Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(6), 1151-1159**
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.86133

Lower Bound Estimation of Higher Eigenvalues of Laplace Operators on Riemannian Manifold

Hao Huang, Qing Huang, Weijun Lu*

College of Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning Guangxi
Email: 763234301@qq.com, *weijunlu2008@126.com

Received: Jun. 11th, 2019; accepted: Jun. 21st, 2019; published: Jun. 28th, 2019

Abstract

In this paper, we study the lower bound estimates of higher eigenvalues of Lapalce operator on Riemannian manifold. For Riemannian manifolds with negative lower bounds of Ricci curvature, Li-Yau obtained qualitative lower bound estimates. In this paper, we use the method of the gradient estimation of gradient function of the hot kernel and Harnack type inequality; we give the quantitative lower bound estimation of higher eigenvalues on Riemannian manifold with negative lower bound of Ricci curvature.

Keywords

Riemannian Manifold, Ricci Curvature, Higher Eigenvalues, Hot Kernel, Harnack Type Inequality, Lower Bound Estimation

黎曼流形上Laplace算子的高阶特征值下界估计

黄　浩，黄　晴，卢卫君*

广西民族大学理学院，广西　南宁
Email: 763234301@qq.com, *weijunlu2008@126.com

收稿日期：2019年6月11日；录用日期：2019年6月21日；发布日期：2019年6月28日

摘　要

本文研究黎曼流形上Lapalce算子的高阶特征值下界估计，对Ricci曲率具有负下界的黎曼流形，Li-Yau得到了定性的下界估计，本文运用了热核的梯度函数的梯度估计和Harnack不等式的方法，给出了Ricci曲率负下界的黎曼流形上定量的高阶特征值下界估计。

*通讯作者。

文章引用：黄浩，黄晴，卢卫君．黎曼流形上 Laplace 算子的高阶特征值下界估计[J]．应用数学进展，2019，8(6): 1151-1159. DOI: 10.12677/aam.2019.86133

关键词

黎曼流形，Ricci曲率，高阶特征值，热核，Harnack不等式，下界估计

1. 引言以及主要结果

对于Ricci曲率具有负下界$-K(K\ge 0)$的紧致黎曼流形Laplace算子的高阶特征值的下界估计，Li-Yau [1]给出了此类型Ricci曲率条件下的下界估计，即$\lambda_k \ge C(n,k,K,d)$，其中$\forall k\ge 1$，$C(n,k,K,d)$是仅依赖于常数n,k,K,d，这仅是对此得到定性的估计。因此，本文考虑的是在Ricci曲率具有负下界$-K(K\ge 0)$的紧致黎曼流形上Laplace算子高阶特征值下界估计的问题，这个下界估计的结论是定量，简单地说，本文给出$C(n,k,K,d)$的具体形式。

已知热核是热方程

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t)=0\text{，在 } M\times[0,\infty)\text{。} \tag{1.1}$$

的基本解，这也是研究Laplace算子的有效工具之一。本文遵循孙和军[2]提供的方法，即借助于热核的性质以及已得到的Ricci曲率具有负下界的第一特征值λ_1下界估计的结果，来推导出Laplace算子高阶特征值的下界估计，并且所得的估计都是定量的。

但不同于[2]中建立的梯度函数为

$$F(x,t)=|\nabla f|^2-\alpha(t)f_t\text{，}\quad \alpha(t)\in[0,T]\text{。}$$

注意到此处f_t的系数$\alpha(t)$是一个函数，而不是一般的常数，因此对梯度函数进行梯度估计时避免不了的是给出函数$\alpha(t)$的具体形式，进而获得一个新的Harnark不等式，这样就在一定程度上增加了难度。本文所建立的梯度函数为

$$F(x,t)=t\left(|\nabla f|^2-\alpha f_t\right),$$

对于任意固定的$\alpha\ge 1$。并且对$F(x,t)$的梯度估计均来自原文献，因此证明获得的Harnark不等式的证明过程相对简单。

另一方面，蔡开仁[3]获得了关于Ricci曲率满足$Ric(M)\ge -K(K\ge 0)$假设条件下n维的紧致黎曼流形，Laplace算子第一特征值λ_1的下界估计为

