Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(2), 227-234**
Published Online February 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.82026

Hans汉斯

Existence of Multiple Positive Solutions of Differential Equation System with Two-Point Boundary Value

Xuan Zhong

Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu
Email: 1791715055@qq.com

Received: Jan. 23rd, 2019; accepted: Feb. 7th, 2019; published: Feb. 14th, 2019

Abstract

This paper deals with a class of two-point boundary value problems for differential equation system with parameters. Using fixed point index theory, existence of one positive solution and two positive solutions are obtained to this class of systems.

Keywords

Two-Point Boundary Value Problem, Fixed Point Index, First Eigenvalue, Green's Function

两点边值微分方程组多重正解的存在性

钟　璇

南京航空航天大学数学系，江苏　南京
Email: 1791715055@qq.com

收稿日期：2019年1月23日；录用日期：2019年2月7日；发布日期：2019年2月14日

摘　要

本文研究了一类含参数微分方程组的两点边值问题。运用不动点指数理论，我们得到了方程组存在一个正解以及两个正解的结果。

关键词

两点边值问题，不动点指数理论，第一特征值，格林函数

文章引用: 钟璇. 两点边值微分方程组多重正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(2): 227-234.
DOI: 10.12677/aam.2019.82026

1. 引言

近年来，四阶微分方程边值问题广泛出现在医学、物理学、生物学等领域，受到了学者的密切关注。由于四阶边值问题起源于弹性梁状态问题的数学模型，此类问题研究比较活跃，有很多学者对四阶方程两点边值问题运用锥拉伸锥压缩不动点定理，上下解方法，单调迭代方法等进行了很好的研究[1]-[7]，但是有关复合型的微分方程组边值问题的研究并不多见。文献[8]研究了如下四阶复合型微分方程组边值问题多个正解的存在性：

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,v), & \forall(t,v)\in[0,1]\times[0,+\infty), \\ -v''(t)=g(t,u), & \forall(t,u)\in[0,1]\times[0,+\infty), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0, \\ v(0)=v(1)=0. \end{cases}$$

其中非线性项 $f\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$， $g\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$，且 $g(t,0)\equiv 0$。

受以上文献的启发，本文将考察如下含有 λ，μ 的一类耦合奇异半正微方程组的两点边值问题，通过讨论 λ,μ 的取值，得出 λ,μ 对其正解的存在性及多解性的影响。方程如下：

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=\lambda h_1(t)f(t,u(t),v(t)), & \forall t\in[0,1], \\ -v''(t)=\mu h_2(t)g(t,u(t),v(t)), & \forall t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0, \\ v(0)=v(1)=0. \end{cases} \tag{1}$$

假设方程满足如下条件：

(H_1) $f,g:[0,1]\times[0,+\infty)\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，且 f,g 连续；

(H_2) $h_i\in L^1[0,1]$， $h_i(t)\geq 0$，对 $\forall t\in[0,1]$， $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}h_i(t)\mathrm{d}t>0$，其中 $i=1,2$；

(H_3) $\lambda,\mu>0$，且为常数。

定义 $E=C([0,1]\times[0,1],R)$ 为定义在闭区间 $[0,1]\times[0,1]$ 上全体连续函数构成的集合，在 $C[0,1]$ 上定义范数 $\|u\|=\max\limits_{x\in[0,1]}|u(x)|$， $\forall(u,v)\in C[0,1]$，在 E 中取范数 $\|(u,v)\|=\sqrt{\|u(t)\|^2+\|v(t)\|^2}$。为了叙述方便，我们引入下列记号

$$f_0=\lim_{(u,v)\to 0^+}\inf\frac{f(u,v)}{u+v^2},f^0=\lim_{(u,\ v)\to 0^+}\sup\frac{f(u,v)}{u+v^2},f_\infty=\lim_{(u,v)\to\infty}\inf\frac{f(u,v)}{u+\sqrt{v}},f^\infty=\lim_{(u,v)\to\infty}\sup\frac{f(u,v)}{u+\sqrt{v}}$$

