Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(6), 1072-1078**
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.86123

Hans汉斯

Analysis of Dynamics of Competitive System of Homogeneous Logistics Enterprises

Xia Li[1*], Guirong Pan[2*], Jia Li[1], Wenya Jiang[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
[2]School of Information Science and Engineering, Linyi University, Linyi Shandong
Email: [*]1007563600@qq.com, [*]panguirong@lyu.edu.cn

Received: May 12th, 2019; accepted: May 30th, 2019; published: Jun. 6th, 2019

Abstract

In this paper, a dynamic model of regional logistics dynamics is established by using dynamic analysis method. Based on the qualitative analysis theory of differential equations, the existence and stability analysis of the equilibrium point and limit cycle of the system are carried out. The research results are verified by simulation method and the theoretical explanation is given. Finally, the research is applied to the development of logistics enterprises, which provides a feasible theoretical guidance for the development of regional logistics enterprises.

Keywords

Regional Logistics, Competition Model, Dynamics, Qualitative Analysis

同质性物流企业竞争系统的动力学分析

李　夏[1*]，潘桂荣[2*]，李　佳[1]，姜文雅[1]

[1]临沂大学数学与统计学院，山东 临沂
[2]临沂大学信息科学与工程学院，山东 临沂
Email: [*]1007563600@qq.com, [*]panguirong@lyu.edu.cn

收稿日期：2019年5月12日；录用日期：2019年5月30日；发布日期：2019年6月6日

摘　要

本文利用动力学分析方法，建立了区域物流动力学竞争模型。利用微分方程定性分析理论，对该系统的平衡点及极限环进行存在性及稳定性分析。并通过模拟方法验证了研究结果并给出了理论解释。最后，将该项研究应用到物流企业发展中，为区域物流企业发展提供了可行性理论指导。

[*]通讯作者。

文章引用：李夏，潘桂荣，李佳，姜文雅．同质性物流企业竞争系统的动力学分析[J]．应用数学进展，2019，8(6): 1072-1078. DOI: 10.12677/aam.2019.86123

关键词

区域物流，竞争模型，动力学，定性分析

1. 引言

近年来，随着我国的经济迅猛发展，物流成为人们生活必不可少的一部分。同时，区域物流的发展水平直接影响着一个城市的现代化进程，促进着一方经济综合实力的提高。自上世纪 80 年代，我国的区域物流概念就有了基本雏形，到 20 世纪后期，物流理论与实践得到快速发展，直至 21 世纪初期，物流产业全面发展，目前正处于快速发展阶段。但是，受区域经济发展水平的制约，在资源有限的前提下，不同物流企业之间一定存在着竞争关系。目前，已有许多学者对区域物流竞争性系统进行研究分析并取得了许多理论结果。例如，文[1] [2]从动力学的理论分析基础上研究了区域物流企业发展的内容，文[3]探讨了区域经济发展对物流的影响。

本文利用动力学分析方法，分析同质性物流企业竞争性系统的动力学性质。以两家同质性物流企业的竞争系统为例，首先，在 L-V 模型的基础上，建立区域物流企业竞争性动力学模型。然后，利用微分方程定性分析理论，对该物流系统的平衡点与极限环进行存在性与稳定性分析。最后，通过数值模拟验证了研究结果，给出了该模型的理论解释。该方法可进一步推广到更一般的系统，发展和完善城市物流系统理论体系，深化理论基础，为推动区域经济的物流发展提供可行性理论指导。

2. 区域物流动力学竞争模型

本文主要考虑甲乙两个同质性物流企业间的竞争，用 x, y 分别表示两个同质性物流企业的产出利润，其为关于时间 t 的函数。

我们知道，如果甲乙两个物流企业分别属于两个不同的独立的经济环境，而经济处在飞速发展阶段，那么在相当长的一段时期内，两个企业的利润都是不断上升的，可以用 Malthus 增长模型[4] [5]来表示：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_1 x$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r_2 y$，其中，$r_1$ 与 r_2 分别表示两个物流企业内禀增长率。

