Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(11), 1374-1380
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.711160

Inertial Manifolds for a Class of Nonlinear Generalized Kirchhoff Equation

Penghui Lv*, **Jingxin Lu**

School of Information, Tourism and Culture College of Yunnan University, Lijiang Yunnan
Email: *18487279097@163.com

Received: Oct. 26th, 2018; accepted: Nov. 7th, 2018; published: Nov. 14th, 2018

Abstract

The paper studies the longtime behavior of solutions to the initial boundary value problem (IBVP) for a class of Kirchhoff models: $u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u=f(x)$. The Inertial manifolds are estimated.

Keywords

Generalized Kirchhoff Equation, Spectral Gap Condition, Inertial Manifolds

一类广义非线性Kirchhoff型方程的惯性流形

吕鹏辉*，**卢京鑫**

云南大学旅游文化学院信息学院，云南 丽江
Email: *18487279097@163.com

收稿日期：2018年10月26日；录用日期：2018年11月7日；发布日期：2018年11月14日

摘 要

该文研究了广义Kirchhoff型方程：$u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u=f(x)$的初边值问题的解的长时间行为，证明了方程的惯性流形。

*通讯作者。

文章引用：吕鹏辉，卢京鑫. 一类广义非线性 Kirchhoff 型方程的惯性流形[J]. 应用数学进展, 2018, 7(11): 1374-1380.
DOI: 10.12677/aam.2018.711160

关键词

广义Kirchhoff型方程，谱间隔条件，惯性流形

1. 引言

本文研究下列非线性 Kirchhoff 型方程的惯性流形：

$$u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t-\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)\Delta u+\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u=f(x),\quad \Omega\times R^+, \tag{1.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x);u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{1.2}$$

$$u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0,\quad (x)\in\Omega\ 。 \tag{1.3}$$

其中Ω是 R 中具有光滑边界的有界域，$p\geq 1$，且α,β都是正常数，有关$\phi\left(\|\nabla u\|^2\right)$的假设将会在后文中给出。

在非线性偏微分方程无穷维动力系统的长时间行为中，惯性流形起着相当重要的作用，当其存在时，惯性流形是包含整体吸引子的有限维不变光滑流形，并且以指数速率吸引解轨道。对于正在考虑的系统的大部分动力学性态都是在这种流形下产生的，这使得对动力学性态的研究更加简便。同时，在惯性流形的限制下，即使初始系统是无限维的，此时的系统也变成了有限维的。这种系统称为惯性系统，重现了许多初始系统的大部分动力学性态。惯性流形和相应的惯性形式对研究耗散方程的有限维动力学性态是有力的工具[1]。

现在普遍认为，惯性流形存在的一个充分条件是线性算子 A 的谱间隔条件及非线性项的 Lipschitz 连续性成立($\|f(x,t)-f(y,t)\|\leq q\|x-y\|$，其中为 q 独立于 t 的 Lipschitz 常数) [1]-[6]。

Songmu Zheng 和 Albert Milani [7]分别考虑了在一维空间中无粘性的 Cahn-Hilliard 方程的两种边值问题的奇摄动性。该文证明了基于这两种边值问题的动力系统在相空间 $H_0^1(0,\pi)\times H^{-1}(0,\pi)$ 存在指数吸引子和惯性流形。

Xu Guigui，Wang Libo 和 Lin Guoguang [8]在时滞时间很小的假设下讨论了一类时滞非线性波方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\beta\Delta\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+g(u)=f(x)+h(t,u_t),t>0,\alpha>0,\beta>0$ 的惯性流形的存在性。

Bin Zhao 和 Guoguang Lin [9]考虑了基于 Cahn-Hilliard 的奇异摄动方程上，具有双重扰动的 Cahn-Hilliard 方程 $\varepsilon(u_{tt}+u_t)-\alpha\Delta u_t+\Delta^2 u_t-\Delta u^k=f,k\geq 2$ 的惯性流形的存在性。

Guoguang Lin，Penghui Lv 和 Ruijin Lou [10]利用了离散挤压性和谱间隔条件研究了一类广义非线性 Kirchhoff-Boussinesq 型方程 $u_{tt}+\alpha u_t-\beta\Delta u_t+\Delta^2 u=div\left(g\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right)+\Delta h(u)+f(x)$ 的指数吸引子和惯性流形。