$$g_0=\lim_{(u,v)\to 0^+}\inf\frac{g(u,v)}{u+v^2},g^0=\lim_{(u,v)\to 0^+}\sup\frac{g(u,v)}{u+v^2},g_\infty=\lim_{(u,v)\to\infty}\inf\frac{g(u,v)}{u+\sqrt{v}},g^\infty=\lim_{(u,v)\to\infty}\sup\frac{g(u,v)}{u+\sqrt{v}}$$

$$K=\left\{(u,v)\in E\,\middle|\,u(t)\geq 0,v(t)\geq 0,\min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}u(t)\geq\frac{1}{4}\|u\|,\min_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}v(t)\geq\frac{1}{4}\|v\|,\forall t\in[0,1]\right\}$$

显然 K 为 E 中的正规锥。

2. 预备知识

引理 1 [1]：(锥拉伸与锥压缩不动点定理)设 Ω_1 与 Ω_2 是无穷维实 Banach 空间 E 中的两个有界开集，并且 $\theta\in\Omega_1\subset\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$， $A:P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)\to P$ 是全连续算子，如果下列条件之一满足：

1) $\|Ax\|\le\|x\|,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1;\|Ax\|\ge\|x\|,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$。

2) $\|Ax\|\le\|x\|,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2;\|Ax\|\ge\|x\|,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$。

则算子 A 在 $P\cap\left(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1\right)$ 中有不动点。

引理 2 [4]：边值问题 $\begin{cases}-u''(t)=0,\ t\in(0,1)\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$ 的格林函数为：$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\le s\le t\le 1\\ t(1-s), & 0\le t\le s\le 1\end{cases}$ 且具有下列性质：

1、当 $t,s\in[0,1]$ 时，有 $0\le G(t,s)\le G(t,t)$， $0\le G(t,s)\le G(s,s)$。

2、$\frac{1}{4}G(x,s)\le G(t,s),\forall t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right],\forall x,s\in[0,1]$。

由此问题(1)的解等价于

$$\begin{cases}u(t)=\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)f\left(u(\tau),v(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s, & \forall t\in[0,1]\\ v(t)=\mu\int_0^1 G(t,s)h_2(s)g\left(u(s),v(s)\right)\mathrm{d}s, & \forall t\in[0,1]\end{cases}$$

的解。

记

$$\Phi(u,v)=\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)f\left(u(\tau),v(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad \forall t\in[0,1]$$

$$\Psi(u,v)=\mu\int_0^1 G(t,s)h_2(s)g\left(u(s),v(s)\right)\mathrm{d}s,\quad \forall t\in[0,1]$$

$$P_1u(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\quad \forall u\in C[0,1]$$

$$P_2v(t)=\int_0^1 G(t,s)h_2(s)v(s)\mathrm{d}s,\quad \forall v\in C[0,1]\ P(u,v)(t)=\left(P_1u(t),P_2v(t)\right),\quad \forall(u,v)\in E$$

$$H(u,v)(t)=\left(\lambda f\left(u(t),v(t)\right),\mu g\left(u(t),v(t)\right)\right),\quad \forall(u,v)\in K$$

定义算子：

$$\begin{aligned}T(u,v)&=PH(u,v)=\left(\lambda P_1u(t),\mu P_2u(t)\right)\\&=\left(\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)f\left(u(\tau),v(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\mu\int_0^1 G(t,s)h_2(s)g\left(u(s),v(s)\right)\mathrm{d}s\right)\end{aligned}$$