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}-\frac{15}{16}K\text{，} \tag{1.2}$$

贾方[4]在相同的Ricci曲率的假设条件下，n维紧致黎曼流形上的Laplace算子第一特征值λ_1的下界估计为

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{2d^2}\left(\frac{1}{4}C_n\sqrt{Kd^2}\right)^2\left[\exp\left(\frac{1}{4}C_n\sqrt{Kd^2}\right)-1\right]^{-2}\text{，} \tag{1.3}$$

其中 d 是流形的直径，$C_n=\max\left(\sqrt{2},\sqrt{n-1}\right)$。

杨洪苍[5]在研究狄利克雷边界条件的第一特征值下界估计时，引进了具有负下界 $-K$ 的 Ricci 曲率和具有负下界 $-H_0$ 的边界平均曲率，在满足下列条件时

$$\begin{cases} n\le 7, K\ge 4(n-1)H_0^2, \\ 3<n<7, K\ge \dfrac{16}{9}\dfrac{(n-1)^2}{(n-3)^2}(n-1)H_0^2. \end{cases}$$

则

$$\lambda_1\ge \frac{\pi^2}{4\rho^2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{(n-1)R\rho^2}\right]^2\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{(n-1)R\rho^2}\right)-1\right]^{-2}, \tag{1.4}$$

其中 ρ 是流形的内接半径。

对此，本文在第 2 节先完成建立 Harnack 不等式的预备工作，第 3 节将给出了在 Ricci 曲率具有负下界 $-K\left(K\ge 0\right)$ 的紧致黎曼流形上 Laplace 算子的高阶特征值的下界定量估计主要定理的证明，本文对定理 1.1，定理 1.2 和定理 1.3 的证明虽然在一些证明的策略上类似于[2]，但因为采用了得当的梯度函数 $F(x,t)$ 的梯度估计，因此在一定程度上简化对定理的证明。其中定理 1.3 的结论说明了高阶特征值下界估计的结论不仅仅是与 $C(n,k,K,d)$ 中四个几何量有关，还与黎曼流形上新的几何量有关。

定理 1.1 设 M 是 n 维紧致黎曼流形，其 Ricci 曲率 $Ric(M)\ge -K$，其中常数 $K\ge 0$，d 为 M 的直径，则

$$\lambda_k\ge C_1(n)\frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2}\exp\left(-\tilde{C}_1(n)\sqrt{Kd^2}\right)-\frac{15}{16}K\text{。} \tag{1.5}$$

其中，

$$C_1(n)=\left(\frac{15}{8n}+1\right)\exp\left(-2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right),\quad \tilde{C}_1(n)=\frac{2}{\sqrt{n-1}}\text{。}$$

注意到当 $n\mapsto+\infty$ 时，$C_1(n)\mapsto 1$，$\tilde{C}_1(n)\mapsto 0$，这样可以部分的证明了存在某个 $\delta\in R$，则

$$\lambda_k\ge\frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2}-\delta\cdot K$$

定理 1.2 设 M 是 n 维紧致黎曼流形，其 Ricci 曲率 $Ric(M)\ge -K$，其中常数 $K\ge 0$，d 为 M 的直径，当 $n=2$ 时，则

$$\lambda_k\ge C_2(n)\frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2}\exp\left(-\tilde{C}_2(n)\sqrt{Kd^2}\right), \tag{1.6}$$

其中，

$$C_2(n)=\frac{\pi^2}{15}\left(\frac{15}{8n}+1\right)^2\exp\left(-2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right),\quad \tilde{C}_2(n)=\frac{2}{\sqrt{n-1}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{。}$$

而当 $n\ge 3$ 时，则

$$\lambda_k\ge C_3(n)\frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2}\exp\left(-\tilde{C}_3(n)\sqrt{Kd^2}\right), \tag{1.7}$$

