_0\left((3t_0)^\beta + t_0^\beta\right)} q = \frac{g_0\left(r_0^{\alpha+1} + (r_0 - p) + 2r_0^\beta\right)}{1 - g_0\left(r_0^\beta + (3r_0)^\beta\right)} q$$
$$\le \frac{g_0\left(r_0^{\alpha+1} + (r_0 - p)^\beta + 2r_0^\beta\right)}{1 - g_0\left(r_0^\beta + (3r_0)^\beta\right)} q.$$

即可得

$$t_2 \ge r_0 - \frac{1 + g_0\left(r_0^{\alpha+1} + r_0^\beta + (r_0 - p)^\beta - (3r_0)^\beta\right)}{1 - g_0\left(r_0^\beta + (3r_0)^\beta\right)} q = r_0 - q(1+\gamma) \ge r_0 - \frac{q}{1-\gamma} \ge 0.$$

所以

$$t_1 \ge s_1 \ge t_2 \ge r_0 - \frac{q}{1-\gamma} \ge 0.$$

并且

$$B_2 \le \gamma,\ C_1 \le \gamma.$$

即当$n = 0$时，(17)与(18)成立。假设$n = 0,1,2\cdots k$时，不等式(17)与(18)是成立的，即

$$t_{k+1} \ge s_{k+1} \ge t_{k+2} \ge r_0 - \frac{1-\gamma^{k+2}}{1-\gamma} q \ge 0.$$

且

$$B_{k+2} \le \gamma,\ C_{k+1} \le \gamma.$$

则当$n = k+1$时，

$$B_{k+3} \le \frac{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} t_0^{\alpha+1} + \frac{1}{2} a_0 s_0 + c_0\left(t_0^\beta + t_0^\beta\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} a_0 + c_0\right)\left(t_0^\beta + (3t_0)^\beta\right)} \le \gamma, \tag{19}$$

$$C_{k+2} \le \frac{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)} t_0^{\alpha+1} + \frac{1}{2} a_0 s_0 + c_0 \left(t_0^{\beta} + t_0^{\beta}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2} a_0 + c_0\right)\left(t_0^{\beta} + (3t_0)^{\beta}\right)} \le \gamma. \tag{20}$$

由 B_{k+2}, C_{k+1} 定义及假设，可得 $B_{k+2} \ge C_{k+1}$。由条件(13)，(14)及假设，我们可得：

$$t_{k+2} - t_{k+3} = B_{k+3}\left(t_{k+1} - t_{k+2}\right) \ge 0,\ t_{k+2} - s_{k+2} = C_{k+2}\left(t_{k+1} - t_{k+2}\right) \ge 0,$$

以及

$$s_{k+2} - t_{k+3} = B_{k+3}\left(t_{k+1} - t_{k+2}\right) - C_{k+2}\left(t_{k+1} - t_{k+2}\right) \ge 0.$$

又由条件(13)及(19)，

$$\begin{aligned} t_m - t_{m+1} &= B_{m+1}\left(t_{m-1} - t_m\right) \le \gamma\left(t_{m-1} - t_m\right) \le \gamma^2\left(t_{m-2} - t_{m-1}\right) \le \cdots \le \gamma^m\left(t_0 - t_1\right) \\ &= \gamma^m q, m = 1, 2, \cdots k+2. \end{aligned}$$

所以

$$t_{m+1} \ge t_m - \gamma^m q,\ m = 1, 2, \cdots k+2.$$

因此，由上式及 γ 定义可得

$$\begin{aligned} t_{k+3} &\ge t_{k+2} - \gamma^{k+2} q \ge t_{k+1} - \gamma^{k+1} q - \gamma^{k+2} q \ge \cdots \ge t_0 - q - \gamma q - \cdots - \gamma^{k+1} q - \gamma^{k+2} q \\ &= r_0 - \frac{1-\gamma^{k+3}}{1-\gamma} q. \end{aligned}$$

综上可得

$$s_{k+1} \ge t_{k+2} \ge s_{k+2} \ge t_{k+3} \ge r_0 - \frac{1-\gamma^{k+3}}{1-\gamma} q \ge 0.$$

