

Equivalent and Sufficient Conditions of Complete Convergence of Random Variables Sequence

Dailin Yuan

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
Email: yuandailin@163.com

Received: May 24th, 2018; accepted: Jun. 12th, 2018; published: Jun. 19th, 2018

Abstract

The equivalent condition and two sufficient conditions of complete convergence were obtained based on a monotone decreasing real sequence converging to 0, when the convergence of a random variables sequence was considered. At the same time, the related issues about almost sure convergence and convergence in probability were researched. The interrelations of these conditions were obtained and exemplified.

Keywords

Complete Convergence, Equivalent Condition, Sufficient Condition

随机变量序列完全收敛的等价及充分条件

袁代林

西南交通大学数学学院, 四川 成都
Email: yuandailin@163.com

收稿日期: 2018年5月24日; 录用日期: 2018年6月12日; 发布日期: 2018年6月19日

摘 要

在随机变量序列收敛性的判断中, 考虑了单调递减趋于0的实数数列, 得到了随机变量序列完全收敛的等价条件和两个充分条件。同时研究了序列的几乎必然收敛和依概率收敛, 用例子说明了这些条件之间的相互关系。

关键词

完全收敛, 等价条件, 充分条件

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随机变量序列完全收敛能推导出几乎必然收敛, 几乎必然收敛能推导出依概率收敛[1]。目前有大量文章研究相依随机变量序列的收敛性问题, 文献[2] [3]研究了有关混合序列加权求和的完全收敛性, 文献[4] [5] [6]研究了混合序列加权求和的几乎必然收敛性。而对于一般的随机变量序列, 文献[7]在研究几乎必然收敛时考虑了以单调递减趋于 0 的实数数列, 得到判断几乎必然收敛的一个等价条件。

本文在研究随机变量序列的收敛性时, 考虑了单调递减趋于 0 的实数数列。在考虑以单调递减趋于 0 的实数数列应用到完全收敛性的判断中, 得到了判断完全收敛的一个等价条件, 同时研究了完全收敛性判断的两个充分条件。这些研究都是针对一般的随机变量序列, 没有独立性或同分布的要求。并且用简单的例子说明了这些条件之间的相互关系。

2. 随机变量序列收敛定义及相关定理

首先给出随机变量序列几种收敛的定义。

定义 2.1 ([1]) 随机变量序列 X_1, X_2, \dots 依概率收敛到随机变量 X , 当且仅当下式成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1)$$

简记为 $X_n \xrightarrow{p} X$ 。

定义 2.2 ([1]) 随机变量序列 X_1, X_2, \dots 几乎必然收敛到随机变量 X , 当且仅当下式成立

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1 \quad (2)$$

简记为 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 。

定义 2.3 ([1]) 随机变量序列 X_1, X_2, \dots 完全收敛到随机变量 X , 当且仅当下式成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (3)$$

简记为 $X_n \xrightarrow{\text{c.c.}} X$ 。

三种收敛性之间的关系是([1])

$$X_n \xrightarrow{\text{c.c.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$

下面定理 2.1 给出了几乎必然收敛的一些等价条件。

定理 2.1 ([1]) $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 与下面每个式子等价

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (5)$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{|X_m - X| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{|X_m - X| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \quad (7)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{|X_m - X| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \quad (8)$$

令正实数序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ 单调递减以 0 为极限, 容易证明下面关系式成立

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{|X_m - X| > \frac{1}{k}\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon_k\}$$

由上式即得到下面的推论

推论 2.2 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 与下面三个式子均等价

$$\exists \varepsilon_k \downarrow 0, \text{ s.t. } P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon_k\}\right) = 0 \quad (9)$$

$$\exists \varepsilon_k \downarrow 0, \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon_k\}\right) = 0 \quad (10)$$

$$\exists \varepsilon_k \downarrow 0, \text{ s.t. } \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon_k\}\right) = 0 \quad (11)$$

注 2.1 当取 $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ 时, (9)式即为(6)式, (10)式即为(7)式, (11)式即为(8)式。

考虑单调递减趋于 0 的实数数列, 文献[7]给出了几乎必然收敛另外的等价条件。

定理 2.3 ([7]) $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 等价于

$$\exists \varepsilon_k \downarrow 0, \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon_k\}\right) = 0 \quad (12)$$

值得注意的是, (12)式中随机变量序列 $\{X_k\}$ 的下标和正实数序列 $\{\varepsilon_k\}$ 的下标有直接的关系, 这不同于上面推论 2.2 中的三个式子。

由概率的连续性即得到 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 与下面式子等价

$$\exists \varepsilon_k \downarrow 0, \text{ s.t. } P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|X_k - X| > \varepsilon_k\}\right) = 0 \quad (13)$$

