Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(7), 857-862**
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.77103

Hans汉斯

Positive Solutions for a Class of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problem

Guangjun Qu

School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology, Hanzhong Shaanxi
Email: quguangjun1229@163.com

Received: Jun. 24th, 2018; accepted: Jul. 13th, 2018; published: Jul. 20th, 2018

Abstract

Using the Ekeland's variantional principle and a variant version mountain pass lemma, two positive solutions are obtained for a class of nonlinear elliptic boundary value problem.

Keywords

Ekeland's Variantional Principle, Variant Version Mountain Pass Lemma, Positive Solutions

一类非线性椭圆型边界值问题的正解

曲广军

陕西理工大学，数学与计算机科学学院，陕西 汉中
Email: quguangjun1229@163.com

收稿日期：2018年6月24日；录用日期：2018年7月13日；发布日期：2018年7月20日

摘　要

利用欧拉变分原理以及一个变形的山路引理，证明了一类非线性椭圆型边界值问题至少存在两个正解。

关键词

欧拉变分原理，变形的山路引理，正解

文章引用: 曲广军. 一类非线性椭圆型边界值问题的正解[J]. 应用数学进展, 2018, 7(7): 857-862.
DOI: 10.12677/aam.2018.77103

1. 引言

考虑以下非线性椭圆型边界值问题

$$\begin{cases}-\Delta_p u=\lambda f(x,u), & x\in\Omega.\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases} \tag{1}$$

其中，$\Delta_p u$ 是 p-拉普拉斯算子且 $p>1$，Ω 是 $R^n(n\ge 1)$ 中带有光滑边界的有界区域，$\lambda>0$ 是参数，函数 $f(x,t)\in C(\bar{\Omega}\times R,R)$ 满足以下条件：

f1) $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}=+\infty$ a.e. $x\in\bar{\Omega}$；

f2) $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}=+\infty$ a.e. $x\in\bar{\Omega}$；

f3) 存在常数 $\theta\ge 1,\theta_0>0$ 使得 $\theta G(x,s)\ge G(x,t)-\theta_0$ $\forall x\in\bar{\Omega}$，$0\le t\le s$ 都成立。其中，$G(x,t)=f(x,t)t-pF(x,t)$ 且 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$；

f4) 当 $n>p$ 时，$\exists q\in\left(p,\dfrac{np}{n-p}\right)$；当 $n\le p$ 时，$\exists q\in(p,+\infty)$，s. t. $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^{q-1}}=0$ a.e. $x\in\bar{\Omega}$；

f5) 当 $t\ge 0$，$x\in\bar{\Omega}$ 时，$f(x,t)\ge 0$；当 $t\le 0$，$x\in\bar{\Omega}$ 时，$f(x,t)\equiv 0$。

方程(1)是一类重要的非线性椭圆问题，因此被广泛研究，如文献[1]-[6]。文献[1]在以下条件下讨论了方程(1)解的存在性；

f2') $\lim\limits_{t\to +\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}=l$ a.e. $x\in\bar{\Omega}$，其中 l 是常数。

若 $f(x,t)$ 满足条件(f2')，则称 $f(x,t)$ 在无穷远处是渐近线性的；若 $f(x,t)$ 满足条件(f2)，则称 $f(x,t)$ 在无穷远处是超线性的；很明显(f2)和(f2')是不相容的。

文献[2] [3]在 $p=2$，$f(x,t)$ 在无穷远处是超线性的情况下讨论了方程(1)的非平凡解。文献[4] [5] [6]针对一般的 $p>1$ 以及超线性条件证明了方程(1)的正解的存在性。其中文献[6]给出了以下条件：

f1') $b_0\le\liminf\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}\le\limsup\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(x,t)}{t^{p-1}}\le a(x)$ a. e. $x\in\bar{\Omega}$，其中 b_0 为常数，$a(x)\in L^\infty(\Omega)$ 满足 $\forall x\in\bar{\Omega}$，都有 $a(x)\le\lambda_1$，且存在某正测集 $\Omega_1\subset\Omega$ 使得 $a(x)\le\lambda_1$ a. e. $x\in\bar{\Omega}$，λ_1 是 $-\Delta_p$ 的第一个特征值。