即可得(17)与(18)对 $n = k+1$ 是成立的。从而，我们证得(i)成立。

下面给出(ii)的证明。我们将用数学归纳法证明迭代过程(6)是适定的且有

$$\left\|x_n - x_{n+1}\right\| \le t_n - t_{n+1},\ \left\|x_n - y_n\right\| \le t_n - s_n. \tag{21}$$

因此

$$\left\|y_n - y_{n+1}\right\| \le 2t_n - s_n - s_{n+1}.$$

当 $n = 0$ 时，显然，由算法(6)，p, q 定义及(12)，很容易可以证明(21)是成立的。现假设 k 为非负整数，并且对所有 $n \le k$，不等式(21)是成立的。若令 $A_m \equiv F'\left(\frac{x_m + y_m}{2}\right) + \delta G\left(x_m, y_m\right)$，$m = 0, 1, \cdots, k+1$，则有

$$\begin{aligned} \left\|I - A_0^{-1} A_m\right\| &= \left\|A_0^{-1}\left(F'\left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right) + \delta G\left(x_0, y_0\right) - F'\left(\frac{x_m + y_m}{2}\right) - \delta G\left(x_m, y_m\right)\right)\right\| \\ &\le \frac{1}{2} a_0 \left(\left\|x_0 - x_m\right\| + \left\|y_0 - y_m\right\|\right) + c_0\left(\left\|x_0 - x_m\right\|^{\beta} + \left\|y_0 - y_m\right\|^{\beta}\right) \\ &\le \left(\frac{1}{2} a_0 + c_0\right)\left(\left\|x_0 - x_m\right\|^{\beta} + \left\|y_0 - y_m\right\|^{\beta}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

由假设及条件(11)

$$\begin{aligned} \left\|I - A_0^{-1} A_m\right\| &\le \left(\frac{1}{2} a_0 + c_0\right)\left(\left(t_0 - t_m\right)^{\beta} + \left(3\left(t_0 - s_m\right)\right)^{\beta}\right) \\ &\le \left(\frac{1}{2} a_0 + c_0\right)\left(t_0^{\beta} + \left(3t_0\right)^{\beta}\right) = \left(\frac{1}{2} a_0 + c_0\right)\left(r_0^{\beta} + \left(3r_0\right)^{\beta}\right) < 1 \end{aligned} \tag{23}$$

则由引理 2，$A_0^{-1}A_m$ 为可逆的，并且

$$\left\|A_0^{-1}A_m\right\| \le \left[1-\left(\frac{1}{2}a_0+c_0\right)\left(\left\|x_0-x_m\right\|^{\beta}+\left\|y_0-y_m\right\|^{\beta}\right)\right]^{-1}. \tag{24}$$

下证当 $n=k+1$ 时，迭代过程是可以定义的。

$$\begin{aligned}F(x_{k+1})+G(x_{k+1}) &= F(x_{k+1})+G(x_{k+1}) \\ &\quad -\left[F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)+\delta G(x_k,y_k)\right](x_{k+1}-x_k)-F(x_k)-G(x_k) \\ &= F(x_{k+1})-F(x_k)-F'\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)(x_{k+1}-x_k) \\ &\quad +\left[F'\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)-F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)\right](x_{k+1}-x_k) \\ &\quad +G(x_{k+1})-G(x_k)-\delta G(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)\end{aligned} \tag{25}$$

由引理 3，有

$$\begin{aligned}&F(x)-F(y)-F'\left(\frac{x+y}{2}\right)(x-y) \\ &=\frac{1}{4}\int_0^1\left[(1-t)\left(F''\left(\frac{x+y}{2}+\frac{t}{2}(x-y)\right)-F''\left(\frac{x+y}{2}+\frac{t}{2}(y-x)\right)\right)\right](x-y)(x-y)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$\begin{aligned}&F(x_{k+1})-F(x_k)-F'\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)(x_{k+1}-x_k) \\ &=\frac{1}{4}\int_0^1\left[(1-t)\left(F''\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}+\frac{t}{2}(x_{k+1}-x_k)\right)-F''\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}+\frac{t}{2}(x_{k+1}-x_k)\right)\right)\right] \\ &\quad (x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_k)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