其中，

$$C_3(n)=\left(\frac{15}{8n}+1\right)^{-2}\exp\left(-2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right),\quad \tilde{C}_3(n)=\frac{2}{\sqrt{n-1}}+\frac{\sqrt{n-1}}{2}。$$

当 $n\to+\infty$ 时， $C_3(n)\mapsto 1$，此时就有

$$\lambda_k\geq\frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2}\exp\left(-C_n\sqrt{Kd^2}\right)。$$

C_n 仅依赖于常数 n。

定理 1.3 设 M 是 n 维紧致黎曼流形，其 Ricci 曲率 $Ric(M)\geq -K$，其中常数 $K\geq 0$， ρ 为 M 的内接半径，则

$$\lambda_k\geq C_4(n)\frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2}\exp\left(-\tilde{C}_4(n)\sqrt{K}\right),\tag{1.8}$$

其中，

$$C_4=\left(\frac{15}{8n}+1\right)^{-2}\exp\left(-2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right),\quad \tilde{C}_4=\frac{2d}{\sqrt{n-1}}+\sqrt{(n-1)\rho^2}。$$

2. Harnack 不等式

设 M 为一个 n 维完备黎曼流形，$\{e_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$ 是 M 上的局部正交标架场。 用下标 i,j 分别表示对 e_i， e_j 方向协变导数。u 是(1.1)式的正解， $u>0$，令 $f=\log u$，则 f 满足

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)f=-|\nabla f|^2。\tag{2.1}$$

其中 ∇f 表示为 $x\in M$ 的梯度，设 Ricci 曲率满足 $Ric(M)\geq -K(K\geq 0)$，对于固定的常数 $\alpha\geq 1$，令 $F(x,t)=t\left(|\nabla f|^2-\alpha f_t\right)$，对此，Schoen-Yau [6]得到了如下梯度估计

$$|\nabla f|^2-\alpha f_t\leq\frac{n\alpha^2}{2t}+\frac{n\alpha^2K}{2(\alpha-1)},\quad t>0,\quad \alpha>1。\tag{2.2}$$

在相同的条件下，Davies [7]将上述的结果改进为

$$|\nabla f|^2-\alpha f_t\leq\frac{n\alpha^2}{2t}+\frac{n\alpha^2K}{4(\alpha-1)},\quad t>0,\quad \alpha>1。\tag{2.3}$$

事实上，我们可以获得如下的 Harnack 不等式。

引理 2.1 设 M 为 n 维完备黎曼流形，Ricci 曲率满足 $Ric(M)\geq -K(K\geq 0)$，设 $u(x,t)$ 是定义在 $M\times[0,\infty)$ 热方程(1.1)的正解，对 $\forall x_1,x_2\in M$， $0<t_1<t_2<\infty$，下列不等式成立

$$u(x_1,t_1)\leq u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{n\alpha/2}\exp\left[\frac{\alpha\rho^2}{4(t_2-t_1)}+\frac{n\alpha K(t_2-t_1)}{4(\alpha-1)}\right]。\tag{2.4}$$

证明 在 M 中取连接 x_1 和 x_2 的极小测地线，$\gamma:[0,1]\mapsto M$，使得 $\gamma(0)=x_2$， $\gamma(1)=x_1$，在 $M\times(0,\infty)$ 上定义曲线 $\eta:[0,1]\mapsto M\times(0,\infty)$， $\eta(s)=(\gamma(s),(1-s)t_2+st_1)$，则 $\eta(0)=(x_2,t_2)$， $\eta(1)=(x_1,t_1)$。

令 $f=\log u(x,t)$，则

$$f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)=f[\eta(1)]-f[\eta(0)]=f[\eta(s)]\big|_{s=1}-f[\eta(s)]\big|_{s=0},$$

于是

$$\begin{aligned} f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}f[\eta(s)]}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \int_0^1 [\langle \gamma, \nabla f\rangle - (t_2-t_1) f_t]\mathrm{d}s \\ &\le \int_0^1 [|\dot{\gamma}||\nabla f| - (t_2-t_1) f_t]\mathrm{d}s \end{aligned} 。\tag{2.5}$$

