Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(4), 747-752
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84084

Hans汉斯

Pseudo *n*-Width of Infinite Dimension Identity Operator

Wenjing Lu, Hanyue Xiao, Jing Qin

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: lwjzbl@163.com

Received: Apr. 3rd, 2019; accepted: Apr. 18th, 2019; published: Apr. 25th, 2019

Abstract

In this paper, we study the pseudo width of infinite dimension identity operator $I_{p,q}: l_{p,r} \to l_q \left(1 \le q \le p < \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$, and obtain its asymptotic degree.

Keywords

Infinite Dimension Identity Operator, Pseudo Width, Sequence Space, Asymptotic Degree

无穷维恒等算子的伪宽度

陆文静，肖寒月，秦　静

西华大学理学院，四川 成都
Email: lwjzbl@163.com

收稿日期：2019年4月3日；录用日期：2019年4月18日；发布日期：2019年4月25日

摘　要

本文讨论了无穷维恒等算子 $I_{p,q}: l_{p,r} \to l_q \left(1 \le q \le p < \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ 的伪宽度，并计算了其精确渐近阶。

关键词

无穷维恒等算子，伪宽度，序列空间，渐近阶

文章引用: 陆文静, 肖寒月, 秦静. 无穷维恒等算子的伪宽度[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 747-752.
DOI: 10.12677/aam.2019.84084

1. 引言及主要结果

宽度理论是函数逼近论的重要内容之一，也是国内外研究的热点之一，它与计算复杂性有着密切的联系[1]。其中，关于伪宽度的研究是当下宽度理论研究的热点之一，伪宽度在模式识别、消退估计、经验过程、学习理论中都有重要的应用。VC-维数的概念最早被 Vapnik 和 Chervonenkis 在参考文献[2] [3]中提出，他们介绍了集合的指标函数的 VC 维数。在实值函数中，Pollard [4]和 Haussler [5]将 VC-维数的定义扩展到伪维数，VC 维数和伪维数是集合或空间容量的度量，它与一个函数类的熵有联系[6]。1998 年，Maiorov 和 Ratsaby 在参考文献[7]中给出 VC-宽度和伪宽度的定义，研究了有限维空间伪宽度在一致框架下的逼近特征，并确定了在一致框架下的 VC-宽度 $\rho_n^{VC}\left(B_p^m, l_q^m\right)$ 和伪宽度 $\rho_n^P\left(B_p^m, l_q^m\right)$ 的精确渐近阶。2007 年，陈广贵等[8]讨论了具有共同光滑函数类的伪宽度，并且计算了其精确阶。本文主要讨论无穷维恒等算子的伪宽度。首先，介绍伪维数和伪宽度的定义。

定义 1.1：对实数 x，$\operatorname{sgn}(x)$ 表示符号函数，当 $x>0$ 时，其值为 1，其它情形其值为−1。对向量 $x\in R^m, \operatorname{sgn}(x):=\left(\operatorname{sgn}(x_1),\cdots,\operatorname{sgn}(x_m)\right)$，如果 F 是 R^m 上的一个实值函数集合，称满足下列条件的最大整数 k 为 F 的伪维数，即存在指标集 $I\subset\{1,2,\cdots,m\}$ 和 $y\in R^k$ 使得集合

$$\left\{\operatorname{sgn}\left(F|_{I,y}\right): F|_{I,y}=\left(x_{i_1}+y_1,\cdots,x_{i_k}+y_k\right), x=\left(x_1,\cdots,x_m\right)\in F, i_j\in I, 1\le j\le k\right\}$$

的基数为 2^k。如果不存在这样的最大的 k，那么 F 的伪维数是正无穷。我们将 F 的伪维数记为 $\dim_p(F)$。

定义 1.2：设 W 为赋范线性空间 $(Z,\|\cdot\|)$ 的一非空子集，$n=0,1,2,\cdots$，称

$$\rho_n(W,Z)=\inf_{F_n}\sup_{x\in W}\inf_{y\in F_n}\|x-y\|$$

为 W 在 Z 中的伪宽度，其中 F_n 取遍 Z 中的伪维数不超过 n 的所有线性子空间。

定义 1.3：设 X,Y 为两个赋范线性空间，其范数分别为 $\|\bullet\|_X$ 与 $\|\bullet\|_Y$，T 是 X 到 Y 的有界线性算子，$n=0,1,2,\cdots$，称

$$\rho_n(T:X\to Y)=\rho_n\left(T(B_z),\overline{Y}\right)$$

为算子 T 的伪宽度，其中 B_X 表示 X 的单位球，即 $B_X:=\left\{x\in X \,\middle|\, \|x\|_X\le 1\right\}$。