考虑到实际情况，一个企业的利润空间是有上界的。假设 P 与 Q 分别表示两个企业的水平最大容纳量，从而有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_1 x\left(1-\frac{x}{P}\right)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r_2 y\left(1-\frac{y}{Q}\right)$，也就是满足 Logistic 增长模型[4] [5]。

如果两个企业处在同一个区域物流环境中，势必引起竞争，在竞争过程中，势必会相互作用，阻碍对方发展。设两家企业 x 和 y 的作用系数分别为 $-l_1$ 和 $-l_2$，也就是相互的影响为 $-l_1 xy$ 与 $-l_2 xy$，从而可以获得两家企业竞争发展的动力系统模型 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_1 x\left(1-\frac{x}{P}\right)-l_1 xy$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r_2 y\left(1-\frac{y}{Q}\right)-l_2 xy$。

考虑到区域经济不断发展给区域物流提供更大的发展空间的实际情况，两家企业在竞争过程中，拓宽了一定的发展空间，所以在阻碍对方发展的同时也促进着双方发展。基于这种企业间既相互竞争又相互促进发展以共同促进整体区域经济发展的情况，设 k_1 与 k_2 分别表示额外竞争系数，则有 x 和 y 获得的

额外竞争量分别是 k_1y 和 k_2x。又因为，实际中额外竞争量不是无限增加的，所以为对方获得的额外竞争量可表示为 $k_1y\left(1-\frac{y}{Q}\right)$ 与 $k_2x\left(1-\frac{x}{P}\right)$。设 x 和 y 的取值范围是 $R_+^2=\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0\}$，于是建立如下区域物流企业动力学竞争系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_1x\left(1-\dfrac{x}{P}\right)+k_1y\left(1-\dfrac{y}{Q}\right)-l_1xy\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r_2y\left(1-\dfrac{y}{Q}\right)+k_2x\left(1-\dfrac{x}{P}\right)-l_2xy\end{cases} \tag{2.1}$$

3. 模型分析

3.1. 平衡点分析

将系统变形为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_1x+k_1y-\dfrac{r_1x^2}{P}-l_1xy-\dfrac{k_1}{Q}y^2\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k_2x+r_2y-\dfrac{k_2}{P}x^2-l_2xy-\dfrac{r_2y^2}{Q}\end{cases} \tag{3.1}$$

令

$$\begin{cases}r_1x+k_1y-\dfrac{r_1x^2}{P}-l_1xy-\dfrac{k_1}{Q}y^2=0\\ k_2x+r_2y-\dfrac{k_2}{P}x^2-l_2xy-\dfrac{r_2y^2}{Q}=0\end{cases}$$

可解得平衡点为 $O(0,0)$， $A(P,0)$， $B(0,Q)$。下面分别对三个平衡点进行定性分析[6]。

3.1.1. 考虑平衡点 $O(0,0)$

考虑线性近似系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_1x+k_1y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k_2x+r_2y\end{cases} \tag{3.2}$$

该系统的特征方程为 $(\lambda-r_1)(\lambda-r_2)-k_1k_2=0$，即 $\lambda^2-(r_1+r_2)\lambda+(r_1r_2-k_1k_2)=0$。

记 $\Delta=(r_1+r_2)^2-4(r_1r_2-k_1k_2)=(r_1-r_2)^2+4k_1k_2>0$，所以有两个实特征根：

$\lambda_1=\dfrac{(r_1+r_2)+\sqrt{\Delta}}{2}$， $\mu_1=\dfrac{(r_1+r_2)-\sqrt{\Delta}}{2}$，显见， $\lambda_1>0$。

1) 当 $r_1r_2-k_1k_2>0$ 时， $r_1+r_2>\sqrt{\Delta}$， $\mu_1>0$，此时， λ_1， μ_1 同号， $O(0,0)$ 为不稳定结点.

