

A Predator-Prey Model with State-Dependent Feedback Control

Lu Bai¹, Qiong Liu^{2*}, TRAN VO DAI NHAN¹

¹College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi

²The Development Planning Department and Graduate School, Qinzhoushi University, Qinzhoushi Guangxi

Email: lq2018012@163.com

Received: Oct. 9th, 2018; accepted: Oct. 24th, 2018; published: Oct. 31st, 2018

Abstract

Based on the differential equation geometry theory and nonlinear dynamical system theory, we propose a generalized predator-prey model with square root response function and state feedback control strategy, and analyze the existence of the order-1 period solution of the system by the method of successor function, sufficient conditions for the existence of an order-1 period solution are obtained.

Keywords

Semi-Continuous Dynamic Systems, Successor Functions, Order-1 Periodic Solution

一类捕食 - 食饵系统的状态依赖反馈控制模型

白 露¹, 刘 琼^{2*}, 陈武大仁¹

¹广西大学数学与信息科学学院, 广西 南宁

²钦州学院发展规划处(研究生处), 广西 钦州

Email: lq2018012@163.com

收稿日期: 2018年10月9日; 录用日期: 2018年10月24日; 发布日期: 2018年10月31日

摘要

基于微分方程几何理论和非线性动力系统理论, 提出一类一般化的具有平方根响应函数捕食 - 食饵的状态反馈控制模型, 利用后继函数法分析该系统阶一周期解的存在性, 得到了存在阶一周期解的充分条件。

*通讯作者。

关键词

半连续动力系统, 后继函数, 阶一周期解

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在自然界中, 生物种群在进化过程中会受到外界环境的干扰, 这些干扰的作用时间对于种群的整个进化过程非常短暂, 持续时间可以忽略不计, 但是这些干扰却对整个种群的密度和数量造成非常大的影响。根据这些干扰的特征选择用脉冲微分方程来描述和模拟演化的过程能够更好地揭示生命现象蕴含的内在规律。特别地, 一些人类社会行为对于种群系统的管理、开发和利用等, 导致了脉冲存在方式的多样性。目前存在的脉冲实施的形式主要以时间的周期性为主, 例如周期性地喷洒农药或者周期性地释放天敌, 但是在实际的生态系统中会根据目标物种的状态来实施控制策略, 例如在害虫治理过程中当害虫达到经济阈值时才会采取喷洒农药或者释放天敌, 这种不依赖时间而是由系统解决决定发生脉冲震荡的方法称为状态依赖反馈控制, 这种控制方式在生物种群动力系统中广泛地存在[1]。

在种群生态学中, “羊群行为”是一种当捕食者被猎物吸引时捕食者只能沿着猎物群的外部边缘与猎物进行相互作用的行为[2]。由于猎物种群表现的“羊群行为”, 猎物与捕食者的相互作用项使用食饵种群密度的平方根而不是单纯的猎物种群密度, 并且相互作用项与猎物种群的平方根成正比, 恰当地模拟猎物种群自身表现出的强大的畜群系统结构和捕食者通常与沿着畜群外部走廊的猎物相互作用方式。针对此行为, Ajraldi 等在文[2]中针对“羊群行为”第一次提出了一种具有平方根响应函数的捕食 - 食饵模型(1),

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha\sqrt{xy}}{1 + t_h\alpha\sqrt{x}} \\ \frac{dy}{dt} = -sy + \frac{c\alpha\sqrt{xy}}{1 + t_h\alpha\sqrt{x}} \end{cases} \quad (1)$$

Braza 在文[3]中研究了当 $t_h = 0$ 时系统(1)在原点的动力学行为, Gimmelli 等在文[4]中研究了 $t_h = 0$ 时捕食者携带传染病的动力学行为, Banerjee 等在文[5]中研究了 $t_h = 0$ 时猎物携带传染病的动力学行为, Matia 等在文[6]中研究了 $t_h = 0$ 时一个捕食者两个猎物种群的动力学行为, Chen 等在文[7]中研究了 $t_h \neq 0$ 时系统(1)的动力学行为; 在此基础之上, Sun 等在文[8]中提出了当 $t_h = 0$ 具有平方根响应函数的捕食 - 食饵状态依赖反馈控制模型, 并研究了阶一周期解的存在性和稳定性; Liu 等在文[9]中利用后继函数法研究了 $t_h = 0$ 时阶一周期解的存在性和唯一性。基于上述学者的研究, 文章考虑更一般情况 $t_h \neq 0$ 提出具有平方根响应函数的捕食 - 食饵状态依赖反馈控制模型