本文主要研究了(1.1)~(1.3)一类广义非线性 Kirchhoff 型方程的惯性流形，通过论证谱间隔条件成立条件，得到惯性流形存在定理。

本文结构如下：在第一部分中，简要给出惯性流形相比整体吸引子的优势及部分学者的研究成果；在第二部分中，给出主要记号；在第三部分中，对方程惯性流形的讨论。

2. 记号

为叙述方便，我们引入下列符号：

$$L^p = L^p(\Omega),\quad W^{k.p} = W^{k.p}(\Omega),\quad H^k = W^{k,2},\quad H = L^2,\quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2},$$
$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p},\quad V_2 = H^2 \cap H_0^1,\quad V_{2'} = V_{-2},\quad X_1 = V_2 \times H_0^1$$

其中 $p \ge 1$。$W^{-1.p'}$ 为 $W_0^{1.p}$ 的共轭空间，$p' = \dfrac{p}{p-1}$。H^k 是 L^2-内积下的 Sobolev 空间。同时 H_0^k 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 H^k 中的闭包($k > 0$)。符号 $(\cdot,\cdot)$ 表示 H-内积。

定义算子 $A: V_2 \to V_{2'}$，

$$(Au, v) = (\Delta u, \Delta v),\quad u, v \in V_2$$

则算子 $A^s(s \in R)$ 是正定的且空间 $V_s = D\left(A^{\frac{s}{4}}\right)$ 是 Hilbert 空间

$$(u,v)_s = \left(A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}v\right),\quad \text{for } \|u\|_{V_s} = \left\|A^{\frac{s}{4}}u\right\|$$

特别的，

$$\|u\|_{V_2} = \left\|A^{\frac{1}{2}}u\right\| = \|\Delta u\|,\quad \|u\|_{V_1} = \left\|A^{\frac{1}{4}}u\right\| = \|\nabla u\|$$

$\lambda_1(>0)$ 是 $-\Delta$ 在 Ω 上带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值。

3. 惯性流形

引理 3.1 [11]：假定

(H1) $\phi \in C^1(\mathbf{R}^+)$，$\phi'(s) \ge 0$，$\phi(0) \triangleq \phi_0 \ge 1$，

(H2) $\begin{cases} 1 \le p < +\infty & N = 1,2, \\ 1 \le p \le \dfrac{N-1}{N-2} & N \ge 3, \end{cases}$

(H2) $f \in H$，$(u_0, u_1) \in V_2 \times H_0^1$。则问题(1.1)~(1.3)的解 (u,v) 满足

$$H_3(t) \le H_3(0)\mathrm{e}^{-\delta t} + \frac{C_5}{\delta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\delta t}\right)$$

$$\beta\int_0^T \|\Delta u_t\|^2\,\mathrm{d}s \le H_3(0) + \int_0^T C_5\,\mathrm{d}s$$

并且问题(1.1)~(1.3)存在唯一解 $u \in L^\infty(0,+\infty;V_2)$，$u_t \in L^\infty\left(0,+\infty;H_0^1\right) \cap L^2(0,T;V_2)$。

评论 3.1 [11]：定义映射 $S(t): X \to X$，$S(t)(u_0,u_1) = (u(t), u_t(t))$，其中 u 是问题(1.1)~(1.3)的解。根据引理 3.1，$S(t)$ 构成 X 上的连续算子半群。

定义 3.1：设 $S = S(t)_{t\ge0}$ 是 Banach 空间 X 上的解半群。一个子集 $\mu \subset X$ 满足：

1) μ 是有限维 Lipschitz 流形，
2) μ 是正不变的，即 $S(t)\mu \subset \mu, t \ge 0$，
3) μ 以指数吸引解轨道，即 $\forall x \in X$，存在常数 $\eta > 0, C > 0$，使得

$$dist\left(S(t)x, \mu\right) \le C\mathrm{e}^{-\eta t}, t \ge 0$$

则称 μ 是关于 $S = S(t)_{t\ge0}$ 的一个惯性流形。

设算子 $A:X\to X$，设 $F\in C_b\left(X,X\right)$ 满足 Lipschitz 条件：

$$\left\|F\left(U\right)-F\left(V\right)\right\|_X\le l_F\left\|U-V\right\|_X,\ U,V\in X\text{。}\tag{3.1}$$