显见问题(1)的解等价于算子 T 的不动点。

引理 3：若方程满足(H_1)-(H_3)，则算子 T 是全连续的，且 $T(K)\subset K$。

证明：由全连续算子的定义易证算子 T 全连续，下证 $T(K)\subset K$。由引理 1 性质 2 得 $\frac{1}{4}G(x,s)\le G(t,s)$，$\forall t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$， $\forall x,s\in[0,1]$，则 $\forall(u,v)\in K$， 当 $t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ 时，有

$$
\begin{aligned}
T(u,v)(t)&=\left(\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)f(u(\tau),v(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\mu\int_0^1 G(t,s)h_2(s)g(u(s),v(s))\mathrm{d}s\right)\\
&\ge\frac{1}{4}\left(\lambda\int_0^1\int_0^1 G(x,s)G(\tau,s)h_1(\tau)f(u(\tau),v(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\mu\int_0^1 G(x,s)h_2(s)g(u(s),v(s))\mathrm{d}s\right)\\
&=\frac{1}{4}T(u,v)(x)
\end{aligned}
$$

即 $\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}\Phi(u,v)(t)\ge\frac{1}{4}\|\Phi(u,v)\|$， $\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}\Psi(u,v)(t)\ge\frac{1}{4}\|\Psi(u,v)\|$，所以 $T(K)\subset K$。

引理 4 [9]：设 L: $C[0,1]\to C[0,1]$ 为线性全连续算子，且 $L(K)\subset K$，其中 K 是 $C[0,1]$ 中的锥，如果存在 $\varphi\in C[0,1]\backslash(-K)$ 及常数 $c>0$，使得 $cL\varphi\ge\varphi$，则 L 的谱半径 $r(L)\ne 0$ 且 L 有一个相应于第一个特征值 $\lambda_1=(r(T))^{-1}$ 的正特征函数 φ_1，即 $\varphi_1=\lambda_1 L\varphi_1$。

引理 5：设(H_1)-(H_3)成立，则算子 T 的谱半径 $r(T)\ne 0$，且 T 有一个对应于第一个特征值 $\lambda_1=(r(T))^{-1}$ 的正特征函数。

证明：因为 T 为全连续算子，且 $T(K)\subset K$。由条件(H_1),(H_2)知存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $G(t_0,t_0)h_i(t_0)>0, i=1,2$ 因此，存在 $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$，使得对于 $t_0\in(\alpha,\beta)$，满足 $G(t,s)h_i(s)>0$， $\forall t,s\in[\alpha,\beta]$。

取 $\varphi_i\in C[0,1]$，满足 $\varphi_i(t)\ge 0,\forall t\in[0,1],\varphi_i(t_0)>0$ 且 $\varphi_i(t)=0, t\notin[\alpha,\beta]$，则

$$
\begin{aligned}
P_1\varphi_1(t)&=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)\varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\
&\ge\int_\alpha^\beta\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)\varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s>0,\quad\forall t\in[\alpha,\beta]
\end{aligned}
$$

$$
P_2\varphi_2(t)=\int_0^1 G(t,s)h_2(s)\varphi_2(s)\mathrm{d}s>\int_\alpha^\beta G(t,s)h_2(s)\varphi_2(s)\mathrm{d}s>0,\quad\forall t\in[\alpha,\beta]
$$

又由(H_3)： $\lambda,\mu>0$，以及 $T=PH$ 可得，存在常数 $c>0$，使得 $cT\varphi\ge\varphi, t\in[0,1]$。由引理 4 得算子 T 的谱半径 $r(T)\ne 0$，且 T 有一个对应于第一个特征值 $\lambda_1=(r(T))^{-1}$ 的正特征函数。

设 λ_1 为线性边值问题 $\begin{cases}u^{(4)}(t)=\lambda h_1(t)u(t), & \forall t\in(0,1)\\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0\end{cases}$ 的第一个特征值， μ_1 为线性边值问题 $\begin{cases}-v''(t)=\mu h_2(t)v(t), & \forall t\in(0,1)\\ v(0)=v(1)=0\end{cases}$ 的第一个特征值，则 $\lambda_1,\mu_1>0$。从而 P_1 的谱半径 $r_1=\frac{1}{\lambda_1}>0$， P_2 的谱半径 $r_2=\frac{1}{\mu_1}>0$。假设它们相对应的特征函数分别为 φ_1,φ_2。则满足 $\int_0^1 h_i(t)\varphi_i(t)>0$，否则如果 $\int_0^1 h_i(t)\varphi_i(t)=0$，则

$$
r_1\varphi_1(t)=P_1\varphi_1(t)=\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)\varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\le M^2\int_0^1 h_1(\tau)\varphi_1(\tau)\mathrm{d}\tau=0
$$

$$
r_2\varphi_2(t)=P_2\varphi_2(t)=\int_0^1 G(t,s)h_2(s)\varphi_2(s)\mathrm{d}s<M\int_0^1 h_2(s)\varphi_2(s)\mathrm{d}s=0
$$