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\alpha\sqrt{xy}}{1 + t_h\alpha\sqrt{x}} \\ \frac{dy}{dt} = -sy + \frac{c\alpha\sqrt{xy}}{1 + t_h\alpha\sqrt{x}} \\ \Delta x = -ax \\ \Delta y = by + c \end{cases} \left. \begin{array}{l} x \neq h \\ x = h \end{array} \right\} \quad (2)$$

其中 r, K, s, α, c, t_h 均为正常数, h 为非负实数, 其中 x 和 y 分别代表食饵和捕食者在 t 时刻的种群密度, r 和 K 分别代表食饵种群的内禀增长率和环境容纳量, s 代表捕食者的死亡率, c 代表转换因子(表示每个捕获猎物新出生的捕食者数量), t_h 代表捕食者捕食食饵的平均耗时, α 代表捕食者对食饵的搜索效率; 对于脉冲系数 $a \in (0, 1)$, $b \in (-1, +\infty)$ 和 $c \geq 0$, 当 x 达到控制阈值 h 时, 实施控制策略后, x 和 y 分别变为 $(1-a)h$ 和 $(1+b)y + c$ 。

2. 预备知识

定义 2.1 [10]: 考虑状态依赖脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, y) \\ \dot{y}(t) = g(x, y) \end{cases} \begin{cases} (x, y) \in M \\ \Delta x(t) = u(x, y) \\ \Delta y(t) = v(x, y) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $M(x, y)$ 为脉冲集, $N(x, y)$ 为相应的相位集, 并且 $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 为 $R_2^+ = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ 平面中的直线或者曲线。令初始点 $P \in \Omega = R_2^+ \setminus M$ 和 I 为满足 $I : M \rightarrow N$ 的连续脉冲映射, 则由(2.1)定义的解映射构成的动力学系统成为半连续动力系统, 并定义为 (Ω, φ, I, M) 。

注: 系统(2)的脉冲集和相集分别为 $M = \{(x, y) | x = h, y \geq 0\}$, $N = \{(x, y) | x = (1-a)h\}$, 当达到脉冲条件时, 即 $x = h$ 时, 映射为 $I : (h, y) \in M \rightarrow ((1-a)h, (1+b)y + c) \in N$ 。

定义 2.2 [11]: 假设脉冲集 M 和相集 N 都为直线, 对于任意的一点 $P \in \Omega$, 则 $O(P, t) = P' \in M$, $I(P') = P'' \in N$, 将点 P 和点 P' 的纵坐标分别为 y_P 和 $y_{P'}$, 则点 P' 为点 P 的后继点, $g(P) = y_{P'} - y_P$ 为点 P 的后继函数。

定义 2.3 [11]: 如果存在一个点 $P \in N$, 当 $T > 0$ 时使得 $P' = O(P, T) \in M$, 并且 $P'' = I(P') = P$, 则称轨道 $\tilde{O}(P, T)$ 是系统(2.1)的阶一周期解。

引理 2.1 [12]: 后继函数 $g(P)$ 是连续的。

引理 2.2 [12]: 对于系统(2.1), 如果存在点 $P, Q \in N$ 使得后继函数 $g(P)g(Q) < 0$, 则存在一点 A 介于点 P 与 Q 之间使得 $g(A) = 0$, 则系统(2.1)存在阶一周期解。

3. 阶一周期解的存在性

在上述系统(2)中, 系统的平衡点一定有 $E_0(0, 0)$, $E_K(K, 0)$ 。当 $c - st_h < 0$ 时, 只有 E_0 和 E_K 两个平衡点; 当 $c - st_h > 0$ 时, 系统不仅存在 E_0 和 E_K 两个平衡点, 还存在其他平衡点 $E_* = (x_{E_*}, y_{E_*})$, 其中

$$x_{E_*} = \frac{s^2}{(c - st_h)^2 \alpha^2}, \quad y_{E_*} = \frac{crs}{(c - st_h)^2 \alpha^2} \left(1 - \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} \right)。为了不失普遍性, 我们只在区域$$