2) 当 $r_1r_2-k_1k_2<0$ 时， $r_1+r_2<\sqrt{\Delta}$， $\mu_1<0$，此时， λ_1， μ_1 异号， $O(0,0)$ 为鞍点。

3.1.2. 考虑平衡点 $A(P,0)$

作坐标平移， $x_1=x-P$， $y_1=y$，系统化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-r_1x+\left(k_1-l_1P\right)y-\dfrac{r_1}{P}x^2-l_1xy-\dfrac{k_1}{Q}y^2\\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-k_2x+\left(r_2-l_2P\right)y-\dfrac{k_2}{P}x^2-l_2xy-\dfrac{r_2y^2}{Q}
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

其线性近似系统的系数矩阵为 $A_1=\begin{pmatrix}-r_1 & k_1-l_1P\\ -k_2 & r_2-l_2P\end{pmatrix}$，$A_1$ 的特征多项式为：

$$
\lambda^2+\left(r_1-r_2+l_2P\right)\lambda-r_1\left(r_2-l_2P\right)+k_1k_2-k_2l_1P=0
$$

$$
\text{记 }\Delta=\left(r_1-r_2+l_2P\right)^2-4\left\{-r_1\left(r_2-l_2P\right)+k_1k_2-k_2l_1P\right\}=\left(r_1+r_2-l_2P\right)^2-4k_2\left(k_1-l_1P\right)
$$

1) 当 $\Delta>0$ 时，有两个实特征根：$\lambda_2=\dfrac{\left(r_2-r_1-l_2P\right)+\sqrt{\Delta}}{2}$，$\mu_2=\dfrac{\left(r_2-r_1-l_2P\right)-\sqrt{\Delta}}{2}$。

a) 当 $\left|r_2-r_1-l_2P\right|>\sqrt{\Delta}$ 时，λ_2，μ_2 同号，所以 $A(P,0)$ 是结点。此时，若 $r_2-r_1-l_2P<0$，$A(P,0)$ 是稳定结点，$r_2-r_1-l_2P>0$，$A(P,0)$ 是不稳定结点。

b) 当 $\left|r_2-r_1-l_2P\right|<\sqrt{\Delta}$ 时，λ_2，μ_2 异号，所以 $A(P,0)$ 是鞍点。

2) 当 $\Delta<0$ 时，方程有共轭虚根：$\lambda_2=\dfrac{\left(r_2-r_1-l_2P\right)+i\sqrt{-\Delta}}{2}$，$\mu_2=\dfrac{\left(r_2-r_1-l_2P\right)-i\sqrt{-\Delta}}{2}$。

所以 $A(P,0)$ 是焦点，此时 $r_2-r_1-l_2P<0$ 时为稳定焦点，$r_2-r_1-l_2P>0$ 时为不稳定焦点。

3.1.3. 考虑平衡点 $B(0,Q)$

作坐标平移，$x_1=x$，$y_1=y-Q$，系统化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(r_1-l_1Q\right)x-k_1y-\dfrac{r_1}{P}x^2-l_1xy-\dfrac{k_1}{Q}y^2\\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(k_2-l_2Q\right)x-r_2y-\dfrac{k_2}{P}x^2-l_2xy-\dfrac{r_2}{Q}y^2
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

其线性近似系统的系数矩阵为 $B_1=\begin{pmatrix}r_1-l_1Q & -k_1\\ k_2-l_2Q & -r_2\end{pmatrix}$，$B_1$ 的特征多项式为

$$
\lambda^2+\left(r_2-r_1+l_1Q\right)\lambda-r_2\left(r_1-l_1Q\right)+k_1k_2-k_1l_2Q=0\text{。}
$$

$$
\text{记 }\Delta=\left(r_1+r_2-l_1Q\right)^2-4k_1\left(k_2-l_2Q\right)
$$

1) 当 $\Delta>0$ 时，有两个实特征根：$\lambda_3=\dfrac{\left(r_1-r_2-l_1Q\right)+\sqrt{\Delta}}{2}$，$\mu_3=\dfrac{\left(r_1-r_2-l_1Q\right)-\sqrt{\Delta}}{2}$。

a) 当 $\left|r_1-r_2-l_1Q\right|>\sqrt{\Delta}$ 时，λ_3，μ_3 同号，所以 $B(0,Q)$ 是结点。此时，若 $r_1-r_2-l_1Q<0$，$B(0,Q)$ 是稳定结点，$r_1-r_2-l_1Q>0$，$B(0,Q)$ 是不稳定结点。