明显地，条件(f1)和(f1')是矛盾的。本文将在(f1)~(f5)的条件下，证明方程(1)至少存在两个正解。

2. 预备知识

定义：设 E 为实 Banach 空间，$I\in C^1(E,R)$。如果使得 $\{I(u_k)\}$ 有界，且

$$(1+\|u_k\|)I'(u_k)\to 0\,(k\to\infty)$$

的任一序列 $\{u_k\}(u_k\in E)$ 都有一个收敛子列，则称泛函 I 满足(C)条件。

以下是本文将要用到的一个变形的山路引理，其证明见文献[7]。

山路引理：设 E 为实 Banach 空间，其对偶空间为 E^*，$I\in C^1(E,R)$，且存在 $\alpha<\beta,\rho>0$ 及

$e \in E(\|e\| > \rho)$，使得

$$\max\{I(0), I(e)\} \le \alpha < \beta \le \inf_{\|u\|=\rho} I(u)。$$

记 $c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{0\le t\le 1} I(\gamma(t))$，其中 $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],E) : \gamma(0)=0, \gamma(1)=e\}$ 为连结 0 与 e 的道路的集合。则存在序列 $\{u_n\} \subset E$，使得

$$I(u_n) \to c \ge \beta，且 (1+\|u_n\|)\|I'(u_n)\|_{E^*} \to 0 (n\to\infty)。$$

3. 主要结果及其证明

定义如下的 C^1 泛函：

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x，\quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)。$$

则 $J_\lambda \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), R)$，且寻找方程(1)的非平凡解等价于寻找泛函 J_λ 的非零临界点。

命题 1： 设函数 $f(x,t)$ 满足条件(f4), (f5), 则 $\exists \beta,\rho > 0$，*s. t.* $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)(\|u\| = \rho)$，有 $J_\lambda(u) \ge \beta > 0$。

证： 由 $f(x,t) \in C(\bar{\Omega}\times R, R)$ 及条件(f4)，(f5)成立，则存在常数 $c_1 > 0$，使得

$$f(x,t) \le c_1|t|^{q-1}, \forall (x,t) \in \bar{\Omega}\times R。$$

则

$$F(x,t) \le \frac{c_1}{q}|t|^q, \forall (x,t) \in \bar{\Omega}\times R。 \tag{2}$$

所以由(2)式及 Sobolev 不等式，有

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda\int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda\int_\Omega \frac{c_1}{q}|u|^q\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda c_2\|u\|^q \tag{3}$$

其中 $c_2 > 0$ 为常数。因为 $p < q, \lambda > 0$，令 $\rho > 0$ 足够小，使

$$\beta = \frac{1}{p}\rho^p - \lambda c_2\rho^q > 0。$$

则由(3)式，$J_\lambda(u)\big|_{\partial B_\rho(0)} \ge \beta > 0$。

命题 2： 设函数 $f(x,t)$ 满足条件(f2)，(f5)，则存在 $e_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $\|e_\lambda\| > \rho$，使得 $J_\lambda(e_\lambda) < 0$。

证： 由条件(f2)，(f5)，则 $\forall \varepsilon > 0, \exists m = m(\varepsilon) > 0$，*s. t.*

$$f(x,t) \ge \frac{t^{p-1}}{\varepsilon} - m，\quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega}\times R。$$

则

$$F(x,t) \ge \frac{1}{p\varepsilon}t^p - mt，\quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega}\times R。$$

设 $\phi_1 > 0(\|\phi_1\| = 1)$ 是 λ_1 对应的正则特征函数，则

$$\int_\Omega \frac{F(x,t\phi_1)}{t^p}\,\mathrm{d}x \ge \int_\Omega\left(\frac{1}{p\varepsilon}\phi_1^p - \frac{m\phi_1}{t^{p-1}}\right)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

在(4)式中令 $t\to+\infty$，则

$$\liminf_{t\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t\phi_1)}{t^p}\mathrm{d}x \ge \int_\Omega \frac{1}{p\varepsilon}\phi_1^p\mathrm{d}x，$$