另外由均差定义，有

$$G(x_{k+1})-G(x_k)=\delta G(x_{k+1},x_k)(x_{k+1}-x_k).$$

所以

$$\begin{aligned}&\left\|A_0^{-1}F(x_{k+1})+G(x_{k+1})\right\| \\ &=\left\|\frac{1}{4}\int_0^1\left[(1-t)A_0^{-1}\left(F''\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}+\frac{t}{2}(x_{k+1}-x_k)\right)-F''\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}+\frac{t}{2}(x_k-x_{k+1})\right)\right)\right]\right. \\ &\quad (x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_k)\mathrm{d}t+A_0^{-1}\left[F'\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)-F'\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right)\right](x_{k+1}-x_k) \\ &\quad \left.+A_0^{-1}\left[\delta G(x_{k+1},x_k)-\delta G(x_k,y_k)\right](x_{k+1}-x_k)\right\| \\ &\le\frac{1}{4}\int_0^1(1-t)b_0t^{\alpha}\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\alpha+2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}a_0\left\|x_{k+1}-y_k\right\|\cdot\left\|x_{k+1}-x_k\right\| \\ &\quad +c_0\left(\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\beta}+\left\|x_k-y_k\right\|^{\beta}\right)\left\|x_{k+1}-x_k\right\| \\ &=\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\alpha+2}+\frac{1}{2}a_0\left\|x_{k+1}-y_k\right\|\cdot\left\|x_{k+1}-x_k\right\| \\ &\quad +c_0\left(\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\beta}+\left\|x_k-y_k\right\|^{\beta}\right)\left\|x_{k+1}-x_k\right\|.\end{aligned} \tag{26}$$

所以，由上可得

$$\begin{aligned}&\left\|x_{k+2}-x_{k+1}\right\|\\&=\left\|A_{k+1}^{-1}\left(F\left(x_{k+1}\right)+G\left(x_{k+1}\right)\right)\right\|\le\left\|A_{k+1}^{-1}A_0\right\|\cdot\left\|A_0^{-1}\left(F\left(x_{k+1}\right)+G\left(x_{k+1}\right)\right)\right\|\\&=\left(\frac{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\alpha+1}+\frac{1}{2}a_0\left\|x_{k+1}-y_k\right\|+c_0\left(\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\beta}+\left\|x_k-y_k\right\|^{\beta}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}a_0+c_0\right)\left(\left\|x_0-x_{k+1}\right\|^{\beta}+\left\|y_0-y_{k+1}\right\|^{\beta}\right)}\right)\\&\quad\left\|x_{k+1}-x_k\right\|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left\|x_{k+1}-y_{k+1}\right\|\\&=\left\|A_{k+1}^{-1}\left(F\left(x_{k+1}\right)+G\left(x_{k+1}\right)\right)\right\|\le\left\|A_k^{-1}A_0\right\|\cdot\left\|A_0^{-1}\left(F\left(x_{k+1}\right)+G\left(x_{k+1}\right)\right)\right\|\\&=\left(\frac{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\alpha+1}+\frac{1}{2}a_0\left\|x_{k+1}-y_k\right\|+c_0\left(\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\beta}+\left\|x_k-y_k\right\|^{\beta}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}a_0+c_0\right)\left(\left\|x_0-x_k\right\|^{\beta}+\left\|y_0-y_k\right\|^{\beta}\right)}\right)\\&\quad\left\|x_{k+1}-x_k\right\|.\end{aligned}$$

然后，由(21)，(13)，(14)，我们可得

$$\left\|x_{k+1}-x_{k+2}\right\|\le t_{k+1}-t_{k+2},\ \left\|x_{k+1}-y_{k+1}\right\|\le t_{k+1}-s_{k+1}. \tag{27}$$

因此，即可证得迭代方法对任意 n 是可以定义的。又由

$$\left\|x_n-x_k\right\|\le t_n-t_k,\ \left\|y_n-x_k\right\|\le s_n-t_k. \tag{28}$$

$$\left\|y_n\right\|=\left\|y_n-x_k+x_k\right\|\le\left\|y_n-x_k\right\|+\left\|x_k\right\|,\ 0\le n\le k.$$

以及前面已证的 $\{t_n\}$ 及 $\{t_n-s_n\}$ 也收敛，就证得了 $\{x_n\}_{n\ge0}$，$\{y_n\}_{n\ge0}$ 为柯西序列且是收敛的。不妨设 $\lim_{n\to\infty}x_n=x^*$，因此，在(28)中，当 $n\to\infty$ 时，我们便可以得到(15)是成立的，即

$$\left\|x_n-x^*\right\|\le t_n-t^*,\ \left\|y_n-x^*\right\|\le s_n-t^*. \tag{29}$$