$R_2^+ = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ 中进行研究。

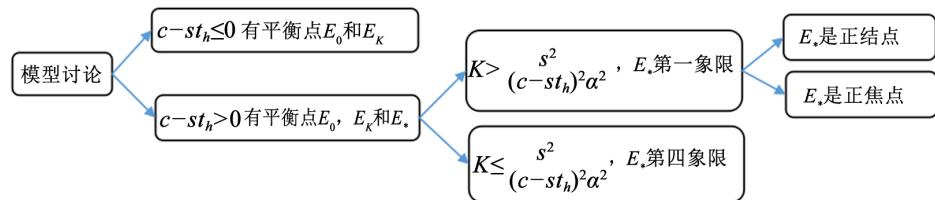
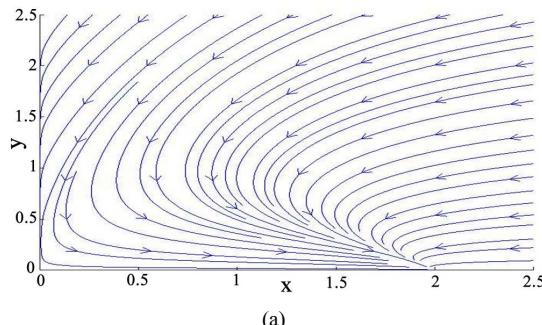
模型讨论的分类情况如图 1。

定理 3.1: 当 $c - st_h < 0$ 时, 系统(2)存在阶一周期解。

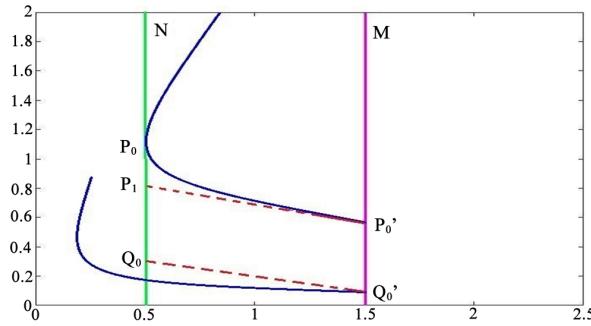
证: 如图 2 所示, 任选相集 N 上的一点 P_0 , 系统必存在一条与相集 N 相切于 P_0 点的轨道 O , 轨道 O 与脉冲集 M 相交于点 P'_0 , 即 $\varphi(P_0) = P'_0 \in M$, 在脉冲的作用下, 点 P'_0 被脉冲映射到点 P_1 , 即 $I(P'_0) = P_1$, 且 $P_1((1-a)h, y_{P_1}) \in N$, 且 $y_{P_1} = (1+b)y_{P'_0} + C$, 则点 P_0 的后继函数为 $g(P_0) = y_{P_1} - y_{P_0}$ 。

基于实际的生物意义, 系统中实施脉冲的阈值应该满足 $0 < (1-a)h < h < K$, 则后继函数有以下三种情况:

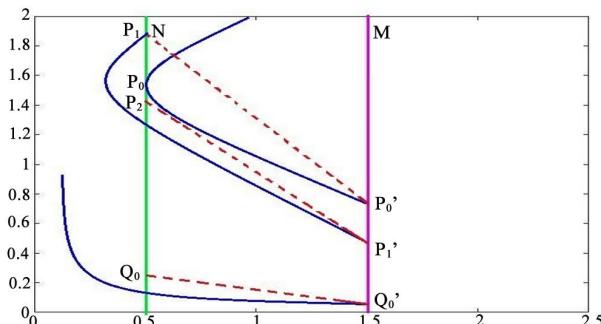
- 1) 如果 $g(P_0) = y_{P_1} - y_{P_0} = 0$ 时, 即 P_0 与 P_1 点重合, 则轨道 P_0P_0' 和线段 $P_0'P_1$ 构成阶一周期解。
- 2) 如果 $g(P_0) = y_{P_1} - y_{P_0} \neq 0$ 时, 不妨选取 $Q_0((1-a)h, y_{Q_0})$, 其中 $y_{Q_0} = \varepsilon < c$ (ε 足够小), 则存在经过点 Q_0 的轨线使得 $\varphi(Q_0) = Q_0' \in M$, 在脉冲的作用下, 点 Q_0' 被脉冲映射到 Q_1 , 即 $I(Q_0') = Q_1 \in N$, 且 $y_{Q_1} = (1-a)y_{Q_0} + c > \varepsilon$, 则 $g(Q_0) = y_{Q_1} - y_{Q_0} > 0$ 。根据引理 2.2, 该系统存在阶一周期解(如图 2b)。

**Figure 1.** Flow chart**图 1.** 流程图

(a)



(b)



(c)

Figure 2. $r = 1.5, K = 2, \alpha = 0.9, s = 0.5, c = 0.04, t_h = 0.1$ **图 2.** $r = 1.5, K = 2, \alpha = 0.9, s = 0.5, c = 0.04, t_h = 0.1$

