Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(7), 788-793**
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.77095

Hans汉斯

Singularity Analysis of a Class of Quadratic System (II) Equations

Lijun Li[1,2], Jianqing Lin[3]

[1]School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
[2]School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
[3]School of Mathematics and Computer, Shuozhou Advanced Normal College, Shuozhou Shanxi
Email: sxlilijun@163.com, linjianqing1983@126.com

Received: Jun. 19th, 2018; accepted: Jul. 11th, 2018; published: Jul. 18th, 2018

Abstract

In order to study the planar system, it is first required to find out the singular points, then analyze the singularity type and its stability. Therefore, the singularity behavior analysis plays an important role in the planar quadratic system. In this paper, three different methods are used to analyze the singularities of a class of quadratic system (II) equations.

Keywords

Quadratic System, (II) Equations, Singular Point, Qualitative Analysis

一类二次系统(II)类方程的奇点性态分析

李丽君[1,2]，林建青[3]

[1]山东师范大学，数学与统计学院，山东 济南
[2]临沂大学，数学与统计学院，山东 临沂
[3]朔州师范高等专科学校，数计系，山西 朔州
Email: sxlilijun@163.com, linjianqing1983@126.com

收稿日期：2018年6月19日；录用日期：2018年7月11日；发布日期：2018年7月18日

摘　要

在研究平面系统时，首先要求解出奇点，然后分析奇点类型及其稳定性态，故而奇点性态分析在平面二次系统中占有重要地位。本文运用三种不同的方法对一类二次系统(II)类方程的奇点性态进行了细致分析。

文章引用: 李丽君, 林建青. 一类二次系统(II)类方程的奇点性态分析[J]. 应用数学进展, 2018, 7(7): 788-793.
DOI: 10.12677/aam.2018.77095

关键词

二次系统，(II)类方程，奇点，定性分析

1. 引言

常微分方程是数学中的一门重要学科。对于平面系统，我们在分析它的结构时首先要求解出奇点，对于奇点的类型大致分为以下几类：结点、焦点、中心、鞍点、高阶奇点等等。众所周知，奇点的线性化系数矩阵的特征值在奇点的初等分类中起着关键的作用。在有零特征值、纯虚数特征值和全零特征值的情况下有许多判断奇点的类型及稳定性的方法，本文对一类二次系统(II)类方程的奇点性态进行了分析。关于平面二次系统，有下述叶彦谦分类：

(I)类方程：$\dot{x}=-y+dx+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x$。

(II)类方程：$\dot{x}=-y+dx+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x(1+ax),\ a\neq 0$。

(III)类方程：$\dot{x}=-y+dx+lx^2+mxy+ny^2,\ \dot{y}=x(1+ax+by),\ b\neq 0$。

对于上述三类方程，当 $d\neq 0$ 时，以 $O(0,0)$ 为粗焦点，$d<0$ 时 O 为稳定，$d>0$ 时 O 为不稳定。$d=0$ 时，O 为细焦点。

2. 预备知识

考虑平面二次系统

$$\dot{x}=P(x,y),\ \dot{y}=Q(x,y) \tag{2.1}$$

首先给出关于周期函数积分的一个引理。

引理 1 ([1])：设 $f(\theta)$ 是以 l 为周期的连续周期函数，则

$$F(\theta)=\int_0^{\theta} f(s)\mathrm{d}s=g\theta+\varphi(\theta) \tag{2.2}$$

其中 $\varphi(\theta)$ 仍以 l 为周期，$g=\frac{1}{l}\int_0^l f(\theta)\mathrm{d}\theta$。

引理 2 ([2])：设系统(2.1)右端解析，以 $(0,0)$ 为平衡点，如果存在 $(0,0)$ 的一个邻域 U 和 U 上的一个连续、可微函数 $F(x,y)$，且满足

1) F 正定：$F(0,0)=0$；$F(x,y)>0$，当 $(x,y)\neq(0,0)$。

2) $\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1)}<0(>0)$，当 $(x,y)\neq(0,0)$。

则系统(2.1)的平衡点 $(0,0)$ 渐近稳定(不稳定)。

引理 3 ([1])：关于焦点量叶彦谦给出了如下公式：

$$W_1=m(l+n)-a(b+2l).$$

$$W_2=ma(5a-m)\left[(l+n)^2(n+b)-a^2(b+2l+n)\right].$$

$$W_3 = ma^2\left[2a^2 + n(l+2n)\right]\left[(l+n)^2(n+b) - a^2(b+2l+n)\right].$$