算子 A 称为满足关于 F 的谱间隔条件，如果算子 A 的谱可以分成两部分 σ_1 和 σ_2 且 σ_1 是有限的。

$$\Lambda_1=\sup\left\{\operatorname{Re}\lambda\mid\lambda\in\sigma_1\right\},\ \Lambda_2=\inf\left\{\operatorname{Re}\lambda\mid\lambda\in\sigma_2\right\},\tag{3.2}$$

$$X_i=span\left\{w_j\mid j\in\sigma_i\right\},\ i=1,2\tag{3.3}$$

且有

$$\lambda_2-\lambda_1>4l_F\text{。}\tag{3.4}$$

$$\text{这里满足正交分解：}\ X=X_1\oplus X_2,\tag{3.5}$$

其中投影是 $P_1:X\to X_1,P_2:X\to X_2$。

方程(1.1)等价于下列一阶发展方程(研究 $\phi'=0$ 时的情况)。

$$U_t+AU=F\left(U\right),\ U\in X,\tag{3.6}$$

其中：

$$U=\left(u,v\right)=\left(u,u_t\right)$$

$$A=\begin{pmatrix}0&-I\\-\phi\Delta&\alpha-\beta\Delta\end{pmatrix},\quad F\left(U\right)=\begin{pmatrix}0\\f-\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u\end{pmatrix}\tag{3.7}$$

令 $D\left(A\right)=\left\{u\in H\mid u\in H^2\cap H_0^1;\Delta u\in H\right\}\times H^1$，$X=\left(H^2\cap H_0^1\right)\times H_0^1$。

对(3.6)中矩阵型算子的特征值，先定义 X 中的内积

$$\left\langle U,V\right\rangle_X=\left(\Delta u,\Delta\overline{y}\right)+\left(-\Delta v,\overline{z}\right),\tag{3.8}$$

$U=\left(u,v\right),V=\left(y,z\right),\overline{y},\overline{z}$ 分别表示 y,z 的共轭。

对 $U\in D\left(A\right)$，计算得

$$\begin{aligned}\left\langle AU,V\right\rangle_Z&=-\left(\Delta v,\Delta u\right)+\left(-\Delta\left(-\phi\Delta u+\alpha v-\beta\Delta v\right),v\right)\\&=-\left(\Delta v,\Delta u\right)+\left(-\phi\Delta u+\alpha v-\beta\Delta v,-\Delta v\right)\\&=-\left(\phi-1\right)\left(\Delta v,\Delta u\right)+\alpha\left\|\nabla v\right\|^2+\beta\left\|\nabla v\right\|^2\end{aligned}\tag{3.9}$$

又由 $\phi\ge1$，所以算子 A 是单调递增且 $\left\langle AU,U\right\rangle_Z$ 是非负实数。

我们给出 A 的特征方程

$$AU=\lambda U,U=\left(u,v\right)\in X$$

等价于

$$\begin{cases}-v=\lambda u,\\-\phi\Delta u+\alpha v-\beta\Delta v=\lambda v,\end{cases}\tag{3.10}$$

从而 U 满足特征值问题：

$$\begin{cases}-\phi\Delta u+\beta\lambda\Delta u=\left(\alpha\lambda-\lambda^2\right)u,\\u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{3.11}$$

由(3.10)知，相应的特征函数

$$U_k^{\pm}=\left(u_k,v_k\right)=\left(u_k,-\lambda_k^{\pm}u_k\right),\quad u_k\left(x\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(jx\right),\tag{3.12}$$

对任意的整数 $j\geq 1$，有

$$\left\|\nabla u_k\right\|=j,\left\|\Delta u_k\right\|=j^2,\left\|u_k\right\|=1\text{。}\tag{3.13}$$

因此将 $u_k\left(x\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(jx\right)$ 带入(3.11)中 u 的位置，两边用 $u_k\left(x\right)$ 取内积，并将(3.13)带入得到特征值

$$\lambda_k^{\pm}=\frac{\left(\alpha+\beta j^2\right)\pm\sqrt{\left(\alpha+\beta j^2\right)^2-4\phi j^2}}{2}\text{。}\tag{3.14}$$

引理 3.2： $g=\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u$ 是 $H^2\cap H_0^1\to H_0^1$ 的整体有界和整体 Lipschitz 函数。