又因为当 $k\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}\left\|A_0^{-1}\left(F\left(x_{k+1}\right)+G\left(x_{k+1}\right)\right)\right\|\le&\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\alpha+2}\\&+\frac{1}{2}a_0\left\|x_{k+1}-y_k\right\|\cdot\left\|x_{k+1}-x_k\right\|\\&+c_0\left(\left\|x_{k+1}-x_k\right\|^{\beta}+\left\|x_k-y_k\right\|^{\beta}\right)\left\|x_{k+1}-x_k\right\|\to0.\end{aligned}$$

所以我们即可得 x^* 即为方程 $H(x)=0$ 的根。

接下来我们证明(16)是成立的。由等式

$$\begin{aligned}x_n-x^*&=\left(F'\left(\frac{x_n+x^*}{2}\right)+\delta G\left(x_n,x^*\right)\right)^{-1}\left(F\left(x_n\right)+G\left(x_n\right)-F\left(x^*\right)-G\left(x^*\right)\right)\\&=\left[\left(F'\left(\frac{x_n+x^*}{2}\right)+\delta G\left(x_n,x^*\right)\right)^{-1}A_0\right]\left[A_0^{-1}\left(F\left(x_n\right)+G\left(x_n\right)\right)\right].\end{aligned}$$

由条件(28)，(29)，(8)，(9)，(10)知

$$
\begin{aligned}
&\left\| I - A_0^{-1}\left(F'\left(\frac{x_n + x^*}{2}\right) + \delta G\left(x_n, x^*\right)\right)\right\| \\
&= \left\| A_0^{-1}\left[\left(F'\left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right) + \delta G\left(x_0, y_0\right)\right) - \left(F'\left(\frac{x_n + x^*}{2}\right) + \delta G\left(x_n, x^*\right)\right)\right]\right\| \\
&= \left\| A_0^{-1}\left[\left(F'\left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right) - F'\left(\frac{x_0 + x_0}{2}\right) + F'\left(\frac{x_0 + x_0}{2}\right) - F'\left(\frac{x_n + x^*}{2}\right)\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + \left(\delta G\left(x_0, y_0\right) - \delta G\left(x_0, x_0\right) + \delta G\left(x_0, x_0\right) - \delta G\left(x_n, x^*\right)\right)\right]\right\| \\
&\le \frac{1}{2}a_0\left(\left\|x_0 - y_0\right\| + \left\|x_0 - x_n\right\| + \left\|x_0 - x^*\right\|\right) + c_0\left(\left\|x_0 - y_0\right\| + \left\|x_0 - x_n\right\|^\beta + \left\|x_0 - x^*\right\|^\beta\right) \\
&\le \left(\frac{1}{2}a_0 + c_0\right)\left(\left\|x_0 - y_0\right\|^\beta + \left\|x_0 - x_n\right\|^\beta + \left\|x_0 - x^*\right\|^\beta\right) \\
&\le \left(\frac{1}{2}a_0 + c_0\right)\left(\left(t_0 - s_0\right)^\beta + \left(t_0 - t_n\right)^\beta + \left(t_0 - t^*\right)^\beta\right) < 1.
\end{aligned}
$$

所以由引理 2，线性算子 $F'\left(\frac{x_0 + x^*}{2}\right) + \delta G\left(x_0, x^*\right)$ 为可逆的，且有

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left(F'\left(\frac{x_n + x^*}{2}\right) + \delta G\left(x_n, x^*\right)\right)^{-1} A_0 \right\| \\
&\le \left(1 - \left(\frac{1}{2}a_0 + c_0\right)\left(\left(t_0 - s_0\right)^\beta + \left(t_0 - t_n\right)^\beta + \left(t_0 - t^*\right)^\beta\right)\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