3) 如果 $g(P_0) = y_{P_1} - y_{P_0} > 0$ 时, 令 $\varphi(P_1) = P'_1 \in M$, 在脉冲作用下, 点 P'_1 被脉冲映射到点 $P_2 \in N$, 即 $I(P'_1) = P_2 \in N$ 。由于任意两条轨线的不相交性, 可得 $y_{P_2} < y_{P_0} < y_{P_1}$, 因此 $g(P_1) = y_{P_2} - y_{P_1} < 0$ 且 $g(P_0) = y_{P_1} - y_{P_0} > 0$ 。由于 $g(P_0)g(P_1) < 0$, 必存在一点 S 满足 $g(S) = 0$, 根据引理 2.2, 该系统在 P_0 和 P_1 之间存在阶一周期解(如图 2c)。

定理 3.2: 当 $c - st_h > 0$ 且 $K \leq \frac{s^2}{(c - st_h)^2 \alpha^2}$ 时, 系统(2)存在阶一周期解。

证: 当 $K \leq \frac{s^2}{(c - st_h)^2 \alpha^2}$ 时, $y_{E_*} = \frac{crs}{(c - st_h)^2 \alpha^2} \left(1 - \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} \right) < 0$, 平衡点 E_* 位于第四象限, 在

区域 R_2^+ 仍然只存在两个平衡点, 如图 3a 所示, 基于实际的生物意义, 系统中实施脉冲的阈值应该满足 $0 < (1-a)h < h < K$, 则在相集 N 上必存在一点 P_0 使得 $g(P_0) = y_{P_1} - y_{P_0} < 0$ 时, 选取一点 $Q_0((1-a)h, y_{Q_0})$, 其中 $y_{Q_0} = \varepsilon < c$ (ε 足够小), 则 $g(Q_0) = y_{Q_1} - y_{Q_0} > 0$ 。根据引理 2.2, 该系统存在阶一周期解(如图 3b)。

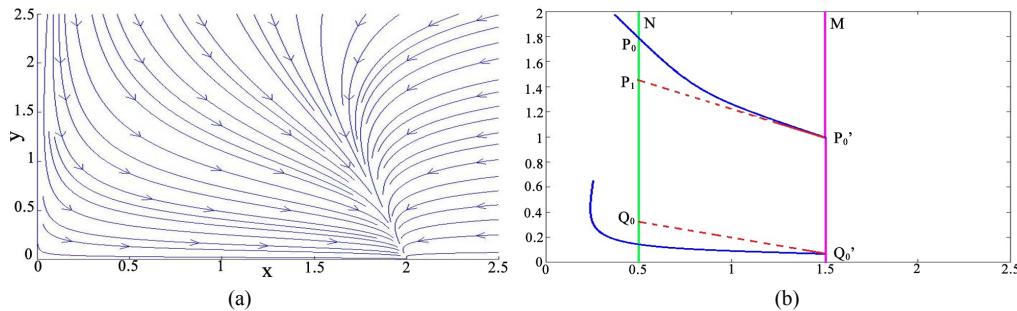


Figure 3. $r = 1.5, K = 2, \alpha = 0.2, s = 0.5, c = 0.7, t_h = 0.1$

图 3. $r = 1.5, K = 2, \alpha = 0.2, s = 0.5, c = 0.7, t_h = 0.1$

定理 3.3: 当 $c - st_h > 0$ 且 $K > \frac{s^2}{(c - st_h)^2 \alpha^2}$ 时,

1) 系统(2)的平衡点 E_* 是一个稳定的正结点, 当且仅当满足 $(H_1), (H_2)$;

2) 系统的平衡点 E_* 是一个稳定的正焦点, 当且仅当满足 $(H_1), (H_3)$;

其中 $(H_1), (H_2)$ 和 (H_3) 分别为:

$$(H_1): \frac{r(c + st_h)}{2c} - \frac{r(3c + st_h)}{2c} \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} < 0$$

$$(H_2): \left[(c + st_h) - (3c + st_h) \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} \right]^2 > \frac{8sc(c - st_h)}{r} \left(1 - \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} \right)$$

$$(H_3): \left[(c + st_h) - (3c + st_h) \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} \right]^2 < \frac{8sc(c - st_h)}{r} \left(1 - \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} \right)$$

证: 容易知平衡点 E_* 处的雅可比矩阵为

$$J(E_*) = \begin{pmatrix} \frac{r(c + st_h)}{2c} - \frac{r(c + st_h)}{2c} \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} & -\frac{s}{c} \\ \frac{r(c - st_h)}{2} \left(1 - \frac{s^2}{K(c - st_h)^2 \alpha^2} \right) & 0 \end{pmatrix}$$