3. 主要结果及证明

如同几乎必然收敛的判定一样, 在完全收敛的判定中引入单调递减趋于 0 的实数数列, 得到下面的定理。

定理 3.1 对随机变量序列 X_1, X_2, \dots 及随机变量 X , 有 $X_n \xrightarrow{\text{c.c.}} X$ 与下式等价

$$\exists \varepsilon_n \downarrow 0, \text{ s.t. } \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_n) < \infty \quad (14)$$

证“ \Leftarrow ”：因为存在使(14)式成立的数列 $\{\varepsilon_n\}$ ， $\varepsilon_n \downarrow 0$ ，所以对任意 $\varepsilon > 0$ ，必存在 N ，当 $n > N$ 时， $\varepsilon_n < \varepsilon$ 。由此得当 $n > N$ 时， $P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon_n)$ ，有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) &\leq \sum_{n=1}^N P(|X_n - X| > \varepsilon) + \sum_{n=N+1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^N P(|X_n - X| > \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_n) < \infty \end{aligned}$$

得 $X_n \xrightarrow{c.c.} X$ 。

“ \Rightarrow ”：若 $X_n \xrightarrow{c.c.} X$ ，取实数序列 $\{\eta_n\}$ ， $\eta_n \downarrow 0$ ，则对 $\eta_1 > 0$ ，有

$$M_1 = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \eta_1) < \infty$$

又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \eta_2) < \infty$$

所以存在正整数 N_1 ，使得

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} P(|X_n - X| > \eta_2) < \frac{1}{2^2}$$

所以有

$$\sum_{n=1}^{N_1} P(|X_n - X| > \eta_1) + \sum_{n=N_1+1}^{\infty} P(|X_n - X| > \eta_2) < M_1 + \frac{1}{2^2}$$

同理，对 $\eta_k > 0$ ，存在正整数 N_{k-1} ，使得

$$\sum_{n=N_{k-1}+1}^{\infty} P(|X_n - X| > \eta_k) < \frac{1}{k^2}$$

对 $\eta_{k+1} > 0$ ，存在正整数 N_k ，且满足 $N_{k-1} + 1 \leq N_k$ ，使得

$$\sum_{n=N_k+1}^{\infty} P(|X_n - X| > \eta_{k+1}) < \frac{1}{(k+1)^2}$$

所以

$$\sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} P(|X_n - X| > \eta_k) \leq \sum_{n=N_{k-1}+1}^{\infty} P(|X_n - X| > \eta_k) < \frac{1}{k^2}$$

令 $N_0 = 0$ ，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} P(|X_n - X| > \eta_k) < M_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

对每个 $k \geq 1$ ，当 $N_{k-1} + 1 \leq n \leq N_k$ 时，取这些 $\varepsilon_n = \eta_k$ 。由此得 $\varepsilon_n \downarrow 0$ ，而且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} P(|X_n - X| > \eta_k) < M_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty。 \quad \square$$

由 Borel-Cantelli 引理知 $X_n \xrightarrow{c.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X$ ，但 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{c.c.} X$ ，如下例。

例 3.1 设 ξ, ξ_1, ξ_2, \dots 是独立同分布的随机变量序列， ξ 服从双边 Pareto 分布，其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-3}, & \text{当 } |x| > 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $E|\xi| = 2 < \infty$, $E(\xi) = 0$, $E(\xi^2) = \infty$ 。令 $X_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$, 由 Kolmogorov 强大数定律([1], p. 295),

$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \Leftrightarrow E|\xi| < \infty$ 且 $E(\xi) = 0$; 由 Hsu-Robbins-Erdos 强大数定律([1], p312),

$X_n \xrightarrow{\text{c.c.}} 0 \Leftrightarrow E(\xi^2) < \infty$ 且 $E(\xi) = 0$ 。由此知 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$, 但 $X_n \xrightarrow{\text{c.c.}} 0$ 不成立。

由(5)式知 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$, 但 $X_n \xrightarrow{p} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$, 如下面的例子。

例 3.2 令随机变量 X_n 的分布为 $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, 则对 $0 < \varepsilon < 1$, 有

$P(|X_n - 0| > \varepsilon) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ 当 $n \rightarrow \infty$, 得 $X_n \xrightarrow{p} 0$ 。然而当随机变量序列 X_1, X_2, \dots 相互独立时,

对任意 $0 < \varepsilon < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - 0| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \infty$$

由 Borel-Cantelli 引理知 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ 不成立。

下面的命题 3.2 和 3.3 是两个很强的条件。

命题 3.2 设有随机变量序列 X_1, X_2, \dots 及随机变量 X , 若

$$\exists \varepsilon_k \downarrow 0, \text{ s.t. } P(|X_n - X| > \varepsilon_k) = 0, \text{ for all } \varepsilon_k \quad (15)$$

则 $P(X_n = X) = 1, \forall n$ 。简记为 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, \forall n$ 。

证 因

$$\begin{aligned} P(X_n \neq X) &= P(|X_n - X| \neq 0) \\ &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{|X_n - X| > \varepsilon_k\}\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_k) = 0 \end{aligned}$$