有如下结论：

1) 当 $d=0$，$W_1 \neq 0$，则点 $O(0,0)$ 为一阶细焦点，$W_1 < 0$ 时点 $O(0,0)$ 为稳定，$W_1 > 0$ 时点 $O(0,0)$ 为不稳定；

2) 当 $d = W_1 = 0$，$W_2 \neq 0$，则点 $O(0,0)$ 为二阶细焦点，$W_2 < 0$ 时点 $O(0,0)$ 为稳定，$W_2 > 0$ 时点 $O(0,0)$ 为不稳定；

3) 当 $d = W_1 = W_2 = 0$，$W_3 \neq 0$，则点 $O(0,0)$ 为三阶细焦点，$W_3 < 0$ 时点 $O(0,0)$ 为稳定，$W_3 > 0$ 时点 $O(0,0)$ 为不稳定；

4) 当 $d = W_1 = W_2 = W_3$ 时，点 $O(0,0)$ 为中心。

3. 主要结果

本文考虑了一类二次系统(II)类方程在奇点的性态。

当 $d = l = 0$，$m = -a$，$n = -1$ 时，(II)类方程化为 $\dot{x} = -y - axy - y^2$，$\dot{y} = x + ax^2$。

解：令 $-y - axy - y^2 = 0$，$x + ax^2 = 0$。得到下列 4 个奇点，分别为

$$O(0,0), A(0,-1), B\left(-\frac{1}{a},0\right), C\left(-\frac{1}{a},-2\right).$$

1) 由于 $O(0,0)$ 是对应线性系统的中心，对其非线性系统在原点 $O(0,0)$ 的性态分析，本文给出三种不同的方法判断原系统在原点 $O(0,0)$ 的性态，对于在点 A,B,C 处的奇点性态，要作一线性变换，把它先移到原点进而再判断其稳定性态。

方法一(后继函数法)：令 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$。易计算得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \cos\theta\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \sin\theta\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sin^2\theta\cos\theta r^2 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos\theta - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sin\theta}{r} = 1 + \left(a\cos^3\theta + a\sin^2\theta\cos\theta + \sin^3\theta\right)r \end{cases}$$

消去 dt，利用泰勒公式展开，得到

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\sin^2\theta\cos\theta r^2 + \left(a\sin^2\theta\cos^4\theta + a\sin^4\theta\cos^2\theta + \sin^5\theta\cos\theta\right)r^3 + \cdots$$

对充分小的 c，求 $\theta = 0$ 时 $r = c$ 的解

$$r(\theta,c) = c + r_2(\theta)c^2 + r_3(\theta)c^3 + \cdots$$

其中 $r_2(0) = r_3(0) = \cdots = 0$，将 $r(\theta,c)$ 代入上述方程，比较 c 的同次幂系数，得

$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}\theta} = -\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}r_3}{\mathrm{d}\theta} = a\sin^2\theta\cos^4\theta + a\sin^4\theta\cos^2\theta + \sin^5\theta\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\cdot r_2(\theta)$$

$$\vdots$$

解得

$$r_2(\theta) = -\frac{1}{3}\sin^3\theta$$

$$r_3(\theta)=\frac{a}{8}\theta+\frac{a}{16}\sin 2\theta-\frac{a}{4}\sin\theta\cos^3\theta+\frac{5}{18}\sin^6\theta=g_3\theta+f_3(\theta)$$

故而可知 $r_2(\theta)$ 为周期函数，由引理 1 知 $r_3(\theta)$ 不是周期函数，其中 $f_3(\theta)$ 是周期函数，而 $g_3=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta\cos^4\theta+\sin^4\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{a}{8}\neq 0$，至此便可判定原点为原系统的一阶细焦点，当 $a>0$ 时为不稳定，$a<0$ 时为稳定。

方法二(形式级数判别法)：假设原系统具有下列级数形式的解

$$令\ F(x,y)=x^2+y^2+F_3+F_4+\cdots+F_{2m}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}=\left(2x+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)\left(-y-axy-y^2\right)+\left(2y+\frac{\partial F_3}{\partial x}+\frac{\partial F_4}{\partial x}+\cdots\right)\left(x+ax^2\right)$$

令三次项为 0，则

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}x-\frac{\partial F_3}{\partial x}y-2xy^2=0$$