另外，(26)可得

$$
\begin{aligned}
&\left\| A_0^{-1}\left(F\left(x_n\right) + G\left(x_n\right)\right)\right\| \\
&\le \left[\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(t_n - t_{n-1}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{2}a_0\left(t_n - s_{n-1}\right) + c_0\left(\left(t_n - t_{n-1}\right)^\beta + \left(t_{n-1} - s_{n-1}\right)^\beta\right)\right] \\
&\left(t_n - t_{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\left\| x_n - x^* \right\| \\
&\le \left(\frac{\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(t_n - t_{n-1}\right)^{\alpha+1} + \frac{1}{2}a_0\left(s_{n-1} - t_n\right) + c_0\left(\left(t_n - t_{n-1}\right)^\beta + \left(t_{n-1} - s_{n-1}\right)^\beta\right)}{1 - \left(\frac{1}{2}a_0 + c_0\right)\left(\left(t_0 - s_0\right)^\beta + \left(t_0 - t_n\right)^\beta + \left(t_0 - t^*\right)^\beta\right)}\right) \\
&\left(t_n - t_{n-1}\right).
\end{aligned}
$$

下面我们证解的唯一性。由(11)式，我们可以得到

$$
g_0\left[r_0^{\alpha+1} + 2r_0^\beta + \left(r_0 - p\right)^\beta + q^\beta\right] < 1. \tag{30}
$$

设 x^{**} 为方程 $H\left(x\right) = 0$ 在 $U\left(x_0, r_0\right)$ 上的另一解，其中 r_0 是满足(12)式。则由迭代算法(5)，(8)，(9)及(1)

我们可以得

$$\begin{aligned}
&x_{m+1}-x^{**}\\
&=A_m^{-1}A_0\left[A_0^{-1}\left(F'\left(\frac{x_m+y_m}{2}\right)+\delta G(x_m,y_m)\right)\left(\left(x_m-x^{**}\right)-F(x_m)-G(x_m)\right)\right]\\
&=A_m^{-1}A_0\left\{A_0^{-1}\left[\left(F'\left(\frac{x_m+y_m}{2}\right)-F'\left(\frac{x_m+x^{**}}{2}\right)\right)\left(x_m-x^{**}\right)\right.\right.\\
&\qquad-\left(F(x_m)-F\left(x^{**}\right)-F'\left(\frac{x_m+x^{**}}{2}\right)\left(x_m-x^{**}\right)\right)\\
&\qquad+\left(\delta G(x_m,y_m)-\delta G(x_m,x_m)\right)\left(x_m-x^{**}\right)\\
&\qquad\left.\left.+\delta G(x_m,x_m)\left(x_m-x^{**}\right)-\left(G(x_m)-G\left(x^{**}\right)\right)\right]\right\}.
\end{aligned}$$

因此，由式子(24)，(8)，(10)及引理 3，我们即可得

$$\begin{aligned}
&\left\|x_{m+1}-x^{*}\right\|\\
&\le\frac{\frac{1}{2}a_0\left\|y_m-x^{**}\right\|+\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\|x_m-x^{**}\right\|^{\alpha+1}+c_0\left(\left\|y_m-x_m\right\|^{\beta}+\left\|x_m-x^{**}\right\|^{\beta}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}a_0+c_0\right)\left(\left\|x_0-x_m\right\|^{\beta}+\left\|y_0-y_m\right\|^{\beta}\right)}\\
&\quad\left\|x_m-x^{**}\right\|\\
&\le\left(\frac{\frac{1}{2}a_0\left(\left(t_m-s_m\right)+\left\|x_m-x^{**}\right\|^{\alpha+1}\right)+\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\|x_m-x^{**}\right\|^{\alpha+1}+c_0\left(\left(t_m-s_m\right)^{\beta}+\left\|x_m-x^{**}\right\|^{\beta}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}a_0+c_0\right)\left(\left(t_0-t_m\right)^{\beta}+\left(s_0-s_m\right)^{\beta}\right)}\right)\\
&\quad\left\|x_m-x^{**}\right\|\\
&\equiv T_m\left\|x_m-x^{**}\right\|.
\end{aligned}$$

