Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(4), 657-663**
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84073

Hans 汉斯

Local Derivative Estimates for an Elliptic Equation on Complete Riemannian Manifolds

Zijun Wang

School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan Hubei
Email: wzj2017@foxmail.com

Received: Mar. 31st, 2019; accepted: Apr. 15th, 2019; published: Apr. 22nd, 2019

Abstract

The main purpose of this paper is to derive local gradient estimates for a second-order elliptic equation of $\Delta_f u = p\log u + qu$ with smooth functions f, p and q on a complete Riemannian manifold.

Keywords

Gradient Estimate, Elliptic Equation, Complete Riemannian Manifold

完备黎曼流形上椭圆方程的局部梯度估计

王子君

中国地质大学(武汉)，数学与物理学院，湖北 武汉
Email: wzj2017@foxmail.com

收稿日期：2019年3月31日；录用日期：2019年4月15日；发布日期：2019年4月22日

摘 要

本文的主要目的是在一个完备黎曼流形上推导出一个二阶椭圆方程$\Delta_f u = p\log u + qu$的局部梯度估计，该方程具有光滑函数$f$、$p$和$q$。

关键词

梯度估计，椭圆方程，完备黎曼流形

文章引用: 王子君. 完备黎曼流形上椭圆方程的局部梯度估计[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 657-663.
DOI: 10.12677/aam.2019.84073

1. 研究背景

梯度估计是研究偏微分方程解的重要工具之一。历史上，S. T. Yau [1]证明了一个全局梯度估计：对于 n 维的具有下界的 Ricci 曲率(即 $Ric \ge -(n-1)K$，这里整数 $K \ge 0$)的黎曼流形上的正调和函数 u (即 $\Delta u = 0$)，我们有 $|\nabla u| \le (n-1)\sqrt{K}u$。在此基础上，对椭圆方程的梯度估计进行了研究。举几个例子，L. Ma [2]推导了下列椭圆方程的局部梯度估计：

$$\Delta u + au\log u + bu = 0, \tag{1.1}$$

这是从在 $a<0$ 和 b 为常数的黎曼流形上的 Ricci 孤子的势推导出的。2017 年，B. Ma，G. Huang 和 Y. Luo [3]证明了在完备黎曼流形上对于 $\Delta u + cu^{\alpha} = 0$ 的正解的梯度估计，其中 c，α 是两个实常值，并且 $c \ne 0$。

f-Laplacian 是 Laplace-Beltrami 算子的自然类比，它由 C^2 函数 u 定义：

$$\Delta_f u = \Delta u - \langle \nabla u, \nabla f \rangle,$$

Bakry-Émery Ricci 曲率定义为：

$$Ric_f := Ric + Hessf.$$

K. Brighton [4]研究了下列方程的正解的梯度估计：

$$\Delta_f u = 0, \tag{1.2}$$

并且得到了 Liouville 定理：在具有非负 Bakry-Émery Ricci 曲率的完备光滑度量空间上，具有正边界的 f-调和函数(即 $\Delta_f u = 0$)是常值。此外，G. He 和 S. Zhang [5]证明了在具有非负 Bakry-Émery Ricci 曲率的完备光滑度量空间上的 f-调和函数新的梯度估计。

受这些工作的启发，我们考虑了一个 n 维完备黎曼流形上的二阶椭圆偏微分方程 (M^n, g)：

$$\Delta_f u = pu\log u + qu, \tag{1.3}$$

这里 f，p，$q \in C^{\infty}(M^n)$。很明显，公式(1.3)是(1.1)和(1.2)的一般化。

本文的主要研究成果如下。首先，我们证明了(1.3)的正解的局部梯度估计。

定理 1.1： 假设 (M^n, g) 是一个 n-维黎曼流形，在 $B(\bar{x}, 2\rho)$ 上对于 $K \ge 0$，有 $Ric_f \ge -(n-1)K$。这里 $\rho \ge 1$，且 $u(x)$ 是公式(1.3)的正解。则存在正常值 C_1 和 C_2 使得对于任意常数 $0<\varepsilon<1$，我们得到在 $\overline{B(\bar{x}, \rho)}$ 上，有：

