Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(7), 1284-1290
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.87150

Hans汉斯

Exponential Attractor for Nonclassical Reaction-Diffusion Equation with Distributed Derivative

Liyun Yan, Yonghua Ren*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi
Email: 1037325564@qq.com, *renyonghua@tyut.edu.cn

Received: July 4th, 2019; accepted: July 19th, 2019; published: July 26th, 2019

Abstract

In this paper, the existence of exponential attractor for a class of nonclassical reaction-diffusion equation with distributed derivative under homogeneous Neumann boundary conditions is studied by using the method of constructing extrusion property when the nonlinear term satisfies the growth of any polynomial.

Keywords

Reaction-Diffusion Equation, Distribution Derivative, Extrusion Property, Exponential Attractor

具有分布导数的非经典反应扩散方程的指数吸引子

闫丽云，任永华*

太原理工大学数学学院，山西 晋中
Email: 1037325564@qq.com, *renyonghua@tyut.edu.cn

收稿日期：2019年7月4日；录用日期：2019年7月19日；发布日期：2019年7月26日

摘 要

本文利用构造挤压性的方法，研究了一类具有分布导数的非经典反应扩散方程在齐次Neumann边界条件

*通讯作者。

文章引用：闫丽云，任永华．具有分布导数的非经典反应扩散方程的指数吸引子[J]．应用数学进展，2019，8(7): 1284-1290. DOI: 10.12677/aam.2019.87150

下，当非线性项满足任意多项式增长时，该方程指数吸引子的存在性。

关键词

反应扩散方程，分布导数，挤压性，指数吸引子

1. 引言

本文主要考虑如下形式的非线性反应扩散方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \Delta u + \eta u + f(u) = D_i h^i + h & (x,t) \in \Omega \times R^+ \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

非线性反应扩散方程广泛应用于流体在多孔介质中的运动规律，如生物科学，燃烧理论，流体力学，固体力学和热传导等领域[1] [2]。1980 年，Aifantis 指出经典的反应扩散方程

$$u_t - \Delta u = f(u) + g(x)$$

忽略了固体扩散过程中的粘性，弹性和压力等影响因素，不能全面包含反应扩散方程的诸多方面[1]。而 Aifantis 进一步研究发现，该能量方程的具体构成虽然可以揭示扩散的全部过程，但也跟扩散物质的性质紧密相连。例如，固体母质有无弹性，压力，粘性或记忆等，其相应的方程都是不一样的。Aifantis 通过研究更多实际问题，最终建立了非经典的反应扩散方程

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u = f(u) + g(x)$$

后来非经典反应扩散方程的全局吸引子和指数吸引子的存在性问题受到许多教学工作者的关注[3]-[8]。在文献[9] [10]中 Temam 和 Robinson 研究了如下方程的全局吸引子

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + g(u) = D_i f^i + f & (x,t) \in \Omega \times R^+ \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

而对于问题(1)指数吸引子的存在性还没有任何结果，类似于文献中构造挤压性的方法，本文将进一步研究 f 满足如下条件时该方程指数吸引子的存在性问题，其中方程中含有的导数项使得证明系统的指数吸引子更为复杂，同时也使研究更有意义。

在方程(1)中，其中 $\Omega \subset R^n$ 是具有光滑边界的有界区域，η 为正常数，f 满足任意多项式增长，且 $f(0)=0$，$D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 是弱导数，$h^i, h \in L^2(\Omega)$ $(i = 1,2,\cdots,n$；h^i 仅依赖于 x_i)，且 $D_i h^i = \sum_{i=1}^{n} D_i h^i$

我们假设 f 满足如下的结构性条件：存在正常数 $C_i\,(i=0,1,2,3)$ 以及 l 有

$$f'(s) \ge -l,\ \forall s \in R \tag{2}$$

$$C_1|s|^p - C_0 \le f(s)s \le C_2|s|^p + C_3,\ p \ge 2, \forall s \in R \tag{3}$$

2. 预备知识

2.1. 常用空间

记 $H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega)$，$(\cdot,\cdot)$ 与 $\|\cdot\|$ 分别表示 H 中的内积和范数，用 $\|\cdot\|$ 表示 V 的范数。

