Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(11), 1369-1373**
Published Online November 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.711159

Hans汉斯

Minimum Polynomial of Matrix and Its Application

Fei Wang, Heling Wang

Xinjiang University of Finance and Economics, Urumqi Xinjiang
Email: 992018350@qq.com

Received: Oct. 28th, 2018; accepted: Nov. 7th, 2018; published: Nov. 14th, 2018

Abstract

Based on the theory of minimum polynomials, this paper introduces the method of finding the minimum polynomials with characteristic polynomials, and sums up the application of minimum polynomials in simplifying arbitrary matrix polynomials, finding dimensions and bases of linear spaces, solving matrix equations, and diagonalizing judgment matrices.

Keywords

Matrix, Minimum Polynomial, Characteristic Polynomial

矩阵的最小多项式及其应用

王　菲，王合玲

新疆财经大学，新疆 乌鲁木齐
Email: 992018350@qq.com

收稿日期：2018年10月28日；录用日期：2018年11月7日；发布日期：2018年11月14日

摘　要

基于最小多项式的理论，介绍了用特征多项式求最小多项式的方法，归纳了最小多项式在简化任意矩阵多项式、求线性空间的维数和基、解矩阵方程，以及判断矩阵对角化这四方面的应用。

关键词

矩阵，最小多项式，特征多项式

文章引用: 王菲, 王合玲. 矩阵的最小多项式及其应用[J]. 应用数学进展, 2018, 7(11): 1369-1373.
DOI: 10.12677/aam.2018.711159

1. 前言

在求解一些代数类问题，例如求出矩阵函数的解、求出矩阵函数的逆、解微分方程组，尤其是在求解常系数线性微分方程组初值问题的过程当中，运用矩阵最小多项式能达到简化运算和快速计算标准矩阵的目的。最小多项式同时也是多项式理论中的重要内容，它在矩阵对角化的判断、矩阵是否相似以及在线性变换结构中的研究都有相应的运用。最小多项式除了在矩阵理论方面有所应用，在线性控制系统等其他领域的应用十分也广泛。

2. 利用特征多项式求最小多项式

定义 1.1 [1]：设 $A \in F^{n \times n}$，行列式 $f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$，称为矩阵 A 的特征多项式.

定理 1.1 [2]：如果 n 阶矩阵 A 的特征多项式能够分解表示成不同一次因式方幂的乘积

$$f_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

其中 λ_i 是 A 的相异的特征值，n_i 是特征值 λ_i 的重数，且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$，则 A 的最小多项式具有如下形式

$$m_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s}, \text{其中 } d_i \le n_i\ (i = 1,2,\ldots,s).$$

求最小多项式 $m_A(\lambda)$ 的步骤如下：

步骤 1：找到矩阵 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$.

步骤 2：将特征多项式 $f_A(\lambda)$ 化成标准分解式 $f_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$.

步骤 3：取包含一切不同因式幂积，按次数从低到高的顺序验证这些因式是否为 A 的零化多项式，其中使 A 零化的次数最低的幂积为矩阵 A 的最小多项式。

例题 1.1：求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的最小多项式 $m_A(\lambda)$.

解：矩阵 A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

由定理 1.1 可知，矩阵 A 的最小多项式可能为：

$$m_1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2), \quad m_2(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

因为

$$m_1(A) = (A-E)(A-2E) = O,$$

所以 A 的最小多项式为

$$m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2).$$

3. 最小多项式的应用

3.1. 化简任意矩阵多项式

求解矩阵函数时，如果多项式次数较高，直接计算 $f(A)$ 会比较繁琐，而利用最小多项式可以降低 $f(\lambda)$ 的次数，再将矩阵 A 带入求解，使运算达到了简化的目的。

利用最小多项式化简任意矩阵多项式的步骤如下：

步骤 1：先求出矩阵 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$.