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le \sqrt{\frac{2n}{1-\varepsilon}}\left[\frac{|\alpha|C_1 + (n-1)K(2\rho-1)C_1}{2\rho} + \frac{C_2}{2\rho^2} + \frac{(2n+\varepsilon)C_1^2}{\varepsilon\rho^2} + \frac{D\theta_1 + \sigma_1 + \eta_1^2}{n} + \theta_1 + (n-1)K + \frac{D\theta_2 + \sigma_2}{2}\right]^{\frac{1}{2}} + \sqrt[4]{\frac{n(\theta_2 + \sigma_2)}{1-\varepsilon}}, \tag{1.4}$$

特别地，在 $\overline{B(\bar{x}, 1)}$ 上，有：

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le \sqrt{2n}\left[\frac{D\theta_1+\sigma_1}{n}+\frac{\eta_1^2}{n}+\theta_1+(n-1)K+\frac{D\theta_2}{2}+\frac{\sigma_2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{n(D\theta_2+\sigma_2)}. \tag{1.5}$$

在 $B(\bar{x},2\rho)$ 上，对于正常值 D，θ_1，θ_2，σ_1，σ_2 和 η_1，我们假设 $\alpha := \max_{\partial B(\bar{x},1)} \Delta_f r$，$u \le e^D$，$|p| \le \theta_1$，$|\nabla p| \le \theta_2$，$|q| \le \sigma$，$|\nabla q| \le \sigma_2$，$|\nabla f| \le \eta_1$。

2. 理论基础

这部分内容，我们主要是陈述由 E. Calabi [6] (同样参考[2] [7])提出的关于 cut-off 函数的一些结论。选择一个 C^2 函数 $\xi:[0,+\infty)\to[0,1]$ 使得对于 $0\le s\le 1$ 有 $\xi(s)=1$，并且对于 $s\ge 2$ 有 $\xi(x)=0$。此外，对于常值 $C_1>0$ 和 $C_2>0$，有

$$-C_1 \le \frac{\xi'(s)}{\sqrt{\xi(s)}} \le 0$$

且

$$\xi''(s) \ge -C_2.$$

在一个 n-维黎曼流形 (M^n,g) 上，假设 $r(x):=d(x,\bar{x})$ 是对于固定点 $\bar{x}\in M^n$ 的一个距离函数。对于任意的 $\rho\ge 1$，我们定义 cut-off 函数：$\varphi(x)=\xi\left(\frac{r(x)}{\rho}\right)$。不失一般性，我们假设在 $B(\bar{x},2\rho)$ 内具有支撑集的函数 φ 是 C^2 的(参考 E. Calabi [6])。

通过计算可以得到，在 $B(\bar{x},2\rho)$ 上，

$$\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} \le \frac{C_1^2}{\rho^2}, \tag{2.1}$$

并且

$$\Delta_f\varphi = \frac{\xi'\Delta_f r}{\rho}+\frac{\xi''|\nabla r|^2}{\rho^2}. \tag{2.2}$$

如果对于一些非负常数 K，有 $Ric_f \ge -(n-1)K$，并且 $x\in B(\bar{x},2\rho)\setminus B(\bar{x},1)$，那么由 f-Laplacian 比较定理(参考[8] [9])可以推出：

$$\Delta_f r(x) \le \alpha+(n-1)K(2\rho-1), \tag{2.3}$$

这里 $\alpha=\max_{\partial B(\bar{x},1)}\Delta_f r$。

因此，我们可以从公式(2.2)和(2.3)中得出

$$\Delta_f\varphi(x) \ge -\frac{C_1}{\rho}\left[\alpha+(n-1)K(2\rho-1)\right]-\frac{C_2}{\rho^2}. \tag{2.4}$$