关于伪宽度的一些重要性质已经得到了精彩的结果。本文将讨论无限维恒等算子 $I_{p,q}:l_{p,r}\to l_q\left(1\le q\le p<\infty, r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ 的伪宽度。为此，继续介绍有关概念。

设 $1\le p\le\infty$，对任一实序列 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$\|x\|_{l_p}=\begin{cases}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}, & 1\le p<\infty\\ \sup_{n\ge1}|x_n|, & p=\infty\end{cases}$$

l_p 表示满足条件 $\|x\|_{l_p}<\infty$ 的实序列 x 所构成的集合。众所周知，$\|\bullet\|_{l_p}$ 为 l_p 上的一个范数，而且 l_p 是一个 Banach 空间。易见，l_p 空间具有如下性质：

1) $l_p\subset l_q\left(1\le p\le q\le\infty\right)$，

2) $l_p \not\subset l_q \left(1 \le p \le q \le \infty\right)$。

因此，无穷维恒等算子 I 是从 l_p 到 $l_q\left(1 \le p \le q \le \infty\right)$ 的有界线性算子，而不是 l_p 到 $l_q\left(1 \le q < p \le \infty\right)$ 的算子。

对于 $1 \le p \le \infty, r > 0$， $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_p$， 令

$$x^r := \{n^r x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \|x\|_{l_{p,r}} = \left\|x^{(r)}\right\|_{l_p}$$

和

$$l_{p,r} := \left\{x \in l_p \middle| \|x\|_{l_{p,r}} < \infty\right\}$$

则易见 $\|\bullet\|_{l_{p,r}}$ 为 $l_{p,r}$ 上的范数，且 $l_{p,r}$ 为 Banach 空间。用 $B_{p,r}$ 表示 $l_{p,r}$ 中的单位球。

令 $1 \le q < p \le \infty$， $r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$，（$p = \infty$ 时，记 $\frac{1}{p} = 0$），对任意的 $x = \{x_n\} \in l_{p,r}$， 由 Hölder 不等式有

$$\|x\|_{l_q} \le \begin{cases} \|x\|_{l_{p,r}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{pr}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty, & 1 \le q < p < \infty \\ \|x\|_{l_{p,r}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-rq}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, & p = \infty \end{cases}$$

因此 $x \in l_q$。从而无穷维恒等算子 $\left(1 \le q < p \le \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$

$$I_{p,q} : l_{p,r} \to l_q$$
$$x \mapsto x$$

为 $l_{p,r}$ 到 l_q 的有界线性算子。

本文利用离散化的方法讨论了无穷维恒等算子 $I_{p,q}\left(1 \le q < p \le \infty\right)$ 的伪宽度，并得到其精确渐近阶。这就是本文的主要结果，即

定理 1： 设 $1 \le q < p < \infty$， $r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$， $n = 0,1,2,\cdots$ 则

$$\rho_n\left(I_{p,q} : l_{p,r} \to l_q\right) \succ\prec n^{-\left(r - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right)}$$

其中，符号“$\succ\prec$”的定义如下：假设 $c_i, i = 0,1,\cdots$ 是和参数 p,q,r 有关的非负常数。对两个正函数 $a(y)$ 和 $b(y)$， $y \in D$，如果存在正常数 c_1 满足条件 $a(y) \le c_1 b(y)$，则记 $a(y) = b(y)$。若存在正常数 c_2 满足条件 $c_2 a(y) \ge b(y)$，则记 $a(y) \gg b(y)$，若 $a(y) = b(y)$ 且 $a(y) \gg b(y)$，则记 $a(y) \succ\prec b(y)$。

2. 主要结果的证明

为了证明定理 1，首先讨论有限维空间的伪宽度。令 $\mathbb{R}^m = \left\{x = (x_1,\cdots,x_m) \middle| x_i \in R, i = 1,\cdots,m\right\}$。

设 $1 \le p \le \infty$， $x = (x_1,\cdots,x_m) \in \mathbb{R}^m$。令

$$\|x\|_{l_p^m} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{m} |x_n|^p\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le n \le m} |x_n|, & p = \infty. \end{cases}$$