若记 $\sigma = d(x_1,x_2)$，则 $|\dot{\gamma}| = \sigma$，由(2.3)式得到

$$-f_t \le \frac{1}{\alpha}\left(\frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{4(\alpha-1)} - |\nabla f|^2\right)。\tag{2.6}$$

从而有

$$\begin{aligned} f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2) &\le \int_0^1 \left[\sigma|\nabla f| + \frac{t_2-t_1}{\alpha}\left(\frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{4(\alpha-1)} - |\nabla f|^2\right)\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{t_2-t_1}{\alpha}|\nabla f|^2 + \sigma|\nabla f| + \frac{t_2-t_1}{\alpha}\left(\frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{4(\alpha-1)}\right)\right]\mathrm{d}s \end{aligned}。$$

上式右端被积分项可以看成关于 $|\nabla f|$ 的二次三项式，其极大值为

$$\frac{\alpha\sigma^2}{4(t_2-t_1)} + \frac{t_2-t_1}{\alpha}\left[\frac{n\alpha^2}{2t} + \frac{n\alpha^2 K}{4(\alpha-1)}\right]。\tag{2.7}$$

令 $t = (1-s)t_2 + st_1$，直接由(2.7)式得到

$$\begin{aligned} f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2) &\le \frac{\alpha\sigma^2}{4(t_2-t_1)} + \frac{n\alpha K(t_2-t_1)}{4(\alpha-1)} + \frac{n\alpha(t_2-t_1)}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{(1-s)t_2+st_1} \\ &= \frac{\alpha\sigma^2}{4(t_2-t_1)} + \frac{n\alpha K(t_2-t_1)}{4(\alpha-1)} + \frac{n\alpha}{2}\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

(2.8)式不等式两边同时取指数函数 exp，就可以得到(2.4)式。特别地，取 $\alpha = 2$ 时，(2.4)式就可以得到

$$u(x_1,t_1) \le u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^n \exp\left[\frac{\sigma^2}{2(t_2-t_1)} + \frac{nK(t_2-t_1)}{2}\right]。\tag{2.9}$$

3. 主要定理的证明

引理 3.1 [2] 设 M 是一个 n 维的紧致黎曼流形，并且 Ricci 曲率满足 $Ric(M) \ge -K\,(K \ge 0)$，d 是流形 M 的直径，以 $V_x(r)$ 表示中心在 x 点，半径为 r 的测地球体积，以 $\varphi(r)$ 表示体积元，则

$$V_x(r) \ge \left(\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{Kr^2}{n-1}}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}\right)}\right)^n V_x(d)。\tag{3.1}$$

完成上述的工作后，现在对定理 1.1，定理 1.2 和定理 1.3 作出证明。

定理 1.1 的证明 设 $H(x,y,t_1)$ 是 M 的热核，由(2.9)式可知，下述 Harnack 不等式成立

$$H(x,x,t_1) \le H(x,y,t_1)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^n \exp\left[\frac{\rho^2}{2(t_2-t_1)}+\frac{nK(t_2-t_1)}{2}\right]。$$

取 $t_1 = t$，$t_2 - t_1 = \beta t$，移项并对 y 作积分，因为 $\int_M H(x,y,t)\mathrm{d}y = 1$，因此有

$$H(x,x,t)\int_M \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\beta t}\right)\mathrm{d}y \le (\beta+1)^n \exp\left(\frac{nK\beta t}{2}\right)。 \tag{3.2}$$

直接由引理 3.1 可得

$$\int_M \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\beta t}\right)\mathrm{d}y \ge \left(\frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{Kr^2}{n-1}}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}\right)}\right)^n V_x(d)\exp\left(-\frac{r^2}{2\beta t}\right) \ge \frac{r^n V_x(d)}{d^n \exp\left(n\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}\right)}\exp\left(-\frac{r^2}{2\beta t}\right)。$$