证明：

$$\begin{aligned}\left\|g\left(u\right)-g\left(v\right)\right\|_{H_0^1}&=\left\|\left(1+|u|^2\right)^{p-1}u-\left(1+|v|^2\right)^{p-1}v\right\|_{H_0^1}\\&\leq C\left\|\left(|u|^{2p-2}+|v|^{2p-2}\right)\left(u-v\right)\right\|_{H_0^1}\\&\leq C\left(\|u\|_\infty^{4p-6}-\|v\|_\infty^{4p-6}\right)\left(\|\nabla u\|_\infty^2+\|\nabla v\|_\infty^2\right)\left\|\nabla\left(u-v\right)\right\|\\&\leq C\left\|\Delta\left(u-v\right)\right\|\end{aligned}$$

定理 3.1： 设 l 是 g 的 Lipschitz 常数， $\alpha\geq 1,\beta>\phi$ 且 $N\in N^*$ 满足

$$2\beta N+1\geq\frac{8l}{\beta-\phi},\tag{3.15}$$

则算子 A 满足谱间隔条件(3.4)。

证明：由 $\lambda_k^-=\dfrac{\left(\alpha+\beta j^2\right)-\sqrt{\left(\alpha+\beta j^2\right)^2-4\phi j^2}}{2}$ 是减函数。

令 N 满足(3.15)，可将 A 的特征值分解为

$$\sigma_1=\left\{\lambda_j^-,\lambda_k^{\pm}\mid\max\left(\lambda_j^-,\lambda_k^{\pm}\right)\leq\lambda_N^+\right\},\quad\sigma_2=\left\{\lambda_j^+\mid\lambda_j^-\leq\lambda_N^+<\lambda_j^+\right\},\tag{3.16}$$

相应的 X 可分解为

$$X_1=span\left\{v_j^-,v_k^{\pm}\mid\lambda_j^-,\lambda_k^{\pm}\in\sigma_1\right\},\quad X_2=span\left\{v_j^+\mid\lambda_j^+\in\sigma_2\right\}\text{。}\tag{3.17}$$

下面将找出正交空间，对 $\Lambda_1=\lambda_N^+$ 和 $\Lambda_2=\lambda_{N+1}^+$，将证明(3.4)成立。

进一步分解 $X_1=X_c\oplus X_k$

$$X_c=span\left\{v_j^-\mid\lambda_j^-\leq\lambda_N^+<\lambda_j^+\right\},$$

$$X_k=span\left\{v_k^{\pm}\mid\lambda_k^{\pm}\leq\lambda_N^+\right\}\text{。}\tag{3.18}$$

由 $\lambda_j^+\lambda_j^-=\phi j^2$ 得

$$\left\langle U_j^+,U_j^-\right\rangle_X=\left\|\Delta u_j\right\|^2+\lambda_j^+\lambda_j^-\left\|\nabla u_j\right\|^2=\left(1+\phi\right)j^4\text{。}\tag{3.19}$$

所以 X_c 与 X_1 不正交， X_2 与 X_k 正交。

要证 X_1 与 X_2 正交，则需要重新定义 X 的内积，并与(3.9)等价。

定义 $\langle\langle U,V\rangle\rangle_X=\alpha(\nabla u,\nabla\overline{y})+(\beta-\phi)(\Delta u,\Delta\overline{y})+(\overline{z},-\Delta u)+(\overline{v},-\Delta y)+\left((-\Delta)^{\frac{1}{2}}z,(-\Delta)^{\frac{1}{2}}v\right)$。

由 $U\in Z$ 得

$$\begin{aligned}\langle\langle U,U\rangle\rangle_X&=\alpha\|\nabla u\|^2+(\beta-\phi)\|\Delta u\|^2+2(v,-\Delta u)+\|\nabla u\|^2\\&\ge\alpha\|\nabla u\|^2+(\beta-\phi)\|\Delta u\|^2-\|\nabla u\|^2-\|\nabla v\|^2+\|\nabla u\|^2\\&\ge(\alpha-1)\|\nabla u\|^2+(\beta-\phi)\|\Delta u\|^2\end{aligned}\text{。}$$

由 $\alpha\ge1,\beta>\phi$，所以 $\langle\langle U,V\rangle\rangle_X\ge0$。

$$\begin{aligned}\langle\langle U_j^+,U_j^-\rangle\rangle_X&=\alpha\|\nabla u_j\|^2+(\beta-\phi)\|\Delta u_j\|^2-(\lambda_j^++\lambda_j^-)\|\nabla u_j\|^2+\lambda_j^+\lambda_j^-\|\nabla u_j\|^2\\&=\alpha j^2+(\beta-\phi)j^4-(\alpha+\beta j^2)j^2+\phi j^4=0\end{aligned}\text{。}$$