则$\|\bullet\|_{l_p^m}$为$\mathbb{R}^m$上的范数。用l_p^m表示$\mathbb{R}^m$按照范数$\|\bullet\|_{l_p^m}$所构成的 Banach 空间。用B_p^m表示l_p^m中的单位球。易见$\{e_n'\}_{n=1}^m$为l_p^m的基，其中$e_n' = (0,\cdots,0,1,0,\cdots 0) \in \mathbb{R}^m$ (第n个分量为1，其余分量为0)。

引理 1：[7]设$1 \le q < p \le \infty$，$n = 1,2,\cdots$，$m \ge cn$，则

$$\rho_n\left(B_p^m, l_q^m\right) \approx (m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

下面建立估计定理 1 上界的离散化定理。首先介绍一些记号。

对$\forall k \in \mathbb{N}$，其中$\mathbb{N} = \{1,2,\cdots\}$，记$S_k = \left\{n \in N \left\{2^{k-1} \le n < 2^k\right\}\right.$。则对任意的$k,k' \in \mathbb{N}$，且$k \ne k'$有$S_k \cap S_{k'} = \varnothing$，$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$。用$m_k$表示$S_k$中元素的个数，则$m_k = |S_k| = 2^{k-1}$。

以下我们总是假设$1 \le p < \infty$。用e_n表示第n个分量为1，其余分量为0的无穷维实序列，则$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$为$l_p(1 \le p < \infty)$的 Schauder 基。从而对$\forall x = \{x_n\} \in l_p$，有$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$。

对$k \in \mathbb{N}$，记$F_k = \operatorname{span}\{e_n | n \in S_k\}$，则$\dim_\rho(F_k) = m_k = 2^{k-1}$。令

$$I_k : F_k \to R^{m_k}$$

$$x = \sum_{n \in S_k} x_n e_n \mapsto \sum_{j=1}^{m} x_{2^{k-1}+j-1} e'_{2^{k-1}+j-1}$$

则对$\forall x = \sum_{n \in S_k} x_n e_n \in F_k$，有

$$\begin{aligned} \|x\|_{l_{p,r}} &= \left(\sum_{n \in S_k} \left|n^r x_n\right|^p\right)^{1/p} \succ\prec \left(\sum_{n \in S_k} \left|2^{rk} x_n\right|^p\right)^{1/p} \\ &= 2^{rk}\left(\sum_{n \in S_k} |x_n|^p\right)^{1/p} = 2^{rk}\|I_k x\|_{l_p^{m_k}} \end{aligned} \tag{2.1}$$

且

$$\|x\|_{l_p} = \left(\sum_{n \in S_k} |x_n|^p\right)^{1/p} = \|I_k x\|_{l_p^{m_k}}. \tag{2.2}$$

从而I_k为$l_p \cap F_k$到$l_p^{m_k}$上的等距同构映射。

引理 2：设$1 \le q < p < \infty$，$r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$，非负整数序列$\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$满足$0 \le n_k \le m_k$，且$\sum_{k=1}^{\infty} n_k \le n$。则

$$\rho_n\left(B_{p,r}, l_q\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-rk} \rho_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right).$$

证明：对$\forall k$，由(2.1)知，对$\forall x \in B_{l_{p,r}} \cap F_k$，有

$$1 \ge \|x\|_{l_{p,r}} = 2^{rk}\|I_k x\|_{l_p^{m_k}}$$

$\forall y \in F_k$，由(2.2)知

$$\|y\|_{l_q} = \|I_k y\|_{l_q^{m_k}}$$

所以

$$\rho_{n_k}\left(B_{p,r} \cap F_k, l_q \cap F_k\right) = 2^{-rk} \rho_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)$$

由伪宽度的定义知，存在$l_q \cap F_k$的一个伪维数不超过n_k的线性子空间M_k使得

$$\sup_{x\in B_{p,r}\cap F_k}\inf_{y\in M_k}\|x-y\|_{l_q}=2^{-rk}\rho_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$$

令 $M=\sum_{k=1}^{\infty}M_k$ (直和)。则 M 为 l_q 的线性子空间，且

$$\dim_\rho(M)\le\sum_{k=1}^{\infty}\dim_\rho(M_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n\text{。}$$

从而

$$\begin{aligned}\rho_n\left(B_{p,r},l_q\right)&=\sup_{x\in B_{p,r}}\inf_{y\in M}\|x-y\|_{l_q}\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x\in B_{p,r}\cap F_k}\inf_{y\in M_k}\|x-y\|_{l_q}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}\rho_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)\end{aligned}$$