则特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$, 其中 $p = \frac{r(c+st_h)}{2c} \cdot \frac{s^2}{K(c-st_h)^2\alpha^2} - \frac{r(c+st_h)}{2c}$,
 $q = \frac{sr(c-st_h)}{2c} \left(1 - \frac{s^2}{K(c-st_h)^2\alpha^2}\right)$, 因 $K > \frac{s^2}{(c-st_h)^2\alpha^2}$, 则 $q > 0$, 又因为
 $\Delta = p^2 - 4q = \left(\frac{r(c+st_h)}{2c} \cdot \frac{s^2}{K(c-st_h)^2\alpha^2} - \frac{r(c+st_h)}{2c}\right)^2 - \frac{2sr(c-st_h)}{c} \left(1 - \frac{s^2}{K(c-st_h)^2\alpha^2}\right)$, 根据文[13]可知,

当 $\Delta > 0$ 时, 平衡点 E_* 为结点, 两边同乘以 $4c^2$, 化简可得

$\left[(c+st_h) - (3c+st_h)\frac{s^2}{K(c-st_h)^2\alpha^2}\right]^2 > \frac{8sc(c-st_h)}{r} \left(1 - \frac{s^2}{K(c-st_h)^2\alpha^2}\right)$, 即条件 (H_2) ; 同理可得, 当 $\Delta < 0$ 时, 平衡点 E_* 为焦点, 化简后即为条件 (H_3) 。

定理 3.4: 当 $c-st_h > 0$ 且 $K > \frac{s^2}{(c-st_h)^2\alpha^2}$, 系统(2)的平衡点 E_* 满足条件 $(H_1), (H_2)$ 时, 如图 4,

- 1) 当 $0 < (1-a)h < h \leq x_{E_*} < K$ 时, 系统(2)存在阶一周期解;
- 2) 当 $0 < (1-a)h < x_{E_*} < h < K$ 时, 系统(2)不存在阶一周期解。

证: 基于实际的生物意义, 系统中实施脉冲的阈值应该满足 $0 < (1-a)h < x_{E_*} < h < K$, 根据平衡点与脉冲的位置关系, 可分为两种情形: $0 < (1-a)h < h \leq x_{E_*} < K$ 和 $0 < (1-a)h < x_{E_*} < h < K$ 。

情形 I: $0 < (1-a)h < h \leq x_{E_*} < K$ 。

此种情形与 $c-st_h < 0$ 的情形类似, 可用类似的方法证明系统(2)存在阶一周期解。

情形 II: $0 < (1-a)h < x_{E_*} < h < K$ 。

根据结点的性质, 所有的轨线都趋于结点, 此时轨道不与脉冲集相交, 则系统(2)不存在阶一周期解。

定理 3.5: 当 $c-st_h > 0$ 且 $K > \frac{s^2}{(c-st_h)^2\alpha^2}$, 系统(2)满足条件 $(H_1), (H_3)$ 时,

- 1) 当 $0 < (1-a)h < h \leq x_{E_*} < K$ 时, 系统(2)存在阶一周期解。
- 2) 当 $0 < (1-a)h < x_{E_*} < h < K$ 时,
 - a) 当 $x_{Q_2} \geq (1-a)h$ 时, 系统(2)存在阶一周期解。
 - b) 当 $x_{Q_2} < (1-a)h$, $y_{Q_1} \geq y_{A_1}$ 或者 $y_{Q_1} \leq y_{A_2}$ 时, 系统(2)存在阶一周期解。
 - c) 当 $x_{Q_2} < (1-a)h$ 且 $y_{A_1} < y_{Q_1} < y_{A_2}$ 时, 系统(2)不存在阶一周期解。