所以在重新定义的内积下，X_c 与 X_2 正交，即 X_2,X_1 正交。

下面估计 $F(U)=(0,g(u))$ 的 Lipschitz 常数 l_F。

$$\|F(U)-F(V)\|_X=\|g(u)-g(v)\|_{H_0^1}\le l\|\Delta(u-v)\|\le\frac{l}{\beta-\phi}\|U-V\|_X\text{。}$$

因此

$$l_F\le\frac{l}{\beta-\phi}\text{。}$$

由此只需说明 $\lambda_{N+1}^+-\lambda_N^+\ge\dfrac{4l}{\beta-\phi}$ 成立，则谱间隔条件(3.4)成立。

$$\lambda_{N+1}^+=\frac{\alpha+\beta(N+1)^2+\sqrt{\left(\alpha+\beta(N+1)^2\right)^2-4\phi(N+1)^2}}{2},$$

$$\lambda_{N+1}^+=\frac{\alpha+\beta N^2+\sqrt{\left(\alpha+\beta N^2\right)^2-4\phi N^2}}{2},$$

$$\lambda_{N+1}^+-\lambda_N^+\ge\beta N+\frac{1}{2}\text{。}$$

由(3.15)得：

$$\lambda_{N+1}^+-\lambda_N^+\ge\frac{4l}{\beta-\phi}\text{。}$$

到此说明谱间隔条件(3.4)成立。

综上我们有惯性流形的存在性定理。

定理 3.2： 若 $\alpha>1,\beta>\phi$，其中 ϕ 是一个常数，则方程(1.1)存在惯性流形 μ，具有形式

$$\mu=graph(\Phi)=\{\xi+\phi(\xi);\xi\in X\}\text{。}$$

其中 $\Phi:X_1\to X_2$ 是 Lipschitz 连续的，Lipschitz 常数为 l_F， $graph$ 表示图。

参考文献

[1] Temam, R. (1990) Intertial Manifolds. *The Mathematical Intelligencer*, **12**, No. 4.

[2] Marion, M. (1989) Intertial Manifolds Associated to Partly Dissipative Reaction-Diffusion Systems. *Journal of Ma-*

thematical Analysis and Applications, **143**, 295-326. https://doi.org/10.1016/0022-247X(89)90043-7

[3] Rezounenko, A.V. (2002) Inertial Manifolds for Retarded Second Order in Time Evolution Equations. *Nonlinear Analysis*, **51**, 1045-1054. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00878-1

[4] Huy, N.T. (2012) Inertial Manifolds for Semi-Linear Parbolic Equations in Admissible Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **386**, 894-909. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.051

[5] Foias, C. (1988) Inertial Manifolds for Nonlinear Evolutionary Equations. *Journal of Differential Equations*, **73**, 309-353. https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90110-6

[6] Liu, W.J. and Haller, G. (2004) Inertial Manifolds and Completeness of Eigenmodes for Unsteady Magnetic Dynamos. *Physica D*, **194**, 297-319. https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.03.002

[7] Zheng, S.M. and Milani, A. (2004) Exponential Attractors and Inertial Manifolds for Singular Perturbations of the Cahn-Hilliard Equations. *Nonlinear Analysis*, **57**, 843-877. https://doi.org/10.1016/j.na.2004.03.023

[8] Xu, G.G., Wang, L.B. and Lin, G.G. (2014) Inertial Manifolds for a Class of the Retarded Nonlinear Wave Equations. *Mathematica Applicata*, **27**, 887-891.

[9] Zhao, B. and Lin, G.G. (2013) Inertial Manifolds for Dual Perturbations of the Cahn-Hilliard Equations. *Far East Journal of Applied Mathematics*, **77**, 113-136.

[10] Lin, G.G., Lv, P.H. and Lou, R.J. (2017) Exponential Attractors and Inertial Manifolds for a Class of Nonlinear Generalized Kirchhoff-Boussinesq Model. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, **101**, 1913-1945. https://doi.org/10.17654/MS101091913

[11] Lv, P.H., Lu, J.X. and Lin, G.G. (2016) Global Attractors for a Class of Nonlinear Generalized Kirchhoff Models. *Journal of Advances in Mathematics*, **12**, 6452-6462.