其中 $M=\{\max G(t,s), t,s\in[0,1]\}$，从而矛盾，不妨设 $\int_0^1 h_i(t)\varphi_i(t)=1, i=1,2$.在 E 上定义泛函：

$$
z(u,v)=\int_0^1[\varphi_1(t)h_1(t)u(t)+\varphi_2(t)h_2(t)v(t)]\mathrm{d}t,\quad\forall(u,v)\in E
$$

则对 $\forall(u,v)\in P$， $z(u,v)\ge\frac{1}{4}\left(\|u\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\varphi_1(t)h_1(t)\mathrm{d}t+\|v\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\varphi_2(t)h_2(t)\mathrm{d}t\right)$。令 $m_i=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\varphi_i(t)h_i(t)\mathrm{d}t, i=1,2$，

$m=\min\left\{\frac{1}{4}m_1,\frac{1}{4}m_2\right\}$

则

$$z(u,v) \geq \frac{1}{4}\left(\|u\|m_1 + \|v\|m_2\right) \geq m\|(u,v)\| \tag{2}$$

并且满足：

$$\begin{aligned} z(P(u,v)) &= \int_0^1 \left[\varphi_1(t)h_1(t)\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \varphi_2(t)h_2(t)\int_0^1 G(t,s)h_2(s)v(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[\varphi_1(t)h_1(t)\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \varphi_2(t)h_2(t)\int_0^1 G(t,\tau)h_2(\tau)v(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[h_1(\tau)u(\tau)\int_0^1\int_0^1 G(\tau,s)G(s,t)h_1(t)\varphi_1(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s + h_2(\tau)v(\tau)\int_0^1 G(\tau,t)h_2(t)\varphi_2(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

即

$$z(P(u,v)) = \int_0^1 \left[h_1(\tau)u(\tau)r_1\varphi_1(\tau) + h_2(\tau)v(\tau)r_2\varphi_2(\tau)\right]\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

3. 主要结果

定理 1：若条件(H_1)~(H_3)成立，且 $\lambda f^0 < \lambda_1 < \lambda f_\infty, \mu g^0 < \mu_1 < \mu g_\infty$，则问题(1)至少有一个正解。

证明：以下证明分两步

1) 由 $\lambda f^0 < \lambda_1, \mu g^0 < \mu_1$ 可得 $\exists \delta \in (0,1), d > 0$ 且充分小，使得当 $(u,v) \in K, \|(u,v)\| \leq d$ 时，对 $\forall t \in [0,1]$，恒有 $\lambda f(u(t),v(t)) \leq (1-\delta)\lambda_1(u(t)+v^2(t)), \mu g(u(t),v(t)) < (1-\delta)\mu_1(u(t)+v^2(t))$。

令 $B_d = \{(u,v) \in E \mid \|(u,v)\| < d\}$，假设存在 $(u_1,v_1) \in K \cap \partial B_d$ 和 $t_1 \in (0,1)$ 满足 $(u_1,v_1) = t_1 T(u_1,v_1)$，则由(3)式得

$$\begin{aligned} z(u_1,v_1) &= t_1 h(T(u_1,v_1)) \leq z(PH(u_1,v_1)) \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\lambda_1}h_1(t)\varphi_1(t)\lambda f(u_1(t),v_1(t)) + \frac{1}{\mu_1}h_2(t)\varphi_2(t)\mu g(u_1(t),v_2(t))\right]\mathrm{d}t \\ &\leq (1-\delta)\int_0^1 \left[h_1(t)\varphi_1(t)(u_1(t)+v_1^2(t)) + h_2(t)\varphi_2(t)(u_1^2(t)+v_1(t))\right]\mathrm{d}t \\ &\leq (1-\delta)z(u_1,v_1) + (1-\delta)\int_0^1 \left[v_1^2(t)h_1(t)\varphi_1(t) + u_1^2(t)h_2(t)\varphi_2(t)\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