下面我们用数学归纳法证明 T_m 是小于 1 的。首先，由式(14)，我们可得

$$\left\|t_m-s_m\right\|\le t_0-t_1,\ m=0,1,\cdots,k+2. \tag{31}$$

当 $m=0$ 时由式(30)，(31)及 $x_0\in U\left(x^{**},r_0\right)$，

$$\begin{aligned}
\left\|x_1-x^{**}\right\|&\le\left[\frac{1}{2}a_0\left(\left(t_0-s_0\right)+\left\|x_0-x^{**}\right\|\right)\right.\\
&\quad+\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\|x_0-x^{**}\right\|^{\alpha+1}\\
&\quad\left.+c_0\left(\left(t_0-s_0\right)^{\beta}+\left\|x_0-x^{**}\right\|^{\beta}\right)\right]\left\|x_0-x^{**}\right\|\\
&\le g_0\left(r_0^{\alpha+1}+p^{\beta}+r_0^{\beta}\right)r_0\\
&\le r_0.
\end{aligned}$$

所以有 $x_1\in U\left(x^{**},r_0\right)$. 假设当 $m=k$ 时，有 $x_{k+1}\in U\left(x^{**},r_0\right)$.则当 $m=k+1$ 时，由假设及式(30)，(31)，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left\|x_{k+2}-x^{**}\right\| \\
&\le \frac{\frac{1}{2}a_0\left(\left(t_{k+1}-s_{k+1}\right)+\left\|x_{k+1}-x^{**}\right\|\right)+\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\left\|x_{k+1}-x^{**}\right\|^{\alpha+1}+c_0\left(\left(t_{k+1}-s_{k+1}\right)^{\beta}+\left\|x_1-x^{**}\right\|^{\beta}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}a_0+c_0\right)\left(\left(t_0-t_{k+1}\right)^{\beta}+\left(s_0-s_{k+1}\right)^{\beta}\right)} \\
&\quad \left\|x_{k+1}-x^{**}\right\| \\
&\le \frac{\frac{1}{2}a_0\left(q+r_0\right)+\frac{b_0}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}r_0^{\alpha+1}+c_0\left(p^{\beta}+r_0^{\beta}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}a_0+c_0\right)\left(r_0^{\beta}+\left(r_0-p\right)^{\beta}\right)}r_0 \\
&\le \frac{g_0\left(r_0^{\alpha+1}+q^{\beta}+r_0^{\beta}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}a_0+c_0\right)\left(r_0^{\beta}+\left(r_0-p\right)^{\beta}\right)}r_0 \\
&\le r_0.
\end{aligned}
$$

取 a 表示 T_m 的上界，则有 $0<a<1$。

$$\left\|x_{m+1}-x^{**}\right\| \le a\left\|x_m-x^{**}\right\| \le \cdots \le a^{m+1}\left\|x_0-x^{**}\right\|.$$

当 $m\to\infty$ 时，$a^{m+1}\to 0.$ 所以 $\left\|x_{m+1}-x^{**}\right\|\to 0,\ x^{**}=\lim_{m\to\infty}x_m=x^{*}.$

所以唯一性得证。

4. 数值例子

本文将引用文献[16]中的例子验证定理 1 中的条件是非空的。考虑下面的二阶非线性边界值问题：

$$\begin{cases} x''+x^{1+\beta}=0 \\ x(0)=x(1)=0 \end{cases},\quad 0<\beta<1. \tag{32}$$

将[0,1]分成 n 个子区间，$\{t_k\}$ 表示细分的点，且有 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{n+1}$。令 $d\equiv\frac{1}{n+1}$. 我们给出一个二阶导数的标准近似：

$$x_i''\cong\frac{x_{i-1}-2x_i+2x_{i+1}}{d^2},\quad x_i=x(t_i), i=0,1,\cdots n.$$

取 $x_0=x_{n+1}=0$，则将 x_i'' 代入问题(32)，我们即可得

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-d^2x_1^{1+\beta}=0 \\ -x_{i-1}+2x_i-x_{i+1}-d^2x_1^{1+\beta}=0,\ i=2,\cdots,n-1. \\ -x_{n-1}+2x_n-d^2x_n^{1+\beta}=0 \end{cases} \tag{33}$$

因此我们可得方程组(33)的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}\equiv\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

另外，对于 $\forall A \in R^n \times R^n$，相应的有范数 $\|A\| = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$。定义

$$D(x) = d^2 \left(x_1^{1+\beta}, x_2^{1+\beta}, \cdots x_n^{1+\beta} \right)^{\mathrm{T}}, \quad x = \left(x_{1,} x_2, \cdots x_n \right)^{\mathrm{T}}.$$

令 $H(x) = Ax - D(x)$, 其中 $F(x) = Ax,\ G(x) = -D(x)$，显然 $H'(x) = A - d^2(1+\beta)\left(x_1^{\beta}, x_2^{\beta}, \cdots, x_n^{\beta}\right)$.