b) 当 $\left|r_1-r_2-l_1Q\right|<\sqrt{\Delta}$ 时，λ_3，μ_3 异号，所以 $B(0,Q)$ 是鞍点。

2) 当 $\Delta<0$ 时，方程有共轭虚根：$\lambda_3=\dfrac{\left(r_1-r_2-l_1Q\right)+i\sqrt{-\Delta}}{2}$，$\mu_3=\dfrac{\left(r_1-r_2-l_1Q\right)-i\sqrt{-\Delta}}{2}$。

此时 $B(0,Q)$ 是焦点，当 $r_1-r_2-l_1Q<0$ 时为稳定焦点，$r_1-r_2-l_1Q>0$ 时为不稳定焦点。

3.2. 极限环分析

考虑到物流企业发展的同时所处环境区域经济也在不断发展的实际情况，从而当一个企业达到市场相对容纳量时并不会就此停滞发展，因此我们假设企业甲与乙的产出水平的平方的最大容纳量达到市场容纳量时才会停滞发展。同时，处在同一区域经济环境的两家同质性物流企业，其相互又发展又竞争的动力学系统中，基于企业的产品和服务对象的性质不同，有时也会存在如下的经济形态：甲乙两家企业相遇以争夺资源和服务对象而相互竞争给自我发展带来的抑制作用与自己和对方的平方之积成比例；同时，其中一家企业甲的发展对另一家企业乙的发展起到抑制作用，而另一家企业乙的发展对其中一家企业甲的发展却起到了促进作用。这种情况下两家企业的发展可以表示为如下的形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_1x\left(1-\dfrac{x^2}{P}\right)-k_1y-l_1xy^2\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=r_2y\left(1-\dfrac{y^2}{Q}\right)+k_2x-l_2x^2y\end{cases}\text{，即}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_1x-k_1y-x\left(\dfrac{r_1x^2}{P}+l_1y^2\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k_2x+r_2y-y\left(l_2x^2+\dfrac{r_2y^2}{Q}\right)\end{cases}$$

两家企业在进行竞争过程中，双方的主要矛盾是争夺对方的市场占有量，此时双方的内禀增长率在竞争系统中大致相等，竞争带来的抑制率也大致相等。于是我们不妨假设此时 $r_1=r_2=M$， $l_1=l_2=m$。如我们设定两家企业甲与乙的产出水平的平方的最大容纳量 P 与 Q 满足 $P=\dfrac{r_1}{m}$， $Q=\dfrac{r_2}{m}$，那么，上述模型化为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Mx-ky-mx\left(x^2+y^2\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=My+kx-my\left(x^2+y^2\right)\end{cases}\tag{3.5}$$

此时系统中 $m\left(x^2+y^2\right)$ 表示两家企业在竞争过程中，共同作用下对两家企业的影响。

将系统(3.5)进一步表示为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-ky-mx\left(x^2+y^2-\dfrac{M}{m}\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=kx-my\left(x^2+y^2-\dfrac{M}{m}\right)\end{cases}\tag{3.6}$$

利用极坐标变换 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$，(3.6)式化为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-mr\left(r^2-\dfrac{M}{m}\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=k\end{cases}\tag{3.7}$$

从而可以得出(3.7)式有两个特解： $r=0$， $r=\sqrt{\dfrac{M}{m}}$。其中 $r=0$ 对应系统(3.5)的平衡点，而 $r=\sqrt{\dfrac{M}{m}}$ 对应系统(3.5)的一个周期解，它对应的闭轨线是以原点为中心以 $r=\sqrt{\dfrac{M}{m}}$ 为半径的圆。

在相平面上，以原点为圆心，任意作一个半径为 r 的圆，考察方程组通过这个圆上任一点 $P(r,\theta)$ 的轨线的走向： $\left.\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{\theta=\theta^*}=k>0$， θ 是 t 的递增函数。因此，随着 t 的增大，轨线按逆时针方向旋转.