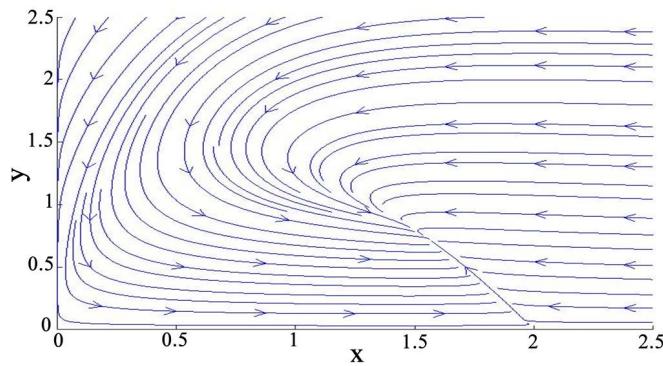


Figure 4. $r = 1.5, K = 2, \alpha = 0.6, s = 0.5, c = 0.7, t_h = 0.1$

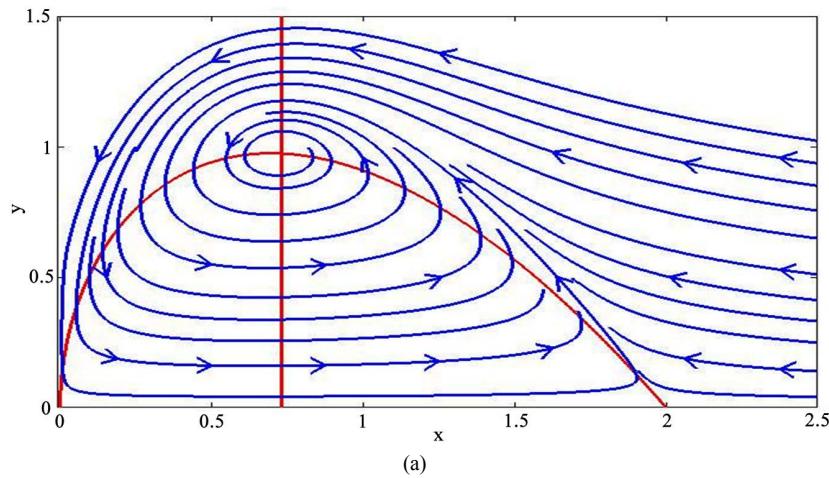
图 4. $r = 1.5, K = 2, \alpha = 0.6, s = 0.5, c = 0.7, t_h = 0.1$

证: 情形 I: $0 < (1-a)h < h \leq x_{E_*} < K$ 。

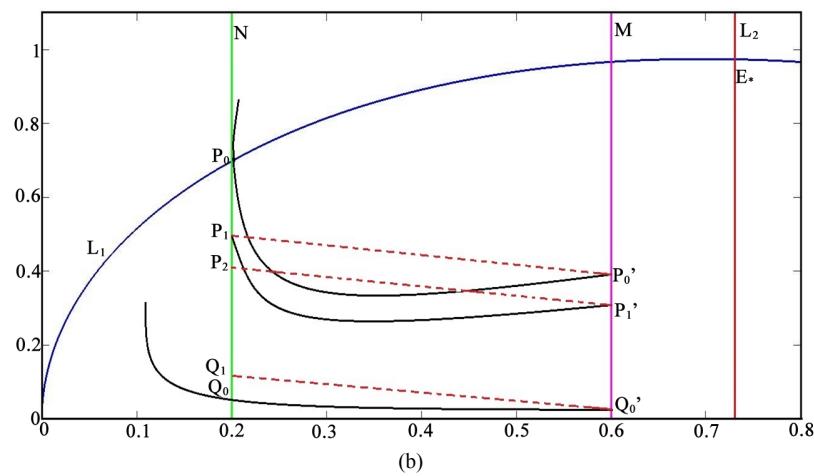
如图 5 所示, 证明类似定理 3.1, 可证明系统(2)在区域 R_2^+ 中存在阶一周期解。

情形 II: $0 < (1-a)h < x_{E_*} < h < K$ 。

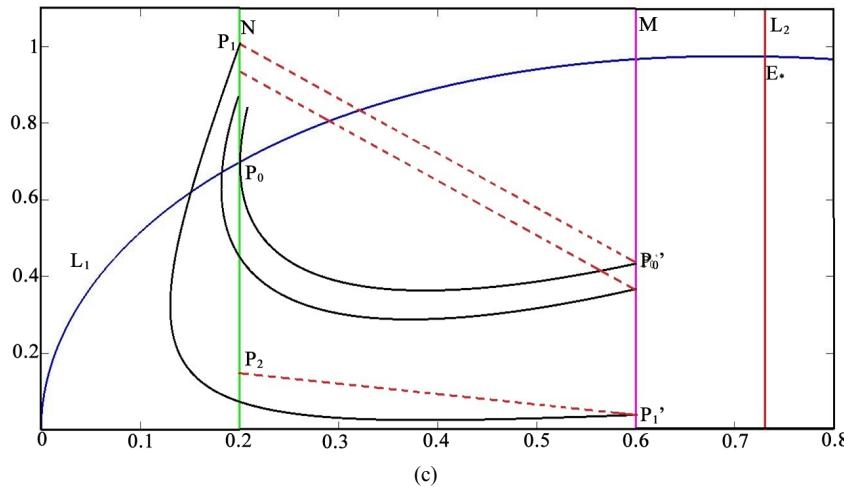
如图 5 所示, 令脉冲集 M 与 L_1 的交点为 Q_1 , 则必存在一个经过点 Q_0 的轨道 O 与脉冲集 M 相切于点 Q_1 , 并且该轨道与 L_1 的另一个交点为 $Q_2(x_{Q_2}, y_{Q_2})$, 与脉冲集 M 的交点为 $Q_0(h, y_{Q_0})$ 。