3. 梯度估计

在这章我们会证明定理 1.1。首先需要得出两个公式。

引理 3.1：假设 (M^n,g) 是一个 n-维黎曼流形，它满足在 $B(\bar{x},2\rho)$ （$\rho\ge 1$）上，对于 $K\ge 0$，有 $Ric_f\ge -(n-1)K$。函数 $u(x)$ 是公式(1.3)的一个正解。如果 $h:=\log u$，我们有：

$$\Delta_f h = ph+q-|\nabla h|^2, \tag{3.1}$$

并且

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 \ge \frac{1}{2n}(\Delta_f h)^2 - \frac{1}{n}\langle\nabla h,\nabla f\rangle^2 + p|\nabla h|^2 + Ric_f(\nabla h,\nabla h) \\ +h\langle\nabla p,\nabla h\rangle + \langle\nabla q,\nabla h\rangle - \langle\nabla h,\nabla|\nabla h|^2\rangle. \tag{3.2}$$

证明： 通过 $\nabla h = \frac{\nabla u}{u}$ 和(1.3)，我们有

$$\Delta_f h = \frac{\Delta_f u}{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2} = ph + q - |\nabla h|^2.$$

根据柯西不等式，可以得出

$$\begin{aligned}(\Delta_f h)^2 &= (\Delta h - \langle\nabla h,\nabla f\rangle)^2 \\ &\le 2(\Delta h)^2 + 2\nabla\langle h,\nabla f\rangle^2 \\ &\le 2n|\mathrm{Hessh}|^2 + 2\langle\nabla h,\nabla f\rangle^2,\end{aligned}$$

也就是，

$$|\mathrm{Hessh}|^2 \ge \frac{1}{2n}(\Delta_f h)^2 - \frac{1}{n}\langle\nabla h,\nabla f\rangle^2. \tag{3.3}$$

通过直接计算可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f|\nabla h|^2 &= |\mathrm{Hessh}|^2 + \langle\Delta\nabla h,\nabla h\rangle - \frac{1}{2}\langle\nabla|\nabla f|^2,\nabla f\rangle \\ &= |\mathrm{Hessh}|^2 + \langle\nabla\Delta h,\nabla h\rangle + Ric(\nabla h,\nabla h) - \mathrm{Hessh}(\nabla h,\nabla f) \\ &= |\mathrm{Hessh}|^2 + \langle\nabla\Delta_f h,\nabla h\rangle + Ric_f(\nabla h,\nabla h) \\ &\ge |\mathrm{Hessh}|^2 + \langle\nabla(ph + q - |\nabla h|^2),\nabla h\rangle + Ric_f(\nabla h,\nabla h) \\ &= |\mathrm{Hessh}|^2 + [p-(n-1)K]|\nabla h|^2 + h\langle\nabla p,\nabla h\rangle + \langle\nabla q,\nabla h\rangle - \langle\nabla h,\nabla|\nabla h|^2\rangle \\ &\ge \frac{1}{2n}(\Delta_f h)^2 - \frac{1}{n}\langle\nabla h,\nabla f\rangle^2 + p|\nabla h|^2 + Ric_f(\nabla h,\nabla h) \\ &\quad + h\langle\nabla p,\nabla h\rangle + \langle\nabla q,\nabla h\rangle - \langle\nabla h,\nabla|\nabla h|^2\rangle.\end{aligned}$$

第二个等式用到了 Bochner 公式，最后不等式用到了公式(3.3)。

现在开始证明定理 1.1。

定理 3.2： 假设 (M^n,g) 是一个 n-维黎曼流形，它满足在 $B(\bar{x},2\rho)$（$\rho\ge 1$）上，对于 $K\ge 0$，有 $Ric_f \ge -(n-1)K$。函数 $u(x)$ 是公式(1.3)的一个正解。对于任意的常数 $0<\varepsilon<1$，在 $\overline{B(\bar{x},\rho)}$ 上，有：