所以

$$P(X_n = X) = 1 - P(X_n \neq X) = 1 - 0 = 1. \quad \square$$

易知(15)式 $\Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X, \forall n$, 因从右推出左是显然的。

若对任意 n , 下式成立

$$\exists \varepsilon_n \downarrow 0, \text{ s.t. } P(|X_n - X| > \varepsilon_n) = 0 \quad (16)$$

则容易知道(16)式比(15)式给的条件稍弱, 因 $k \geq n$ 时, $\varepsilon_k \leq \varepsilon_n$, 所以(15)式 \Rightarrow (16)式。然而(16)式 $\not\Rightarrow$ (15)式, 如下面的例 3.3。

例 3.3 令随机变量 X_n 的分布为 $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ 。令 $X = 0$, 正实数序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ 取

为 $\varepsilon_n = \frac{2}{n}$, 则有(16)式成立。但对任意的正实数序列 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots$ 单调递减以 0 为极限, 知当 $\varepsilon'_k \geq \frac{1}{n}$ 时,

$P(|X_n - 0| > \varepsilon'_k) = 0$; 当 $\varepsilon'_k < \frac{1}{n}$ 时, $P(|X_n - 0| > \varepsilon'_k) = P\left(X_n = \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} > 0$ 。对任意给定 n 必有某些 $\varepsilon'_k < \frac{1}{n}$,

所以(15)式不成立。

上面直接由 X_n 的分布容易得到 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ ，因对样本空间中任意 ω ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0$ ，所以 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0) = 1$ 。

下面命题说明(16)式比完全收敛的条件更强。

命题 3.3 设有随机变量序列 X_1, X_2, \dots 及随机变量 X ，若(16)式成立，则(3)式成立。

证 因存在使(16)式成立的数列 $\{\varepsilon_n\}$ ， $\varepsilon_n \downarrow 0$ ，所以对任意 $\varepsilon > 0$ ，必存在 N ，当 $n > N$ 时， $\varepsilon_n < \varepsilon$ ，由此得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) &\leq \sum_{n=1}^N P(|X_n - X| > \varepsilon) + \sum_{n=N+1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_n) \\ &= \sum_{n=1}^N P(|X_n - X| > \varepsilon) + 0 < \infty \end{aligned}$$

得(3)式成立。 □

由命题 3.3 知，(16)式成立可得(3)式成立，从而 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 。不过也很容易地由(16)式直接得到 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 。因对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N ，使得当 $m > N$ 时， $\varepsilon_m < \varepsilon$ ，所以当 $n > N$ 时

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right) \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(|X_m - X| > \varepsilon) \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(|X_m - X| > \varepsilon_m) = 0$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}\right) = 0$$

得(5)式成立，所以有 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ 。

由命题 3.3 知，(16)式 \Rightarrow (3)式，但(3)式 $\not\Rightarrow$ (16)式，如下面的例 3.4。

例 3.4 设有随机变量序列 X_1, X_2, \dots ，其中 X_n 的分布律为

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{n^2}$$

则对任意 $0 < \varepsilon < 1$ ，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - 0| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

所以(3)式成立。然而对任意的正实数序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ 单调递减以 0 为极限，存在 N ，当 $n > N$ 时， $\varepsilon_n < 1$ 。

所以当 $n > N$ 时， $P(|X_n - 0| > \varepsilon_n) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n^2} > 0$ 。由此得(16)式不成立。

由以上命题，有如下结论

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Leftrightarrow (15) \Rightarrow (16) \Rightarrow (14) \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\text{c.c.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Leftrightarrow (12) \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$

而且举例说明了上面蕴含关系的相反方向不成立。

参考文献

- [1] Gut, A. (2005) Probability: A Graduate Course. Springer, New York.
- [2] 蔡光辉. \tilde{p} 混合序列的矩不等式与完全收敛性[J]. 系统科学与数学, 2008, 28(2): 251-256.
- [3] Huang, H.W. (2013) Complete Convergence of Pairwise NQD Random Sequences. *Chinese Journal of Applied Prob-*

ability and Statistics, **29**, 275-286.

- [4] Shen, Y., Wang, X.J., Hu, S.H. and Yang, W.Z. (2010) Convergence Properties of $\tilde{\rho}$ -Mixing Random Variable Sequences. *Journal of University of Science and Technology of China*, **40**, 914-919.
- [5] Wu, Q.Y. (2008) Almost Sure Convergence for φ -mixing Random Variable Sequences. *Mathematica Applicata*, **21**, 629-634.
- [6] Huang, H.W., Wang, D.C. and Wu, Q.Y. (2012) Strong Convergence Laws for $\tilde{\varphi}$ -Mixing Sequences of Random Variables. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, **28**, 181-188.
- [7] Loeve, M. (1977) *Probability Theory I*. Springer, New York.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org