即 $\delta z(u_1,v_1) \leq 2(1-\delta)d^2$，由(2)式得 $\delta z(u_1,v_1) \geq m\delta\|(u_1,v_1)\| = m\delta d$，即 $d > \frac{\delta m}{2(1-\delta)}$，这与 d 充分小矛盾。根据不动点指数的同伦不变性得 $i(T, K \cap B_d, K) = i(\theta, K \cap B_d, K) = 1$。

2) 由 $\lambda_1 < \lambda f_\infty, \mu_1 < \mu g_\infty$ 可得，$\exists \delta \in (0,1), d > 0$，使得当 $\sqrt{u^2+v^2} > d$ 时，有 $\lambda f(u,v) \geq (1+\delta)\lambda_1\left(u(t)+\sqrt{v(t)}\right)$，$\mu g(u,v) \geq (1+\delta)\mu_1\left(\sqrt{u(t)}+v(t)\right)$。又当 $\sqrt{u^2+v^2} \leq d$ 时，$f(u,v), g(u,v)$ 有界，故存在常数 $C > 0$，使得当 $\sqrt{u^2+v^2} \leq d$ 时，对 $\forall (u,v) \in K, \forall t \in [0,1]$，恒有

$$\lambda f(u(t),v(t)) \geq (1+\delta)\lambda_1\left(u(t)+\sqrt{v(t)}\right) - C, \mu g(u(t),v(t)) \geq (1+\delta)\mu_1\left(\sqrt{u(t)}+v(t)\right) - C$$

取 $R > \frac{2C}{\delta m}$，令 $B_R = \{(u,v) \in E \| (u,v)\| < R\}$，假设存在 $(u_2,v_2) \in K \cap \partial B_R$ 和 $t_2 \geq 0$ 满足 $(u_2,v_2) = T(u_2,v_2) + t_2(x_1,x_2)$，其中 $(x_1,x_2) \in K \setminus \{\theta\}$，则由(3)可得

$$\begin{aligned}z(u_2,v_2)&=z(T(u_2,v_2))+t_2z(x_1,x_2)\ge z(PH(u_2,v_2))\\&\ge\int_0^1\left[\frac{1}{\lambda_1}h_1(t)\varphi_1(t)\lambda f(u_2(t),v_2(t))+\frac{1}{\mu_1}h_2(t)\varphi_2(t)\mu g(u_2(t),v_2(t))\right]\mathrm{d}t\\&\ge(1+\delta)\int_0^1\left[h_1(t)\varphi_1(t)\left(u_2(t)+\sqrt{v_2(t)}\right)+h_2(t)\varphi_2(t)\left(\sqrt{u_2(t)}+v_2(t)\right)\right]\mathrm{d}t-2C\\&\ge(1+\delta)z(u_2,v_2)-2C\end{aligned}$$

所以 $\delta z(u_2,v_2)\le 2C$，这与 $\delta z(u_2,v_2)\ge m\delta\|(u_2,v_2)\|=m\delta R>2C$ 矛盾，从而假设不成立。故当 R 充分大时 $i(T,K\cap B_R,K)=0$。再由不动点指数的可加性，得 $i(T,K\cap B_R\setminus\overline{B}_d,K)=0-1=-1\ne 0$。从而算子 T 至少有一个不动点，即方程至少有一个解。

定理 2：若条件(H_1)~(H_3)成立，且 $\lambda f_0>\lambda_1>\lambda f^\infty,\mu g_0>\mu_1>\mu g^\infty$，则问题(1)至少有一个正解。