(a)



(b)



(c)

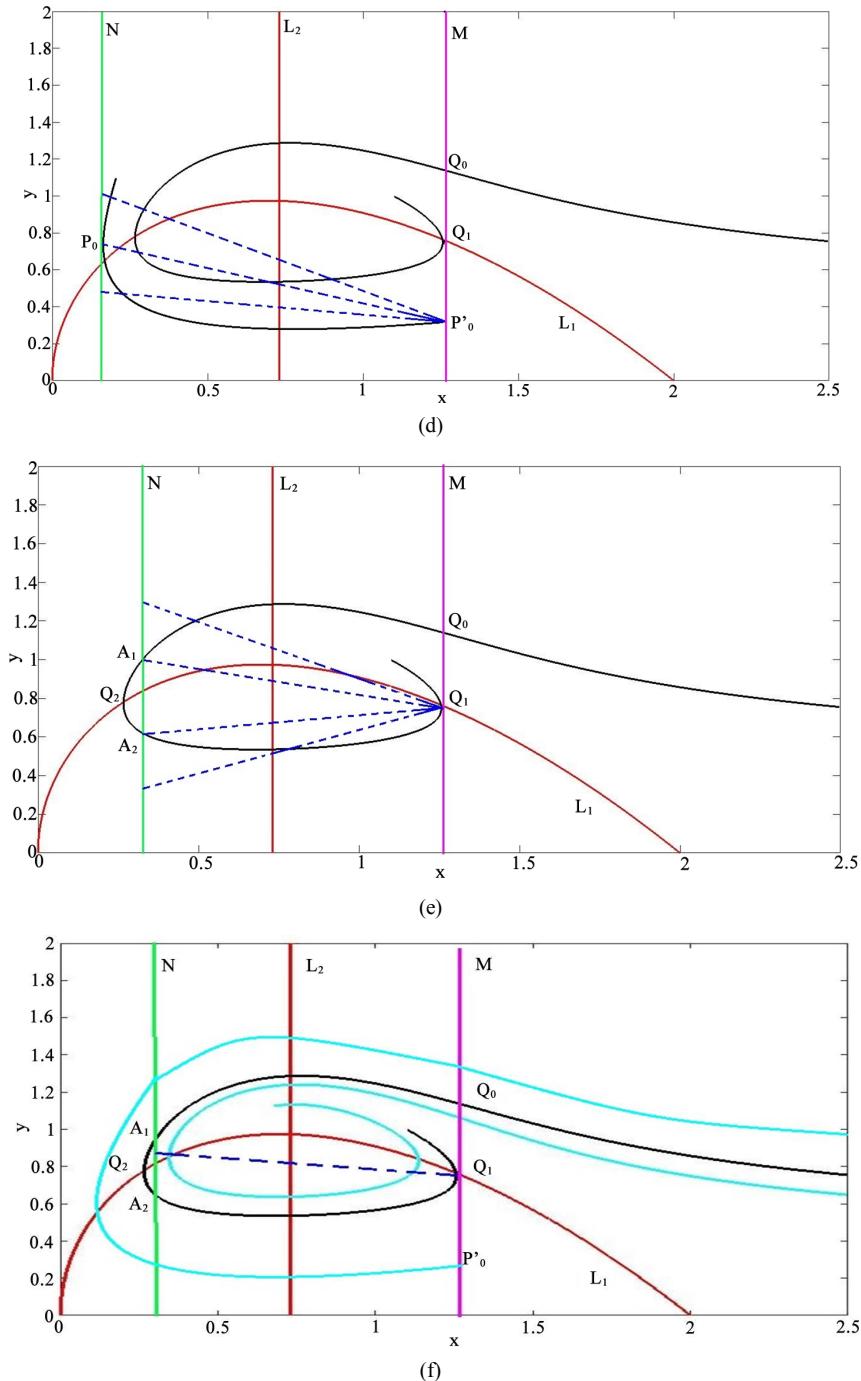


Figure 5. $r = 1.5, K = 2, \alpha = 0.9, s = 0.5, c = 0.7, t_h = 0.1$

图 5. $r = 1.5, K = 2, \alpha = 0.9, s = 0.5, c = 0.7, t_h = 0.1$

1) 当 $x_{Q_2} \geq (1-a)h$ 时, 通过点 P_0 的轨道与脉冲集 N 相切与点 P_0 , 令 $g(P_0) = P'_0$, 经过脉冲作用后, 点 P'_0 被脉冲映射到点 $P_1 \in N$, 此时阶一周期解的存在性与情形 I 相同, 所以系统(2)在该条件下存在阶一周期解(如图 5d)。