接下来我们对 $G(x)$ 做一些相关计算。由文献[10]，[11]，[12]，$\delta G(x, y)$ 可以由矩阵的元素来表示：

$$\delta G(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1^{1+\beta} - y_1^{1+\beta}}{x_1 - y_1} & & & \\ & \dfrac{x_2^{1+\beta} - y_2^{1+\beta}}{x_2 - y_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \dfrac{x_n^{1+\beta} - y_n^{1+\beta}}{x_n - y_n} \end{pmatrix}.$$

这里

$$\delta G(x,y)_{i,j} = \frac{G_i\left(x_1, \cdots, x_j, y_{j+1}, \cdots, y_n\right) - G_i\left(x_1, \cdots, x_{j-1}, y_j, \cdots, y_n\right)}{x_j - y_j}.(i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

由均差定义，我们可以把 δG 转化为积分的形式(参见文献[16])：

$$\delta G(x,y) = \int_0^1 G'\left(x + t(y - x)\right) \mathrm{d}t$$

注意到，对所有 $x, y \in R^n, x_i > 0. y_i > 0, i = 0, 1, \cdots, n$。

$$\begin{aligned} \left\|G'(x) - G'(y)\right\| &= \left\|\operatorname{diag}\left\{d^2(1+\beta)\left(y_i^{\beta} - x_i^{\beta}\right)\right\}\right\| \\ &\le d^2(1+\beta) \max_{1 \le i \le n} \left|y_i - x_i\right|^{\beta} \\ &= d^2(1+\beta)\|y - x\|^{\beta}. \end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned} \left\|\delta G(x,y) - \delta G(u,v)\right\| &\le \int_0^1 \left\|G'\left(x + t(y-x)\right) - G'\left(u + t(v-u)\right)\right\| \mathrm{d}t \\ &\le d^2(1+\beta)\int_0^1 \left((1-t)^{\beta}\|x-u\|^{\beta} + t^{\beta}\|y-v\|^{\beta}\right)\mathrm{d}t \\ &= d^2\left(\|x-u\|^{\beta} + \|y-v\|^{\beta}\right) \end{aligned} \tag{34}$$

所以

$$\begin{aligned} \left\|A_0^{-1}\left(\delta G(x,y) - \delta G(u,v)\right)\right\| &\le \left\|A_0^{-1}\right\| \left\|\delta G(x,y) - \delta G(u,v)\right\| \\ &= \left\|A_0^{-1}\right\| d^2\left(\|x-u\|^{\beta} + \|y-v\|^{\beta}\right). \end{aligned}$$

最后，易知

$$\left\|A_0^{-1}\left(F'(x) - F'(y)\right)\right\| \le \left\|A_0^{-1}\right\| \cdot \left\|F'(x) - F'(y)\right\| \le \left\|A_0^{-1}\right\| d^2 \|x - y\|$$

$$\left\|A_0^{-1}\left(F''(x) - F''(y)\right)\right\| \le \left\|A_0^{-1}\right\| \cdot \left\|F''(x) - F''(y)\right\| \le \left\|A_0^{-1}\right\| d^2 \|x - y\|^{\alpha}$$

即对条件(8)，(9)，(10)中的系数 a_0, b_0, c_0 均取为 $\left\|A_0^{-1}\right\| d^2$。

我们选定下组数据作为初始值：

$$x^{(0)}=\begin{pmatrix}3.06718e+001\\5.99397e+001\\8.53725e+001\\1.04286e+002\\1.14398e+002\\1.14398e+002\\1.04286e+002\\8.53725e+001\\5.99397e+001\\3.06718e+001\end{pmatrix},\ y^{(0)}=\begin{pmatrix}3.06717e+001\\5.99396e+001\\8.53724e+001\\1.04286e+002\\1.14398e+002\\1.14398e+002\\1.04286e+002\\8.53724e+001\\5.99396e+001\\3.06717e+001\end{pmatrix}$$

下面我们通过计算来验证定理 1 的结论。为此，取 $\alpha=\beta=0.5$，通过定理 1 及上面说明，我们可得：

$$p=1.45514795136137e-004,$$
$$q=1.45614561567010796e-004,$$
$$a_0=b_0=c_0=2.664588288e-001.$$