由 $\varepsilon>0$ 是任意的，故当 $\varepsilon\to0^+$ 时，可得

$$\lim_{t\to+\infty}\int_\Omega \frac{F(x,t\phi_1)}{t^p}\mathrm{d}x=+\infty。$$

从而，

$$\frac{J_\lambda(t\phi_1)}{t^p}=\frac{1}{p}-\int_\Omega\frac{F(x,t\phi_1)}{t^p}\mathrm{d}x\to-\infty(t\to+\infty)。$$

所以当 $t_0>0$ 充分大时，$\exists e_\lambda=t_0\phi_1\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 且 $\|e_\lambda\|>\rho$，$s.\ t.$ $J_\lambda(e_\lambda)<0$

命题 3： 设函数 $f(x,t)$ 满足条件(f2)，(f3)，(f5)，则 $J_\lambda(u)$ 满足(C)条件。

证： 令 $\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 满足

$$J_\lambda(u_n)\to c，\ 且\ (1+\|u_n\|)\|J'_\lambda(u_n)\|\to0(n\to\infty). \tag{5}$$

则 $\frac{1}{p}\langle J'_\lambda(u_n),u_n\rangle=o(1)$，从而

$$\int_\Omega\left(\frac{\lambda}{p}f(x,u_n)u_n-\lambda F(x,u_n)\right)\mathrm{d}x=c+o(1). \tag{6}$$

下证 $\{u_n\}$ 有界。若不然，假设存在 $\{u_n\}$ 的子序列(仍记为 $\{u_n\}$)，使得当 $n\to\infty$ 时，$\|u_n\|\to\infty$。令 $W_n=\frac{u_n}{\|u_n\|}$，则 $\|W_n\|=1$。从而存在 $W\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 及 $\{W_n\}$ 的子序列(仍记为 $\{W_n\}$)，使得当 $n\to\infty$ 时，有

$$W_n\xrightarrow{弱}W\ 在\ W_0^{1,p}(\Omega)\ 中；有\ W_n\xrightarrow{强}W\ 在\ L^q(\Omega)\ 中；\ W_n(x)\to W(x)\ \text{a.e.}\ x\in\Omega. \tag{7}$$

易见，W^+ 和 W^- 有类似于(7)的收敛性，其中 $W^\pm=\max\{\pm W,0\}$。

若 $W^+\equiv0$。选取一个实数序列 $\{t_n\}$，使得 $J_\lambda(t_nu_n)=\max_{t\in[0,1]}J_\lambda(tu_n)$。对任意的正整数 k，定义 $V_n=(2pk)^{\frac{1}{p}}W_n^+$，因为 $W^+\equiv0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,V_n)\mathrm{d}x=0。 \tag{8}$$

因为 $c\|u_n\|\to+\infty(n\to\infty)$，则当 n 充分大时，$\frac{(2pk)^{\frac{1}{p}}}{\|u_n\|}\in[0,1]$。由 t_n 的定义及(8)式，得

$$J_\lambda(t_nu_n)\ge J_\lambda\left(\frac{(2pk)^{\frac{1}{p}}}{\|u_n\|}u_n^+\right)=J_\lambda\left((2pk)^{\frac{1}{p}}W_n^+\right)=J_\lambda(V_n)\ge2K-\lambda\int_\Omega F(x,V_n)\mathrm{d}x\ge K。$$

故

$$J_\lambda(t_nu_n)\to+\infty(n\to\infty)。 \tag{9}$$

由条件(f5)知，$f(x,0)=0$，则 $J_\lambda(0)=0$。又因为 $J_\lambda(u_n)\to c(n\to\infty)$，则当 n 充分大时，$0<t_n<1$。因此

$$\int_\Omega \left|\nabla\left(t_n u_n\right)\right|^p \mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega f\left(x,t_n u_n\right)t_n u_n \mathrm{d}x = \left\langle J'_\lambda\left(t_n u_n\right), t_n u_n\right\rangle = t_n \left.\frac{\mathrm{d}J_\lambda\left(t u_n\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_n} = 0 \tag{10}$$