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le \sqrt{\frac{2n}{1-\varepsilon}}\left[\frac{|\alpha|C_1 + (n-1)K(2\rho-1)C_1}{2\rho} + \frac{C_2}{2\rho^2} + \frac{(2n+\varepsilon)C_1^2}{\varepsilon\rho^2} + \frac{D\theta_1 + \sigma_1 + \eta_1^2}{n} + \theta_1 + (n-1)K + \frac{D\theta_2 + \sigma_2}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ + \sqrt[4]{\frac{n(\theta_2 + \sigma_2)}{1-\varepsilon}}, \tag{3.4}$$

特别地，在 $\overline{B(\bar{x},1)}$ 上

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le \sqrt{2n}\left[\frac{D\theta_1+\sigma_1}{n}+\frac{\eta_1^2}{n}+\theta_1+(n-1)K+\frac{D\theta_2}{2}+\frac{\sigma_2}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{n(D\theta_2+\sigma_2)}. \tag{3.5}$$

在 $B(\bar{x},2\rho)$ 上，对于正常值 D，θ_1，θ_2，σ_1，σ_2，η_1，我们假设 $\alpha:=\max_{\partial B(\bar{x},1)}\Delta_f r$，$u\le e^D$，$|p|\le\theta_1$，$|\nabla p|\le\theta_2$，$|q|\le\sigma_1$，$|\nabla q|\le ma_2$，$|\nabla f|\le\eta_1$。

证明：与第二部分中的内容类似，选择 cut-off 函数 φ，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f\left(\varphi|\nabla h|^2\right)&=\frac{1}{2}(\Delta_f\varphi)|\nabla h|^2+\frac{\varphi}{2}\Delta_f|\nabla h|^2+\left\langle\nabla\varphi,\nabla|\nabla h|^2\right\rangle\\&\ge\frac{1}{2}(\Delta_f\varphi)|\nabla h|^2+\frac{\varphi}{2n}\left(ph+q-|\nabla h|^2\right)^2-\frac{\varphi}{n}\langle\nabla h,\nabla f\rangle^2+\left[p-(n-1)K\right]\varphi|\nabla h|^2\\&+\varphi h\langle\nabla p,\nabla h\rangle+\varphi\langle\nabla q,\nabla h\rangle-\left\langle\nabla h,\nabla\left(\varphi|\nabla h|^2\right)\right\rangle+|\nabla h|^2\langle\nabla\varphi,\nabla h\rangle\\&+\frac{1}{\varphi}\left\langle\nabla\varphi,\nabla\left(\varphi|\nabla h|^2\right)\right\rangle-\frac{|\nabla h|^2}{\varphi}|\nabla h|^2,\end{aligned} \tag{3.6}$$

这里用到了引理 1。

定义 $G:=\left(\varphi|\nabla h|^2\right)$，假设 x_1 是 G 的最大值点。我们可以分两种情况讨论：

情况 1：$x_1\in\overline{B(\bar{x},\rho)}\setminus B(\bar{x},)1$。这种情况下，为了简便我们记

$$A:=\tfrac{C_1}{2\rho}\left[\alpha+(n-1)K(2\rho-1)\right]+\tfrac{C_2}{2\rho^2}.$$

在点 x_1，在公式(3.6)两边同时乘以 φ，应用公式(2.4)，对于任意的 $0<\varepsilon<1$，可以得到

$$\begin{aligned}0&\ge -AG+\frac{\varphi^2}{2n}\left(ph+q-|\nabla h|^2\right)^2-\frac{\varphi}{n}|\nabla f|^2G+\left[p-(n-1)K\right]\varphi G\\&-\varphi^{\frac{3}{2}}h|\nabla p|G^{\frac{1}{2}}-\varphi^{\frac{3}{2}}|\nabla q|G^{\frac{1}{2}}-\frac{|\nabla\varphi|}{\varphi^{1/2}}G^{\frac{3}{2}}-\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}G\\&\ge -AG-\frac{\varphi^2}{n}(ph+q)|\nabla h|^2+\frac{G^2}{2n}-\frac{|\nabla f|^2}{n}G-\left[|p|+(n-1)K\right]G\\&-\frac{|h||\nabla p|}{2}(1+G)-\frac{|\nabla q|}{2}(1+G)-\frac{C_1}{\rho}G^{\frac{3}{2}}-\frac{C_1^2}{\rho^2}G\\&\ge\frac{1-\varepsilon}{2n}G^2-[A+\frac{|ph+q|}{n}+\frac{|\nabla f|^2}{n}+|p|+(n-1)K+\frac{|h||\nabla p|}{2}\\&+\frac{|\nabla q|}{2}+\frac{2nC_1^2}{\varepsilon\rho^2}+\frac{C_1^2}{\rho^2}]G-\frac{|h||\nabla p|+|\nabla q|}{2},\end{aligned} \tag{3.7}$$