证明：以下证明分两步

1) 由 $\lambda f_0>\lambda_1,\mu g_0>\mu_1$ 可得 $\exists\delta\in(0,1),d>0$，使得当 $(u,v)\in K,\|(u,v)\|\le d$ 时，对 $\forall t\in[0,1]$，有

$$\lambda f(u(t),v(t))\ge(1+\delta)\lambda_1\left(u(t)+v^2(t)\right),\ \mu g(u(t),v(t))\ge(1+\delta)\mu_1\left(u(t)+v^2(t)\right)$$

假设存在 $(u_3,v_3)\in K\cap\partial B_d$ 和 $t_3\in[0,+\infty)$，满足 $(u_3,v_3)=T(u_3,v_3)+t_3(x_3,x_4)$，其中 $(x_3,x_4)\in K\setminus\{\theta\}$，则由(3)可得

$$\begin{aligned}z(u_3,v_3)&=z(T(u_3,v_3))+t_3z(x_3,x_4)\ge z(PH(u_3,v_3))\\&\ge\int_0^1\left[\frac{1}{\lambda_1}h_1(t)\varphi_1(t)\lambda f(u_3(t),v_3(t))+\frac{1}{\mu_1}h_2(t)\varphi_2(t)\mu g(u_3(t),v_3(t))\right]\mathrm{d}t\\&\ge(1+\delta)\int_0^1\left[h_1(t)\varphi_1(t)\left(u_3(t)+v_3^2(t)\right)+h_2(t)\varphi_2(t)\left(u_3^2(t)+v_3(t)\right)\right]\mathrm{d}t\\&\ge(1+\delta)z(u_3,v_3)\end{aligned}$$

即 $\delta z(u_3,v_3)\le 0$，这与(2)式 $\delta z(u_3,v_3)\ge m\delta\|(u_3,v_3)\|=m\delta d>0$ 矛盾，从而假设不成立。由不动点指数的缺方向性知，当 d 充分小时，有 $i(T,K\cap B_d,K)=0$。

2) 又由 $\lambda_1>\lambda f^\infty,\mu_1>\mu g^\infty$ 可得，$\exists\delta\in(0,1),c>0$，使得 $\forall(u,v)\in K,t\in[0,1]$时，有

$$\lambda f(u(t),v(t))\le(1-\delta)\lambda_1\left(u(t)+\sqrt{v(t)}\right)+c,\mu g(u(t),v(t))\le(1-\delta)\mu_1\left(\sqrt{u(t)}+v(t)\right)+c$$

取 R 充分大，满足 $\delta mR>2(1-\delta)\sqrt{R}+2c$，假设存在 $(u_4,v_4)\in K\cap\partial B_R$ 和 $t_4\in(0,1)$ 满足 $(u_4,v_4)=t_4T(u_4,v_4)$，则由(3)式得

$$\begin{aligned}z(u_4,v_4)&=t_4h(T(u_4,v_4))\le z(PH(u_4,v_4))\\&=\int_0^1\left[\frac{1}{\lambda_1}h_1(t)\varphi_1(t)\lambda f(u_4(t),v_4(t))+\frac{1}{\mu_1}h_2(t)\varphi_2(t)\mu g(u_4(t),v_4(t))\right]\mathrm{d}t\\&\le(1-\delta)\int_0^1\left[h_1(t)\varphi_1(t)\left(u_4(t)+\sqrt{v_4(t)}\right)+h_2(t)\varphi_2(t)\left(\sqrt{u_4(t)}+v_4(t)\right)\right]\mathrm{d}t+2c\\&=(1-\delta)z(u_4,v_4)+(1-\delta)\int_0^1\left[h_1(t)\varphi_1(t)\sqrt{v_4(t)}+h_2(t)\varphi_2(t)\sqrt{u_4(t)}\right]\mathrm{d}t+2c\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\delta z(u_4,v_4)&\le(1-\delta)\int_0^1\left[h_1(t)\varphi_1(t)\sqrt{v_4(t)}+h_2(t)\varphi_2(t)\sqrt{u_4(t)}\right]\mathrm{d}t+2c\\&\le 2(1-\delta)\sqrt[4]{\|u_4\|^2+\|v_4\|^2}+2c=2(1-\delta)\sqrt{R}+2c\end{aligned}$$