但由 $0 \le t_n \le 1$，则 $\left|t_n u_n\right| \le \left|u_n\right|$。从而由(9)，(10)式及条件(f3)，有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{p} f\left(x,u_n\right)u_n - \lambda F\left(x,u_n\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{p}\int_\Omega \left(f\left(x,u_n\right)u_n - pF\left(x,u_n\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda}{p}\int_\Omega G\left(x,u_n\right)\mathrm{d}x \ge \frac{\lambda}{p\theta}\int_\Omega \left(G\left(x,t_n u_n\right) - \theta_0\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\theta}\int_\Omega \left(\frac{\lambda}{p} f\left(x,t_n u_n\right)t_n u_n - \lambda F\left(x,t_n u_n\right)\right)\mathrm{d}x - \frac{\lambda\theta_0}{p\theta}|\Omega| \\
&= \frac{1}{\theta}\int_\Omega \left(\frac{1}{p}\left|\nabla\left(t_n u_n\right)\right|^p - \lambda F\left(x,t_n u_n\right)\right)\mathrm{d}x - \frac{\lambda\theta_0}{p\theta}|\Omega| \\
&= \frac{1}{\theta}J_\lambda\left(t_n u_n\right) - \frac{\lambda\theta_0}{p\theta}|\Omega| \to +\infty\left(n\to\infty\right)
\end{aligned}$$

这与(6)矛盾。

若 $W^+ > 0$，由 $\left\|u_n\right\| \to +\infty\left(n\to\infty\right)$，则当 $n\to\infty$ 时，$u_n^+ \to +\infty \quad \text{a.e.} \quad x \in \Omega^+ = \left\{x\in\Omega : W^+ > 0\right\}$。由条件(f2)，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x,u_n^+\right)}{\left(u_n^+\right)^{p-1}}\left(W_n^+\right)^p = +\infty \quad \text{a.e.} \quad x\in\Omega^+ 。 \tag{11}$$

由条件(f5)及(5)式，有

$$\begin{aligned}
o(1) &= \left\langle J'_\lambda\left(u_n\right), u_n\right\rangle = \left\|u_n\right\|^p - \lambda\int_\Omega f\left(x,u_n\right)u_n \mathrm{d}x \\
&\le \left\|u_n\right\|^p - \lambda\int_{\Omega^+} f\left(x,u_n^+\right)u_n^+ \mathrm{d}x = \left\|u_n\right\|^p \left(1 - \lambda\int_{\Omega^+} \frac{f\left(x,u_n^+\right)}{\left(u_n^+\right)^{p-1}}\left(W_n^+\right)^p \mathrm{d}x\right),
\end{aligned}$$

则

$$o(1) \le 1 - \lambda\int_{\Omega^+} \frac{f\left(x,u_n^+\right)}{\left(u_n^+\right)^{p-1}}\left(W_n^+\right)^p \mathrm{d}x 。$$

由 $\lambda > 0$，Fatou 引理及(11)式，有

$$1 \ge \lambda \liminf_{n\to\infty} \int_{\Omega^+} \frac{f\left(x,u_n^+\right)}{\left(u_n^+\right)^{p-1}}\left(W_n^+\right)^p \mathrm{d}x = +\infty 。$$

这显然是一个矛盾。

综上，$\left\{u_n\right\}$ 有界。由 Sobolev 紧嵌入及标准化方法，可知 $\left\{u_n\right\}$ 存在一个收敛子列，即 $J_\lambda\left(u\right)$ 满足(C)条件。

定理 4：设函数 $f\left(x,t\right)$ 满足条件(f1)~(f5)，则对每一个 $\lambda > 0$，方程(1)至少存在两个正解。

证：由命题 1~3 及变形的山路引理，可知 J_λ 有一个临界点 u_0^λ 满足 $J_\lambda\left(u_0^\lambda\right) \ge \beta > 0$。

由 $J_\lambda\left(0\right) = 0$，则 $u_0^\lambda \ne 0$。又因为

$$0 = \left\langle J'_\lambda\left(u_0^\lambda\right), \left(u_0^\lambda\right)^-\right\rangle = \left\|\left(u_0^\lambda\right)^-\right\|^p - \lambda\int_\Omega f\left(x,u_0^\lambda\right)\left(u_0^\lambda\right)^- \mathrm{d}x = \left\|\left(u_0^\lambda\right)^-\right\|^p \ge 0,$$