这里用到了柯西不等式和公式(2.1)。

我们可以得到

$$\frac{1-\varepsilon}{2n}G^2(x_1)\le\left[A+\frac{D\theta_1+\sigma_1}{n}+\frac{\eta_1^2}{n}+\theta_1+(n-1)K+\frac{D\theta_2}{2}+\frac{\sigma_2}{2}+\frac{2nC_1^2}{\varepsilon\rho^2}+\frac{C_1^2}{\rho^2}\right]G(x_1)+\frac{D\theta_2+\sigma_2}{2}, \tag{3.8}$$

即在点 x_1，有

$$G^2(x_1)\le\frac{2n}{1-\varepsilon}\left[A+\frac{D\theta_1+\sigma_1}{n}+\frac{\eta_1^2}{n}+\theta_1+(n-1)K+\frac{D\theta_2}{2}+\frac{\sigma_2}{2}+\frac{2nC_1^2}{\varepsilon\rho^2}+\frac{C_1^2}{\rho^2}\right]G(x_1)+\frac{n(D\theta_2+\sigma_2)}{1-\varepsilon}. \tag{3.9}$$

回想这样一个结论：对于一些 $a_0,a_1,a_2\ge 0$，如果 $a_0^2\le a_1+a_0a_2$，则

$$a_0 \le \frac{a_2}{2} + \sqrt{a_1 + \frac{a_2^2}{4}} \le \frac{a_2}{2} + \sqrt{a_1} + \frac{a_2}{2} = a_2 + \sqrt{a_1}.$$

因此，我们可以从公式(3.9)得出 $G(x_1)$ 的一个上界。在点 x_1，

$$G(x_1) \le \frac{2n}{1-\varepsilon}\left[A + \frac{D\theta_1 + \sigma_1}{n} + \frac{\eta_1^2}{n} + \theta_1 + (n-1)K + \frac{D\theta_2}{2} + \frac{\sigma_2}{2} + \frac{2nC_1^2}{\varepsilon\rho^2} + \frac{C_1^2}{\rho^2}\right] + \left(\frac{n(D\theta_2 + \sigma_2)}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

注意到

$$\sup_{x \in B(\bar{x},\rho)} |\nabla h|^2 = \sup_{x \in B(\bar{x},\rho)} \left(\varphi |\nabla h|^2\right) \le G(x_1),$$

从公式(3.10)可得，在 $\overline{B(\bar{x},\rho)}$ 上：

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le \sqrt{\frac{2n}{1-\varepsilon}\left[A + \frac{D\theta_1 + \sigma_1}{n} + \frac{\eta_1^2}{n} + \theta_1 + (n-1)K + \frac{D\theta_2}{2} + \frac{\sigma_2}{2} + \frac{2nC_1^2}{\varepsilon\rho^2} + \frac{C_1^2}{\rho^2}\right]^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{n(D\theta_2 + \sigma_2)}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.11}$$