取极坐标，令

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

上述化为

$$\frac{\partial F_3}{\partial\theta}-2xy^2r^3=0$$

消去 r^3，得

$$\frac{\mathrm{d}F_3(\cos\theta,\sin\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2\cos\theta\sin^2\theta$$

因为

$$\int_0^{2\pi}2\cos\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=0$$

故

$$F_3(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{2}{3}\sin^3\theta$$

所以对应的三次齐次函数为

$$F_3(x,y)=\frac{2}{3}y^3$$

四次项显然为 0，则

$$F(x,y)=x^2+y^2+\frac{2}{3}y^3$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=2ax^2y^2$$

所以 $(0,0)$ 是一阶细焦点，由引理 2 知，$a<0$ 时原系统在原点稳定，$a>0$ 时原系统在原点不稳定。

方法三(焦点量判别法)：利用焦点量公式，由于 $d=0$，焦点量 $W_1=m(l+n)-a(b+2l)=a$，所以 $(0,0)$ 为一阶细焦点，当 $W_1=a<0$ 时 $(0,0)$ 为稳定，当 $W_1=a>0$ 时 $(0,0)$ 为不稳定。

2) 接下来我们对 $A(0,-1)$ 进行分析，首先作一线性变换[3] [4] [5] [6]

$$令\begin{cases}u=x\\v=y+1\end{cases}，得\begin{cases}x=u\\y=v-1\end{cases}。$$

代入原系统，得到在 $A(0,-1)$ 处的线性化方程 $\begin{cases}\dot{u}=au+v\\\dot{v}=u\end{cases}$。

特征方程为 $\lambda^2-a\lambda-1=0$，对应的特征根为 $\lambda_{1,2}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}$，两特征根为一正一负，故而 $A(0,-1)$ 是鞍点，此解是不稳定的。

3) 同理，对于 $C\left(-\frac{1}{a},-2\right)$，作一线性变换，令 $\begin{cases}u=x+\frac{1}{a}\\v=y+2\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=u-\frac{1}{a}\\y=v-2\end{cases}$。

代入原系统，得到在 $C\left(-\frac{1}{a},-2\right)$ 处的线性化方程 $\begin{cases}\dot{u}=2au+4v\\\dot{v}=-u\end{cases}$。

特征方程为 $\lambda^2-2a\lambda-4=0$，对应的特征根为 $\lambda_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2+4}$，两特征根为一正一负，故 $C\left(-\frac{1}{a},-2\right)$ 是鞍点，此解是不稳定的。

4) 对于 $B\left(-\frac{1}{a},0\right)$，作一线性变换，令 $\begin{cases}u=x+\frac{1}{a}\\v=y\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=u-\frac{1}{a}\\y=v\end{cases}$。

代入原系统，得到在 $B\left(-\frac{1}{a},0\right)$ 处的线性化方程 $\begin{cases}\dot{u}=0\\\dot{v}=-u\end{cases}$。

由于特征根为 0，故而 $B\left(-\frac{1}{a},0\right)$ 是高阶奇点，经过线性变换得到的非线性系统为 $\begin{cases}\dot{u}=-auv-v^2\\\dot{v}=-u+au^2\end{cases}$ 接下来判断其在原点的性态。

解：由 $-u+au^2=0$ 求函数 $v=h(u)$，$h(0)=0$，令

$$h(u)=b_1u+b_2u^2+b_3u^3+\cdots$$

代入比较系数，易得：$b_1=0$，$b_2=-\frac{1}{2}$，$b_3=\frac{a}{3}$。于是

$$\begin{cases}h(u)=-\frac{1}{2}u^2+\frac{a}{3}u^3+\cdots\\\varphi(u,h(u))=-auh(u)-(h(u))^2=\frac{a}{2}u^3-\frac{4a^2+3}{12}u^4+\cdots\end{cases}$$

即 $m=3$，$g=\frac{a}{2}$。故而当 $a>0$ 时原点为不稳定结点；当 $a<0$ 时原点为鞍点。

所以对于 $B\left(-\frac{1}{a},0\right)$，当 $a>0$ 时为不稳定结点；当 $a<0$ 时为鞍点。

基金项目

山东省自然科学基金(ZR2018MA016)和国家自然科学基金(11601212)资助。

参考文献

[1] 罗定军, 张详, 董梅芳. 动力系统的定性与分支理论[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
[2] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
[3] 张芷芬,丁同仁, 黄文灶. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
[4] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995.
[5] 韩茂安, 朱德明. 微分方程分支理论[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994.
[6] 王高雄, 周之铭, 王寿松. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.