又因为 $\delta z(u_4,v_4)\ge m\delta\|(u_4,v_4)\|=m\delta R$，从而 $\delta mR\le 2(1-\delta)\sqrt{R}+2c$。这与 R 的选取矛盾，故当 R 充分大时，有 $i(T,K\cap B_R,K)=1$。再由不动点指数的可加性得 $i(T,K\cap B_R\setminus\overline{B}_d,K)=1-0=1\ne 0$。从而算

子 T 至少有一个不动点，即方程至少有一个解。

定理 3：若条件(H$_1$)~(H$_3$)成立，对于 $\lambda f_0>\lambda_1,\mu g_0>\mu_1,\lambda f_\infty>\lambda_1,\mu g_\infty>\mu_1$，若存在数 $\rho>0$，使得当 $\sqrt{u^2+v^2}\le\rho,\sqrt{p^2+q^2}\le\rho$ 时，恒有

$$\lambda^2 f^2(u,v)+\mu^2 g^2(p,q)<\frac{\rho^2}{\|P\|^2}$$

成立，其中 $\|P\|=\max\left\{\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)h_2(s)g(u(s),v(s))\mathrm{d}s\right\}$，那么问题(1)至少有两个正解。

证明：令 $B_\rho=\{(u,v)\in E\,|\,\|(u,v)\|<\rho\}$，其中 $\rho>d$，若存在 $(u,v)\in K\cap\partial B_\rho$ 和 $\forall t\in[0,1]$，满足 $u^2(t)+v^2(t)\le\|u\|^2+\|v\|^2=\|(u,v)\|^2=\rho^2$，由 $\lambda^2 f^2(u,v)+\mu^2 g^2(p,q)<\dfrac{\rho^2}{\|P\|^2}$ 可得

$$\begin{aligned}\|H(u,v)\|^2&=\|(\lambda f(u(t),v(t)),\mu g(u(t),v(t)))\|^2\\&=\max_{t\in[0,1]}\lambda^2 f^2(u(t),v(t))+\max_{t\in[0,1]}\mu^2 g^2(u(t),v(t))\le\frac{\rho^2}{\|P\|^2}\end{aligned}$$

从而 $\|T(u,v)\|\le\|P\|\|H(u,v)\|\le\|P\|\|P\|^{-1}\rho=\rho=\|(u,v)\|$，故由锥压缩定理知 $i(T,K\cap B_\rho,K)=1$。

利用定理 1 的第二步和定理 2 的第一步证明及不动点指数的可加性可得

$$i(T,K\cap B_\rho\setminus\bar{B}_d,K)=1-0=1\ne0,\quad i(T,K\cap B_R\setminus\bar{B}_\rho,K)=0-1=-1\ne0$$

由不动点指数的可解性知，算子 T 在 $K\cap B_\rho\setminus\bar{B}_d$ 和 $K\cap B_R\setminus\bar{B}_\rho$ 中分别至少有一个不动点，所以问题(1)至少有两个正解。

定理 4：若条件(H$_1$)-(H$_3$)成立，对于 $\lambda f^0<\lambda_1,\mu g^0<\mu_1,\lambda f^\infty<\lambda_1,\mu g^\infty<\mu_1$，若存在数 $\rho>0$，使当 $\dfrac{\rho}{4}\le\sqrt{u^2+v^2}\le\rho$，$\dfrac{\rho}{4}\le\sqrt{p^2+q^2}\le\rho$ 时，恒有

$$\lambda^2 f^2(u,v)+\mu^2 g^2(p,q)>\frac{\rho^2}{a^2}$$

成立，其中 $a=\min\left\{\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1\int_{\frac14}^{\frac34}G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s,\max\limits_{t\in[0,1]}\int_{\frac14}^{\frac34}G(t,s)h_2(s)g(u(s),v(s))\mathrm{d}s\right\}$，则问题(1)至少有两个正解。