取 $r_0=0.01$，则通过计算(13)，(14)，(15)可得：

$$\begin{aligned}
&t_0=1.000000000e-001, && s_0=9.854485205e-003,\\
&t_1=9.854385438e-003, && s_1=9.748889942e-003,\\
&t_2=9.748889942e-003, && s_2=9.672460095e-003,\\
&t_3=9.672460095e-003, && t^*=9.672460095e-003,\\
&C_1=7.244845218e-001, && B_2=7.244845218e-001,\\
&C_2=7.244844531e-001, && B_3=7.244844531e-001,\\
&\gamma=6.658011253e-001,\\
&r_0-q/(1-\gamma)=9.564287696e-003<t^*<t_0.
\end{aligned}$$

由上面计算，我们可以看出定理 1 中的条件是非空的，即存在这样的一组数据满足定理 1 的条件。

基金项目

浙江省自然科学基金资助项目(LY17A010006)。

参考文献 (References)

[1] Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1982) Functional Analysis. Pergamon, Oxford.

[2] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C. (1970) Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variable. Academic Press, New York.

[3] Ya, B.M. (1968) About One Iterative Method of Solving Functional Equations. *Dopovidi Akademii Nauk Ukrains'koi RSR seriya A*, **5**, 387-391.

[4] Argyros, I.K. (2011) On the Semi-Local Convergence of Werner's Method for Solving Equations Using Recurrent Functions. *Punjab University journal of mathematics*, **43**, 19-28.

[5] Han, D. and Wang, X. (1998) Convergence of Deformed Newton Method. *Applied Mathematics and Computation*, **94**, 65-72. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(97)10066-2

[6] King, R.F. (1972) Tangent Method for Nonlinear Equations. *Numerische Mathematik*, **18**, 298-304. https://doi.org/10.1007/BF01404680

[7] Laasonen, P. (1969) Einüberquadratisch konvergenter iterativer algorithmus. *Annales Academia Scientiarum Fenni-*

ca.series A, **450**, 1-10.

[8] Werner, W. (1979) On an $1+\sqrt{2}$ Order Method for Solving Nonlinear Equations. *Numerische Mathematik*, **32**, 333-342. https://doi.org/10.1007/BF01397005

[9] Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P. (1984) Functional Analysis, Nauka, Moscow (in Russian).

[10] Argyros, I.K. (1991) On an Iterative Algorithm for Solving Nonlinear Operator Equations. *Journal of Analysis and Its Applications*, **10**, 83-92. https://doi.org/10.4171/ZAA/433

[11] Hernandez, M. and Rubio, M.J. (2001) The Secant Method and Divided Differences Hölder Continuous, *Applied Mathematics and Computation*, **124**, 139-149. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(00)00079-5

[12] Shakhno, S.M. (2004) Application of Nonlinear Majoriants for Investigation of the Secant Method for Solving Nonlinear Equations. *Matematychni Studii*, **22**, 79-86.

[13] Potra, F.A. (1984-1985) on an Iterative Algorithm of Order 1.839… for Solving Nonlinear Operator Equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **7**, 75-106. https://doi.org/10.1080/01630568508816182

[14] Shakhno, S.M. (2004) On a Kurchatov's Method of Linear Interpolation for Solving Nonlinear Equations. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **4**, 650-651. https://doi.org/10.1002/pamm.200410306

[15] Bartish, M., Shcherbyna, Y. and Yu, M. (1972) About One Difference Method of Solving Operator Equations. *Dopovidi Akademii Nauk Ukrains'koi RSR series A*, **7**, 579-582.

[16] Shakhno, S.M. (2009) On an Iterative Algorithm with Super-Quadratic Convergence of Solving Nonlinear Operator Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **231**, 222-235. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.02.010

[17] Shakhno, S.M. and Yarmola, H. (2012) Two-Step Method for Solving Nonlinear Equations with Non-Differentiable Operator. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*, **109**, 105-115.

[18] Shakhno, S.M. (2014) Convergence of the Two-Step Combined Method and Uniqueness of the Solution of Nonlinear Operator Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **261**, 378-386. https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.11.018

[19] 李庆杨, 莫孜中, 祁力群. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 1999.