将上式代入代入到(3.2)式，并注意到

$$\int_M H(x,x,t)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty}\exp(-\lambda_i t) \ge k\exp(-\lambda_k t),$$

对 x 作积分可以得到

$$\frac{k}{(\beta+1)^n d^n \exp\left(n\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}\right)} \le r^{-n}\exp\left[\frac{r^2}{2\beta t}+\left(\lambda_k+\frac{nK\beta}{2}\right)t\right]。 \tag{3.3}$$

令 $\frac{n\beta}{2}=\frac{15}{16}$，则 $\beta=\frac{15}{8n}$。假设 r 是确定的，对 t 取极小值，(3.3)式可得

$$\frac{k}{\left(\frac{15}{8n}+1\right)^n d^n \exp\left(n\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}\right)} \le r^{-n}\exp\left[\sqrt{\frac{16nr^2}{15}\left(\lambda_k+\frac{15}{16}K\right)}\right]。 \tag{3.4}$$

取 $r^2\left(\lambda_k+\frac{15}{16}K\right)=\pi^2$，从而有

$$\frac{k\pi^n}{\left(\frac{15}{8n}+1\right)^n d^n \exp\left(n\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}+\sqrt{\frac{16n\pi^2}{15}}\right)} \le \left(\lambda_k+\frac{15}{16}K\right)^{n/2}。 \tag{3.5}$$

进一步可得

$$\lambda_k \ge \frac{k^{2/n}\pi^2}{\left(\frac{15}{8n}+1\right)^2 d^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}\right)\exp\left(2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right)}-\frac{15}{16}K。$$

取

$$C_1(n)=\left(\frac{15}{8n}+1\right)^{-2}\exp\left(-2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right),\quad \tilde{C}_1(n)=\frac{2}{\sqrt{n-1}}。$$

即得到(1.5)式。

当$n \mapsto \infty$时，$C_1(n) \mapsto 1$，$\tilde{C}_1(n) \mapsto 0$，(1.5)式可表示为

$$\lambda_k \ge \frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2} - \frac{15}{16}K,$$

这样可以部分地证明了对存在某个$\delta \in R$，使得

$$\lambda_k \ge \frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2} - \delta \cdot K。$$

证毕。

定理 1.2 的证明 当$n = 2$时，$C_n = \sqrt{2}$，此时(1.3)式可等价于

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{2d^2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2Kd^2}\right)^2\left[\exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{2Kd^2}\right)-1\right]^{-2}$$

进一步地，

$$\frac{K}{\lambda_1} \le \frac{16}{\pi^2}\left[\exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{2Kd^2}\right)-1\right]^2。 \tag{3.6}$$

由(3.6)式的右式后得

$$\begin{aligned}\left(\lambda_k + \frac{15}{16}K\right)^{n/2} &= \lambda_k^{n/2}\left(1+\frac{15K}{16\lambda_k}\right)^{n/2} \le \lambda_k^{n/2}\left(1+\frac{15K}{16\lambda_1}\right)^{n/2}\\ &\le \lambda_k^{n/2}\left(1+\frac{15}{\pi^2}\left[\exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{2Kd^2}\right)-1\right]^2\right)^{n/2}。\\ &\le \lambda_k^{n/2}\left(\frac{15}{\pi^2}\right)^{n/2}\exp\left(\frac{n}{4}\sqrt{2Kd^2}\right)\end{aligned}$$

再将上式的结果代入到(3.5)后得

$$\lambda_k \ge \frac{k^{2/n}\pi^2}{\frac{15}{\pi^2}\left(\frac{15}{8n}+1\right)^2 d^2\exp\left(2\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}\right)\exp\left(2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2Kd^2}\right)。 \tag{3.7}$$

令

$$C_2(n) = \frac{\pi^2}{15}\left(\frac{15}{8n}+1\right)^{-2}\exp\left(-2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right), \quad \tilde{C}_2(n) = \frac{2}{\sqrt{n-1}}+\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