当 $r=r_1<\sqrt{\frac{M}{m}}$ 时，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-mr_1\left(r_1^2-\frac{M}{m}\right)>0$，$r$ 是 t 的递增函数，因此，随着 t 的增大，轨线从圆 $r=r_1$ 上走出圆外。

当 $r=r_2>\sqrt{\frac{M}{m}}$ 时，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-mr_2\left(r_2^2-\frac{M}{m}\right)<0$，$r$ 是 t 的递减函数，因此，随着 t 的增大，轨线从圆 $r=r_2$ 上走进圆内。

因此，原方程组(3.5)有周期解 $r=\sqrt{\frac{M}{m}}$，$\theta=k\left(t-t_0\right)$，$\left(t>t_0\right)$，闭轨线 $r=\sqrt{\frac{M}{m}}$ 是孤立的，因而它是一个极限环，此极限环的内外侧轨线均逆时针趋近于它，因而是一个稳定的极限环。

综上所述，两家企业处于一个相对稳定的动态竞争系统中，增长具有周期性，双方经过一段时间的竞争，企业产出水平增长稳定分布在该极限环附近。所以，在一定周期内，企业的发展在抑制对方发展的同时也促进着对方的发展。当社会经济发展使得物流需求量增加时，双方的增长率会同时上升，进而提升到一个更大的极限环。同理，当社会物流需求量减少时，双方的增长率会同时下降，从而缩小到一个更小的极限环。

举例说明，设参数的取值为 $k=9$，$M=4$，$m=0.5$，利用 MATLAB 软件作图得到如下轨线分布图：

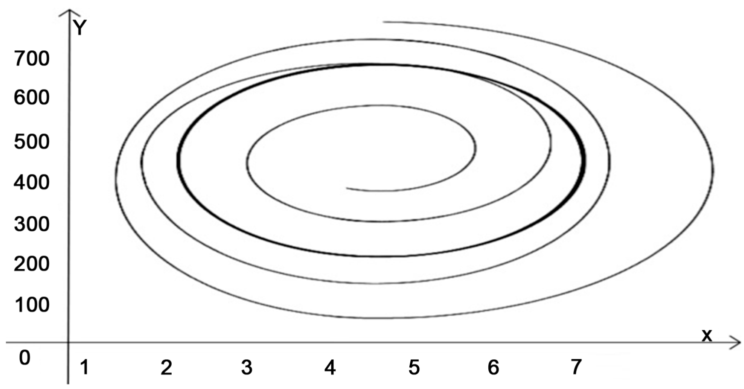

Figure 1. Distribution phase diagram of the inside and outside orbits of the limit cycle
图 1. 极限环内外侧轨线分布图

由图 1 可以看出，数值模拟的结果与上文讨论的情形一致，从而在一定的误差范围内验证了该模型的准确性。进一步表明企业在竞争过程中，存在着一定的稳定性，并绕极限环在相互竞争的同时稳定发展。

4. 结论

区域物流的兴衰越来越影响着一个城市的区域经济发展，本文从基础理论出发, 建立了同质性区域物流动力学竞争模型。运用了微分方程定性分析的理论，通过对系统的平衡点与极限环的分析，得到两家企业在竞争过程中的相互影响关系。并以此为基础，举例分析验证，得到两个企业可以稳定共存的条件，进一步深化了对区域同质性物流企业竞争系统的本质认识。通过对这一问题的深度探讨，希望对区域同质性物流企业的发展提供参考。

基金项目

山东省自然科学基金(ZR2018MA016, ZR2015AL005)，山东省软科学研究计划项目(2012RKA13021)，临沂大学大学生创新创业训练计划项目(201710452001)。

参考文献

[1] 杨波, 薛伟. 区于物流系统动力学方针研究[J]. 森林工程, 2009, 25(10): 81-85.

[2] 李丽萍. 区域物流系统动力学模型构建与应用研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 东北林业大学, 2012.

[3] 张文杰. 区域经济发展与物流[J]. 物流技术, 2002(3): 7-9.

[4] 王树禾. 微分方程模型与混沌[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999.

[5] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[6] 丁同仁. 常微分方程教程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1963.