2.2. 基本定义及定理

定义 2.1 [11] 我们称半群 $S(t): X \to X, t > 0$ 存在指数吸引子是指由这样的紧子集 M 满足：$A \subseteq M \subseteq B$ 为 $(S(t), B)$ 的指数吸引子如果：

1) M 有有限的分形维数；

2) M 为正不变集 $S(t)$　$S(t)M \subset M$，$\forall t > 0$；

3) M 为算子半群 $\{S(t)\}_{t\ge0}$ 的指数吸引集，即存在常数 $\alpha, \beta > 0$ 使得对任意的 $u \in B$，

$$dist_H\left(S(t)u, M\right) \le \alpha e^{-\beta t}, \forall t > 0$$

其中 $dist$ 表示两个集合间的非对称 Hausdorff 距离。

定义 2.2 [11] 映射 $S: E \to E$ 被称为在子集 $B \subset E$ 上满足挤压性，如果存在 E 的有限维子空间 E_N 以及正交投影 $P_N: E \to E_N$，使得对 $\forall u, v \in B$

$$\left\|(1-P_N)(Su - Sv)\right\|_E \le \left\|P_N(Su - Sv)\right\|_E$$

或者

$$\left\|(Su - Sv)\right\|_E \le \frac{1}{8}\|u - v\|_E$$

成立。

引理 2.3 [11] 若 $B \subset E$ 有界，$\{S(t)\}_{t\ge0}$ 是 E 上的半群，如果存在 $t_* > 0$，使得映射 $S_* = S(t_*)$ 满足定义 2.2 中的挤压性，则称半群 $\{S(t)\}_{t\ge0}$ 在 B 上满足离散挤压性。

引理 2.4 [11] 假设映射 $S: E \to E$ 是 Lipschitz 连续映射，$B_1 \subset E$ 是一非空紧的正不变子集，如果 S 在 B_1 中满足定理 2.3 中的挤压性，则半群 $S_d := (S^n)_{n\in N}$ 在 B_1 中存在一指数吸引子 $\mathcal{M}_*$。

3. H_0^1 中的指数吸引子

引理 3.1 设 $\Omega \subset R^n$ 是具有光滑边界的有界区域，f 是 C^1 函数，$f(0) = 0$，且满足式(2)和(3)，$h^i, h \in L^2(\Omega)$（$i = 1, 2, \cdots, n$；h^i 仅依赖于 x_i），$D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 是弱导数。则对于任意初始值 $u_0 \in H$ 和 $T > 0$，系统(1)都存在唯一的弱解 $u(x,t)$ 满足

$$u \in C([0,T], H); u \in L^2([0,T]; V) \cap L^p((0,T); \Omega)$$

并且 $u(t)$ 关于初值 u_0 在 H 中是连续的。

证明 利用标准的Fatou-Galerkin方法可证明方程(1)的弱解的存在唯一性。具体可参考文献[12]-[17]等。

根据引理 3.1 可得，系统(1)的解可表示为：

$$S(t)u_0 = u(t), \forall t \ge 0$$

其中 $S(t):H\to H$ 单参数族算子 $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ 满足性质：$S(t)\cdot S(\tau)=S(t+\tau),\forall t,\tau\ge 0$；$S(0)=I$ （恒等算子）我们称 $S(t)$ 为系统(1)对应的半群。进一步，若 $S(t):H\to H(t\ge 0)$ 连续，则 $S(t)$ 为连续半群。

引理 3.2 设 $\Omega\subset R^n$ 是具有光滑边界的有界区域，f 是 C^1 函数，$f(0)=0$，且满足式(2)和(3)，$h^i,h\in L^2(\Omega)$ （$i=1,2,\cdots,n$；h^i 仅依赖于 x_i），$D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 是弱导数。则由问题(1)生成的连续半群 $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ 在 H 中存在有界吸收集 B_0 和全局吸引子 A。

因此

$$B=\overline{\bigcup_{0\le t\le T}S(t)B_0}$$

是 H 中正的紧不变集。

引理 3.3 [11] 存在 $M>0$ 和 $T=T(B)$，对于任意有界集 $B\subset H$，有：

$$\left|S(t)u_0\right|_p^2\le M,\forall t\ge T,u_0\in B$$

由引理 3.3 我们可以得到以下引理：

引理 3.4 存在 $L>0$，有：

$$\sup_{u_0\in B}\left\|u_t(t)\right\|^2\le L,\forall t\ge 0$$

证明 对系统(1)关于时间 t 求导，且令 $v=u_t$ 有：

$$v_t-\Delta v_t-\Delta v+f'(u)v=0 \tag{4}$$

对上式用 $-\Delta v$ 作用，结合结构性条件(2)可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla v\|^2+\|\Delta v\|^2\right)+\|\Delta v\|^2+\eta\|\nabla v\|^2\le l\|\nabla v\|^2 \tag{5}$$