下面引理 3 是估计定理 1 下界的离散化定理。

引理 3：令 $1\le q<p<\infty$， $r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$， $n=0,1,2,\cdots$，则

$$\rho_n\left(B_{p,r},l_q\right)=2^{-rk}\rho_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$$

其中 $n\succ\prec 2^k=2n$。

证明：对 $\forall x\in B_p^{m_k}$，则由(2.1)有

$$1\ge\|x\|_{l_p^{m_k}}\ge 2^{rk}\left\|I_k^{-1}x\right\|_{l_{p,r}}$$

对 $\forall y\in l_q^{m_k}$，则由(2.2)有

$$\|y\|_{l_q^{m_k}}=\left\|I_k^{-1}y\right\|_{l_q}$$

所以

$$\begin{aligned}\rho_n\left(B_{p,r},l_q\right)&\ge\rho_n\left(B_{p,r}\cap F_k,l_q\cap F_k\right)\\&=2^{-rk}\rho_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)\end{aligned}$$

定理 1 的证明：

由定义 1.1 及定义 1.2 和无穷维恒等算子 $I_{p,r}$ 的定义，易见 $\rho_n\left(I_{p,q}:l_{p,r}\to l_p\right)=\rho_n\left(B_{p,r},l_q\right)$。

首先估计定理 1 的上界。

对 $\forall k\in\mathbb{N}$，令 $k'=[\lg n]$，

$$n_k=\begin{cases}m_k, & 1\le k<k'\\ 2^{k'}\bullet 2^{\beta(k'-k)}, & k\ge k'\end{cases}$$

其中， $0<\beta<1$，易见 $\{n_k\}$ 满足引理 2 的条件。

由引理 2 和引理 1 有

$$\begin{aligned}\rho_n\left(I_{p,q}:l_{p,r}\to l_q\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-rk}\rho_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)\\&=\sum_{k=k'}^{\infty}2^{-rk}\rho_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)=\sum_{k=k'}^{\infty}2^{-rk}\bullet 2^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)k}\\&=\sum_{k=k'}^{\infty}2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k}=2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'}=n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}\end{aligned}$$

定理 1 的下界估计。

取满足引理 3 中条件的 k，则由引理 3 和引理 1 有

$$\rho_n\left(I_{p,q}:l_{p,r}\to l_q\right)=2^{-rk}\rho_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$$
$$=2^{-rk}\cdot n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}=n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$$

综上，定理 1 得证。

参考文献

[1] Traub, J.F. Wasilkowski, G.W. and Wozniakowski, H. (1988) Information-Based Complexity. Academic Press, Boston.

[2] Vapnik, V.N. and Chervonenkis, A.Ya. (1971) On the Uniform Convergence of Relative Frequencies of Events to Their Probabilities. *Theory of Probability & Its Applications*, **16**, 264-280. https://doi.org/10.1137/1116025

[3] Vapnik, V.N. and Cbervonenkis, A.Ya. (1981) Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform Convergence of Means to Their Expectations. *Theory of Probability & Its Applications*, **26**, 532-553. https://doi.org/10.1137/1126059

[4] Pollard, D. (1989) Empiricai Processes: Theory and Applications. *NSF-CBMS Regional Conference Sews in Probability and Statistics*, Vol. 2, Institute of Mathmatical Statistics and American Statistical Association.

[5] Haussler, D. (1992) Decision Theoretic Generalizations of the PAC Model for Neural Net and Other Learning Applications. *Information and Computation*, **100**, 78-150. https://doi.org/10.1016/0890-5401(92)90010-D

[6] Vapnik, V.N. (1982) Estimation of Dependences Based on Empirical Data. Springer. Berlin.

[7] Maiorova, V. and Ratsaby, J. (1998) The Degree of Approximation of Sets in Euclidean Space Using Sets with Bounded Vapnik-Chervonenkis Dimension. *Discrete Applied Mathematics*, **86**, 81-93. https://doi.org/10.1016/S0166-218X(98)00015-8

[8] Chen, G.G., Fang, G.S. and Ruan, Y.L. (2007) Non-Linear Approximation of Functions with Mixed Smoothness by Sets of Finite Pseudo-Dimension. *Acta Mathematica Sinica*, *English Series*, **23**, 671-676. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0921-x