步骤 2：用 $m_A(\lambda)$ 除 $f(\lambda)$，得商式 $q(\lambda)$ 和余式 $r(\lambda)$，即 $f(\lambda)=q(\lambda)m_A(\lambda)+r(\lambda)$。

步骤 3：由 $m(A)=O$ 且 $f(A)=q(A)m(A)+r(A)$, 可得 $f(A)=r(A)$.

例题 2.1：已知 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{bmatrix}$，$f(\lambda)=\lambda^6+2\lambda^5-\lambda^4+3\lambda^2-2\lambda+1$，求 $f(A)$.

解：矩阵 A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=(\lambda-2)^3,$$

矩阵 A 的最小多项式可能为：

$$m_1(\lambda)=(\lambda-2)，\quad m_2(\lambda)=(\lambda-2)^2，\quad m_3(\lambda)=(\lambda-2)^3,$$

由于

$$m_1(A)=(A-2E)\neq O，\quad m_2(A)=(A-2E)^2=O,$$

因此矩阵 A 的最小多项式为

$$m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2,$$

设

$$f(\lambda)=q(\lambda)m_A(\lambda)+r(\lambda),$$

且通过计算可得

$$r(\lambda)=330\lambda-539,$$

因此

$$f(A)=r(A)=330A-539E=\begin{bmatrix}121&0&0\\330&-209&330\\330&-330&451\end{bmatrix}。$$

3.2. 求线性空间的维数和一组基

在代数中一般通过线性空间的极大无关组表示线性空间的基，计算比较繁琐，利用最小多项式求线性空间的维数和一组基，可以使过程更加简便。

定理 2.1 [3]：设 $A\in F^{n\times n}$ 的全体多项式形成的线性空间是 W，并且 $m_A(\lambda)$ 是 A 的最小多项式，则有

1) W 的维数等于 $m_A(\lambda)$ 的次数 k，即 $\dim(W)=\partial(m_A(\lambda))=k$；

2) $E,A,A^2,\cdots,A^{k-1}$ 为 W 的一组。

例题 2.2：矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & w & 0\\ 0 & 0 & w^2\end{bmatrix}$，其中 $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$W=\left\{f(\lambda)\middle|f(\lambda)\in R(\lambda)\right\}$，其中 $f(\lambda)$ 为 A 的特征多项式，求 W 的维数及其一组基。

解：矩阵 A 的特征多项式为

$$f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-w)\left(\lambda-w^2\right),$$

由于

$$w^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\quad w^3=1,$$

则 $f(\lambda)$ 有三个互异的特征值，矩阵 A 的最小多项式为

$$m_A(\lambda)=f_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-w)\left(\lambda-w^2\right),$$

由于

$$\dim(W)=\partial\left(m_A(\lambda)\right)=3,$$

因此 E,A,A^2 是矩阵 A 的全体多项式生成的线性空间 W 的一组基。

3.3. 求解矩阵方程

对于矩阵方程 $AX-XB=C$ 的求解方法，通过矩阵的最小多项式来求得矩阵方程 $AX-XB=C$ 的解，使方程的结果更加简洁。

定义 2.1 [4]：设两个线性空间 X、Y，T 是 X 到 Y 的映射，T 的定义域和值域分别记录为 $D(T)$ 和 $R(T)$，任取 $\alpha,\beta,x_1,x_2\in D(T)$，若 $\alpha x_1+\beta x_2\in D(T)$，$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2$，那么称 T 是以 $D(T)$ 为定义域的 X 到 Y 的线性算子。

定理 2.2 [5]：设 $A,B,X\in F^{n\times n}$，若 $\tilde{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 是 A,B 在 $F^{n\times n}$ 到 $F^{n\times n}$ 的线性算子则有 $\tilde{A}X=AX$，$\underset{\sim}{B}X=BX$。

定理 2.3 [5]：由 $m_{\tilde{A}}(\lambda)=m_A(\lambda)m_{\underset{\sim}{B}}(\lambda)=m_B(\lambda)$ 可知，方程 $AX-XB=C$ 与方程 $\left(\tilde{A}-\underset{\sim}{B}\right)X=C$ 等价。