2) 当 $x_{Q_2} < (1-a)h$ 时, 经过点 Q_0 的轨道 O 与相集的交点为 $A_1((1-a)h, y_{A_1})$ 和 $A_1((1-a)h, y_{A_2})$, 点 Q_1

被脉冲映射到点 $Q'_1((1-a)h, y_{Q'_1}) \in N$ 。根据 $y_{Q'_1}$ 的大小可以分为以下三种情况进行讨论:

- a) 当 $y_{Q'_1} = y_{A_1}$ 或者 $y_{Q'_1} = y_{A_2}$ 时, 线段 Q_1F_1 和轨道 $A_1A_2Q_1$ 构成阶一周期解, 或者线段 Q_2F_2 和轨道 A_2Q_1 构成阶一周期解。
- b) 当 $y_{Q'_1} > y_{A_1}$ 或者 $y_{Q'_1} < y_{A_2}$ 时, 此时阶一周期解的存在性与情形 I 相同, 系统(2)存在阶一周期解(如图 5e)。
- c) 当 $y_{A_1} < y_{Q'_1} < y_{A_2}$ 时, 由于两条轨道的不相交性, 不经过点 Q_1 的轨道分为两种, 一种是不与脉冲集 M 相交, 另一种是与脉冲集 M 相交但是交点位于 Q_1 下方, 两者均不存在阶一周期解, 故系统(2)在此条件下不存在阶一周期解(如图 5f)。

4. 结语

本文基于脉冲动力系统的思想提出一类一般化的具有平方根响应函数捕食 - 食饵的状态反馈控制模型, 并且利用后继函数和微分方程几何理论针对不同的情形详细地讨论了阶一周期解的存在性, 得到了存在阶一周期解的充分条件, 这为状态依赖反馈控制在生态系统平衡中的应用提供理论支撑。由文章研究结果可知, 对于该类捕食 - 食饵系统, 在某些特定情形下可以通过人类干扰实施脉冲来获得更加良性的生态平衡。

基金项目

广西自然科学基金项目: 半连续动力系统之红树林害虫治理的研究(2016GXNSFAA380102)。

参考文献

- [1] 康宝林. 基于脉冲微分方程的害虫治理策略研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2016.
- [2] Ajraldi, V., Pittavino, M. and Venturino, E. (2011) Modeling Herd Behavior in Population Systems. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **12**, 2319-2338. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.02.002>
- [3] Braza, P.A. (2012) Predator-Prey Dynamics with Square Root Functional Responses. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **13**, 1837-1843. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.12.014>
- [4] Gimmelli, G., Kooi, B.W. and Venturino, E. (2015) Ecoepidemic Models with Prey Group Defense and Feeding Saturation. *Ecological Complexity*, **22**, 50-58. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2015.02.004>
- [5] Banerjee, M., Kooi, B.W. and Venturino, E. (2017) An Ecoepidemic Model with Prey Herd Behavior and Predator Feeding Saturation Response on Both Healthy and Diseased Prey. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, **12**, 133-161. <https://doi.org/10.1051/mmnp/201712208>
- [6] Matia, S.N. and Alam, S. (2013) Prey-Predator Dynamics under Herd Behavior of Prey. *Universal Journal of Applied Mathematics*, **1**, 251-257.
- [7] Chen, L.J. and Chen, F.D. (2015) Dynamical Analysis of Predator-Prey Model with Square Root Functional Response. *Nonlinear Function Analysis*, **8**.
- [8] Sun, S.L., Guo, C.H. and Qin, C. (2016) Dynamic Behaviors of a Modified Predator-Prey Model with State Dependent Impulsive Effects. *Advances in Difference Equations*, **2016**, 50. <https://doi.org/10.1186/s13662-015-0735-9>
- [9] Liu, H.X. and Cheng, H.D. (2018) Dynamic Analysis of a Prey-Predator Model with State-Dependent Control Strategy and Square Root Response Function. *Advances in Difference Equations*, **2018**, 63. <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1507-0>
- [10] 刘琼. 红松鼠保护的数学模型[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(9): 1083-1092.
- [11] 陈兰荪. 害虫治理与半连续动力系统几何理论[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2011, 12(1): 1-9.
- [12] Liu, Q., Huang, L.Z. and Chen, L.S. (2016) A Pest Management Model with State Feedback Control. *Advances in Difference Equations*, **2016**, 292. <https://doi.org/10.1186/s13662-016-0985-1>
- [13] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>

下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询

2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>

左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org