证明：若存在 $(u,v)\in K\cap\partial B_\rho$ 和 $\forall t\in\left[\dfrac14,\dfrac34\right]$，满足 $\dfrac{\rho}{4}=\dfrac14\|(u,v)\|\le\sqrt{u^2(t)+v^2(t)}=\rho^2$，

$\lambda^2 f^2(u,v)+\mu^2 g^2(p,q)>\dfrac{\rho^2}{\|P\|^2}$ 得

$$\begin{aligned}\|T(u,v)\|^2&=\max_{\tau\in[0,1]}\left(\lambda\int_0^1\int_0^1 G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)f(u(\tau),v(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right)^2+\max_{\tau\in[0,1]}\left(\mu\int_0^1 G(t,s)h_2(s)g(u(s),v(s))\mathrm{d}s\right)^2\\&\ge\max_{\tau\in[0,1]}\left(\lambda\int_0^1\int_{\frac14}^{\frac34}G(t,s)G(\tau,s)h_1(\tau)f(u(\tau),v(\tau))\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right)^2+\max_{\tau\in[0,1]}\left(\mu\int_{\frac14}^{\frac34}G(t,s)h_2(s)g(u(s),v(s))\mathrm{d}s\right)^2\\&\ge a^2\min_{\sqrt{u^2+v^2}\in\left[\frac{\rho}{4},\rho\right]}\left(\lambda^2 f^2(u,v)+\mu^2 g^2(u,v)\right)>\rho^2=\|(u,v)\|^2\end{aligned}$$

即$\|T(u,v)\| \ge \|(u,v)\|$，故由锥压缩定理知，$i(T, K \cap B_\rho, K) = 0$。

利用定理 1 的第一步和定理 2 的第二步证明及不动点指数的可加性可得

$$i\left(T, K \cap B_\rho \setminus \overline{B}_d, K\right) = 0 - 1 = -1 \neq 0, \quad i\left(T, K \cap B_R \setminus \overline{B}_\rho, K\right) = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

由不动点指数的可解性知，算子 T 在 $K \cap B_\rho \setminus \overline{B}_d$ 和 $K \cap B_R \setminus \overline{B}_\rho$ 中分别至少有一个不动点，所以问题(1)至少有两个正解。

致　谢

感谢导师陈芳启教授的悉心指导！

基金项目

国家自然科学基金(11872201)。

参考文献

[1] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 第 3 版. 济南: 山东科技出版社, 1985: 243-244.

[2] 姚庆六, 白占兵. $u^{(4)}(t) - \lambda h(t) f(u(t)) = 0$ 的边值问题的正解存在性[J]. 数学年刊: 中文版, 1999(5): 575-578.

[3] 席莉静. 一类算子方程的多重正解及对奇异边值问题的应用[J]. 苏州科技大学学报(自然科学版), 2004, 21(3): 26-30.

[4] 陈丽珍, 李刚. 四阶非线性微分方程组正解的存在性[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2008, 11(4): 25-28.

[5] 王全义, 邹黄辉. 一类四阶奇异非线性积分边值问题正解的存在性[J]. 华侨大学学报, 2014, 35(1): 83-87.

[6] 赵微. 一类四阶微分方程 m 点边值问题的正解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2017, 40(6): 791-796.

[7] Jankowski, T. (2010) Positive Solutions for Fourth-Order Differential Equations with Deviating Arguments and Integral Boundary Conditions. *Nonlinear Analysis*, **73**, 1289-1299. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.04.055

[8] 马田田, 赵增勤. 非线性微分方程组边值问题多个正解的存在性[J]. 工程数学学报, 2009, 26(6): 1050-1056.

[9] 周韶林, 吴红萍, 韩晓玲. 一类四阶三点边值问题正解的存在性[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2014, 51(1): 11-15.