则 $\left\|\left(u_0^\lambda\right)^-\right\|=0$，故 $u_0^\lambda \ge 0$。从而由强极大值原理知 $u_0^\lambda > 0$ a.e. $x\in\Omega$。由命题 1，s. t. $\exists \beta,\rho>0$，$\inf\limits_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda \ge \beta > 0$。

下证 $-\infty < \inf\limits_{B_\rho(0)} J_\lambda < 0$。事实上，由条件(f1)及 $\lambda>0$ 知，当 $t\in(0,\rho)$ 足够小时，有

$$\frac{J_\lambda\left(t\phi_1\right)}{t^p}=\frac{1}{p}-\lambda\int_\Omega \frac{F\left(x,t\phi_1\right)}{t^p}\mathrm{d}x<0。$$

故

$$-\infty<\inf_{B_\rho(0)} J_\lambda<0<\inf_{\partial B_\rho(0)} J_\lambda .$$

从而由欧拉变分原理，

$$\exists\left\{V_n^\lambda\right\}\subset B_\rho\left(0\right)\subset W_0^{1,p}\left(\Omega\right),$$

$$s.t. \left\|J_\lambda'\left(V_n^\lambda\right)\right\|\to 0, J_\lambda\left(V_n^\lambda\right)\to \inf_{u\in B_\rho(0)} J_\lambda\left(u\right)。$$

所以 $\exists V_0^\lambda\in\overline{B_\rho\left(0\right)}\subset W_0^{1,p}\left(\Omega\right), st: V_n^\lambda\to V_0^\lambda$ 且 $J_\lambda\left(V_0^\lambda\right)=\inf\limits_{u\in B_\rho(0)} J_\lambda\left(u\right), J_\lambda'\left(V_0^\lambda\right)=0$。

因此，V_0^λ 是 J_λ 在 $\overline{B_\rho\left(0\right)}$ 上的一个局部极小值，从而是方程(1)的解。由于

$$J_\lambda\left(V_0^\lambda\right)=\inf_{u\in B_\rho(0)} J_\lambda\left(u\right)<0=J_\lambda\left(0\right)<\beta\le J_\lambda\left(u_0^\lambda\right).$$

故 $V_0^\lambda\ne u_0^\lambda$ 且 $V_0^\lambda\ne 0$。由条件(f5)及极大值原理知，$V_0^\lambda>0$ a. e. $x\in\Omega$。故方程(1)至少有两个正解 u_0^λ 和 V_0^λ。

基金项目

国家自然科学基金项目(11401357)；陕西省教育厅科研基金项目(17JK0145)。

参考文献

[1] Zhou, H.S. (1998) Positive Solution for a Semilinear Elliptic Equations Which Is Almost Linear at Infinity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **49**, 896-906. https://doi.org/10.1007/s000330050128

[2] Miyagaki, O.H. and Souto, M.A.S. (2008) Super-Linear Problems without Ambrosetti and Rabinowitz Growth Condition. *Differential Equations*, **245**, 3628-3638. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.02.035

[3] Willem, M. and Zou, W. (2003) On a Schrodinger Equation with Periodic Potential and Spectrum Point Zero. *Indiana University Mathematics*, **52**, 109-132. https://doi.org/10.1512/iumj.2003.52.2273

[4] Chen, Z.H., Shen, Y.T. and Yao, Y.X. (2003) Some Existence Results of Solutions for p-Laplacian. *Acta Mathematica Scientia*, **23B**, 487-496. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30492-7

[5] Li, G.B. and Zhou, H.S. (2001) Asymptotically Linear Dirichlet Problem for p-Laplacian. *Nonlinear Analysis*, **43**, 1043-1055. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00243-6

[6] 高婷梅. 含有一个参数的 p-拉普拉斯方程正解的存在性[J]. 郑州大学学报(理学版), 2014, 46(3): 9-12.

[7] Schechter, M. (1991) A Variation of the Mountain Pass Lemma and Applications. *Journal of the London Mathematical Society. Second Series*, **44**, 491-502. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-44.3.491

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org