定理 2.4 [5]：$\tilde{A}-\underset{\sim}{B}$ 可逆的充要条件是

$$\left(m_A(\lambda),m_B(\lambda)\right)=1,$$

且

$$X=(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}C=-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{s=0}^{k}\alpha_{r-s}A^{r-1-k}CB^{k-s}u(B),$$

其中 r 为的 $m_A(\lambda)$ 次数，$u(\lambda)$ 满足

$$m_A(\lambda)u(\lambda)+m_B(\lambda)v(\lambda)=1。$$

例题 2.3 已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

求解矩阵方程 $AX-XB=C$。

解：矩阵 A,B 的最小多项式分别为

$$m_A(\lambda)=\lambda^3+2\lambda\text{，}\quad m_B(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+1\text{，}$$

由于

$$m_A(\lambda)(-\lambda^2-\lambda-1)+m_B(\lambda)(\lambda^2+1)=1\text{，}$$

取 $u(\lambda)=-(\lambda^2+\lambda+1)$，从而

$$u(B)=-(B^2+B+1)=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\text{，}$$

将 $\alpha_1=2,\alpha_2=0,\alpha_3=1$，代入

$$X=(\tilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}C=-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{s=0}^{k}\alpha_{r-s}A^{r-1-k}CB^{k-s}u(B)\text{，}$$

得

$$X=-(-A^2C+ACB+CB^2+2C)u(B)=\begin{bmatrix}3&1&1\\-3&0&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\text{。}$$

3.4. 在矩阵对角化中的应用

利用最小多项式的相关理论得到矩阵能够对角化的一个充要条件，可以较快地判断矩阵能否对角化。

定理 2.5 [6]：n 阶矩阵 A 的最小多项式无重根的充分必要条件是矩阵 A 能够对角化。

例题 2.4：判断在以下两种情况下矩阵 A 是否能够对角化。

1) $A^2=E$；2) $A^2=A$。

解：1) $A^2=E$，$f(\lambda)=\lambda^2-1=(\lambda-1)(\lambda+1)$ 为 A 的零化多项式，因为特征方程无重根，所以 A 能够对角化。

2) $A^2=A$，$f(\lambda)=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)$ 为 A 的零化多项式，因为特征方程无重根，所以 A 能够对角化。

4. 结论

本文利用特征多项式的标准分解式，求矩阵的最小多项式。结合最小多项式的相关定理，概括了最小多项式的五种应用，包括：通过带余除法，降低多项式的次数，化简任意多项式；根据最小多项式的一些定理，更加简洁的得到线性空间的维数及其一组基；引用线性算子 $\tilde{A}$、$\underset{\sim}{B}$，并利用 $\tilde{A}-\underset{\sim}{B}$ 可逆的充要条件，求解矩阵方程 $AX-XB=C$；通过判断矩阵的最小多项式有无重根来判断矩阵 A 能否对角化，并分别结合例题，列举了最小多项式在这四方面的具体应用。矩阵最小多项式的应用还可以推广到其他领域，因此对于矩阵最小多项式的应用还可以进一步研究。

参考文献

[1] 龙小胖. 最小多项式的求法[J]. 井冈山大学学报(社会科学版), 2004, 25(5): 54-55.

[2] 夏必腊. 方阵最小多项式的性质与求法[J]. 高等数学研究, 2003, 6(3): 34-39.

[3] 陕振沛, 姚景景, 陈华平. 基于矩阵特征多项式与最小多项式相关的探讨[J]. 六盘水师范院学报, 2013, 25(5): 55-58.

[4] 胡瑞平. 矩阵方程 $AX-XB=C$ 的最小多项式解法[J]. 应用数学学报, 1993, 16(3): 295-301.

[5] 王莲花, 王建平, 李艳华. 最小多项式的性质及其应用[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2004, 13(2): 12-13.

[6] 靳艳芳. 最小多项式的性质、求法和应用[J]. 综合学术论坛, 2010, 17(5): 209-212.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org