情况 2： $x_1 \in \overline{B(\bar{x},1)}$。在这种情况下， $\varphi(x_1) = 1$，且 $\nabla\varphi(x_1) = \Delta_f \varphi(x_1) = 0$。
运用公式(3.6)，在点 x_1 有：

$$\begin{aligned}
0 &\ge \frac{1}{2n}(ph + q - G)^2 - \frac{|\nabla f|^2 G}{n} + \left[p - (n-1)K\right]G - h|\nabla p|G^{\frac{1}{2}} - |\nabla q|G^{\frac{1}{2}} \\
&\ge -\frac{1}{n}(ph+q)G + \frac{G^2}{2n} - \frac{|\nabla f|^2}{n}G - |p|G - (n-1)KG - \frac{|h||\nabla p|}{2}(1+G) - \frac{|\nabla q|}{2}(1+G) \\
&= \frac{G^2}{2n} - \left[\frac{|ph+q|}{n} + \frac{|\nabla f|^2}{n} + |p| + (n-1)K + \frac{|h||\nabla p|}{2} + \frac{|\nabla q|}{2}\right]G - \frac{|h||\nabla p| + |\nabla q|}{2}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

另外，我们得到

$$\begin{aligned}
G^2(x_1) &\le 2n\left[\frac{|ph+q|}{n} + \frac{|\nabla f|^2}{n} + |p| + (n-1)K + \frac{|h||\nabla p|}{2} + \frac{|\nabla q|}{2}\right]G + n\left(|h||\nabla p| + |\nabla q|\right) \\
&\le 2n\left[\frac{D\theta_1 + \sigma_1}{n} + \frac{\eta_1^2}{n} + \theta_1 + (n-1)K + \frac{D\theta_2}{2} + \frac{\sigma_2}{2}\right]G(x_1) + n(D\theta_2 + \sigma_2).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

与情况 1 的证明过程类似，可以从公式(3.13)推出 $\frac{|\nabla u|}{u}$ 的上界。在 $\overline{B(\bar{x},\rho)}$ 上，

$$\frac{|\nabla u|}{u} \le \sqrt{2n}\left[\frac{D\theta_1 + \sigma_1}{n} + \frac{\eta_1^2}{n} + \theta_1 + (n-1)K + \frac{D\theta_2}{2} + \frac{\sigma_2}{2}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[n(D\theta_2 + \sigma_2)\right]^{\frac{1}{4}}. \tag{3.14}$$

根据公式(3.11)和(3.14)，很快能得到公式(3.4)和(3.5)。

参考文献

[1] Yau, S.T. (1975) Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 201-228. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280203

[2] Ma, L. (2006) Gradient Estimates for a Simple Elliptic Equation on Complete Non-Compact Riemannian Manifolds. *Journal of Functional Analysis*, **241**, 374-382. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.06.006

[3] Ma, B., Huang, G. and Luo, Y. (2018) Gradient Estimates for a Nonlinear Elliptic Equation on Complete Riemannian Manifolds. *Proceedings of American Mathematical Society*, **146**, 4993-5002. https://doi.org/10.1090/proc/14106

[4] Brighton, K. (2013) A Liouville-Type Theorem for Smooth Metric Measure Spaces. *Journal of Geometric Analysis*, **23**,

562-570. https://doi.org/10.1007/s12220-011-9253-5

[5] Ge, H. and Zhang, S. (2018) Liouville-Type Theorems on the Complete Gradient Shrinking Ricci Solitons. *Differential Geometry and its Applications*, **56**, 42-53. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2017.11.002

[6] Calabi, E. (1958) An Extension of E. Hopf's Maximum Principle with Application to Riemannian Geometry. *Duke Mathematical Journal*, **25**, 45-56. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-58-02505-5

[7] Cheng, S.Y. and Yau, S.T. (1975) Differential Equations on Riemannian Manifolds and Their Geometric Applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **28**, 333-354. https://doi.org/10.1002/cpa.3160280303

[8] Wei, G.F. and Wylie, W. (2009) Comparison Geometry for the Bakry-Émery Ricci Tensor. *Journal of Differential Geometry*, **83**, 377-405. https://doi.org/10.4310/jdg/1261495336

[9] Wu, J.Y. (2017) Elliptic Gradient Estimates for a Nonlinear Heat Equation and Applications. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, 1511-1517. https://doi.org/10.1016/j.na.2016.11.014