即得到(1.6)式。

当$n \ge 3$时，$C_n = \sqrt{n-1}$，直接由(1.3)式可等价于

$$\lambda_1 \ge \frac{\pi^2}{d^2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{(n-1)Kd^2}\right)^2\left[\exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{(n-1)Kd^2}\right)-1\right]^{-2}。 \tag{3.8}$$

进一步地，

$$1+\sqrt{\frac{(n-1)\pi^2}{16}\frac{K}{\lambda_1}} \le \exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{(n-1)Kd^2}\right)。 \tag{3.9}$$

显然地，当 $n \ge 3$ 时，总有 $\frac{15}{16} \le \frac{(n-1)\pi^2}{16}$。同样地，直接由(3.9)式的右式得

$$\begin{aligned}\left(\lambda_k + \frac{15}{16}K\right)^{n/2} &= \lambda_k^{n/2}\left(1+\frac{15K}{16\lambda_k}\right)^{n/2} \le \lambda_k^{n/2}\left(1+\frac{15K}{16\lambda_1}\right)^{n/2} \\ &\le \lambda_k^{n/2}\left(1+\left[\exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{(n-1)Kd^2}\right)-1\right]^2\right)^{n/2} \\ &\le \lambda_k^{n/2}\exp\left(\frac{n}{4}\sqrt{(n-1)Kd^2}\right)\end{aligned}\text{。}$$

再将上式的结果代入到(3.5)后得

$$\lambda_k \ge \frac{k^{2/n}\pi^2}{\left(\frac{15}{8n}+1\right)^2 d^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{Kd^2}{n-1}}\right)\exp\left(2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{(n-1)Kd^2}\right)\text{。}$$

令

$$C_3(n) = \left(\frac{15}{8n}+1\right)^{-2}\exp\left(-2\sqrt{\frac{16\pi^2}{15n}}\right),\quad \tilde{C}_3(n) = \frac{2}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n-1}}{2}\text{。}$$

即得到(1.6)式，当 $n \to +\infty$ 时，$C_3(n) \mapsto 1$，此时就有

$$\lambda_k \ge \frac{k^{2/n}\pi^2}{d^2}\exp\left(-C_n\sqrt{Kd^2}\right),$$

C_n 仅依赖于常数 n，证毕。

定理 1.3 的证明与定理 1.2 当 $n \ge 3$ 的证明相似，这里不作叙述。

4. 结束语

黎曼流形上 Laplace 算子高阶特征值的下界估计是可以作定量估计的，这是借助于热核的性质以及已得到的 Ricci 曲率具有负下界的第一特征值 λ_1 的下界估计所推导出的结论。本文还借助到狄利克雷边界条件的第一特征值的下界估计得到高阶特征值的下界估计还与流形上的几何量内接半径有关，这个结论推广了 Li-Yau 定性估计的结论。

基金项目

广西民族大学研究生教育创新项目[gxun-chxzs2018037]。

参考文献

[1] Li, P. and Yau, S. (1986) On the Parabolic Kernel of the Schrödinger Operator. *Acta Mathematica*, **156**, 153-201. https://doi.org/10.1007/BF02399203

[2] 孙和军. 紧 Riemann 流形的高阶特征值估计[J]. 数学学报, 2006, 49(3): 539-548.

[3] 蔡开仁. 紧致黎曼流形的第一特征值[J]. 杭州师范大学学报(社会科学版), 2000(3): 1-6.

[4] 贾方. Ricci 曲率具有负下界的紧致 Riemann 流形第一特征值的估计[J]. 数学年刊(中文版), 1991(4): 496-502.

[5] 杨洪苍. 带边紧致黎曼流形 Riemann 边界条件的第一特征值估计[J]. 数学学报, 1991, 34(3): 329-342.

[6] Schoen, R. and Yau, S.T. (1994) Lectures on Differential Geometry. International Press, Boston, MA.
[7] Davies, E. (1989) Heat Kernels and Spectral Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511566158