结合 Gronwall 引理，引理得证。

引理 3.5 设 $\Omega\subset R^n$ 是具有光滑边界的有界区域，f 是 C^1 函数，$f(0)=0$，且满足式(2)和(3)，$h^i,h\in L^2(\Omega)$ （$i=1,2,\cdots,n$；h^i 仅依赖于 x_i），$D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 是弱导数。$u(t),v(t)$ 是满足初始条件 $u(0),v(0)\in B$ 的系统(1)的两个解，故下式成立：

$$\|u(t)-v(t)\|\le \mathrm{e}^{c_2 t}\|u(0)-v(0)\| \tag{6}$$

证明 令 $\omega(t)=u(t)-v(t)$，则 $\omega(0)=u(0)-v(0)$ 满足：

$$\omega_t-\Delta\omega_t-\Delta\omega+\eta\omega=f(v)-f(u) \tag{7}$$

用 $-\Delta\omega$ 与式(7)在 H 中作内积

$$(-\Delta\omega,\omega_t)+(\Delta\omega,\Delta\omega_t)+(\Delta\omega,\Delta\omega)-(\Delta\omega,\eta\omega)=(f(v)-f(u),-\Delta\omega) \tag{8}$$

即：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\omega\|^2+\|\Delta\omega\|^2\right)+\|\Delta\omega\|^2+\eta\|\nabla\omega\|^2=(f(v)-f(u),-\Delta\omega) \tag{9}$$

由结构性条件(2)：

$$\left|\int_\Omega\left(f(v)-f(u)\right)(-\Delta\omega)\mathrm{d}x\right|\le\int_\Omega\left|f'\left(\theta v+(1-\theta u)\right)\right||\Delta\omega|^2\,\mathrm{d}x\,(0<\theta<1)$$
$$\le c\int_\Omega l|\Delta\omega|^2\,\mathrm{d}x\le c_1|\Delta\omega|^2 \tag{10}$$

故有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla\omega\|^2+\|\Delta\omega\|^2\right)\le c_2\left(\|\nabla\omega\|^2+\|\Delta\omega\|^2\right) \tag{11}$$

根据 Gronwall 引理可得：

$$\|\nabla\omega(t)\|^2+\|\Delta\omega(t)\|^2\le\mathrm{e}^{c_2t}\left(\|\nabla\omega(0)\|^2+\|\Delta\omega(0)\|^2\right) \tag{12}$$

引理 3.6 假设引理 2.5 的条件满足，则对任意的$T>0$，映射$(t,u)\mapsto S(t)u$在$[0,T]\times B$上是 Lipschitz 连续的。

证明 对任意的$u_1,u_2\in B,t_1,t_2\in[0,T]$，我们有：

$$\|S(t_1)u_1-S(t_2)u_2\|_2\le\|S(t_1)u_1-S(t_1)u_2\|_2+\|S(t_1)u_2-S(t_2)u_2\|_2 \tag{13}$$

上述不等式的第一项可用引理 2.5 估计。再由引理 2.4，我们可以得到如下估计：

$$\|u(t_1)-u(t_2)\|_2\le\left|\int_{t_1}^{t_2}\|u_t(y)\|_2\,\mathrm{d}y\right|\le L|t_1-t_2| \tag{14}$$

因此

$$\|S(t_1)u_1-S(t_2)u_2\|_2\le L\left[|t_1-t_2|+\|u_1-u_2\|_2\right] \tag{15}$$

其中$L=L(T)\ge0$。

引理 3.7 假设f满足结构性条件(2)和(3)，$u(t),v(t)$是系统(1)关于初值$u(0),v(0)\in B$的两个解，则系统(1)生成的半群$S(t)$满足离散的挤压性，即：存在$t_*(>0)$和$N=N_0=N(t_*)(>0)$使得当：

$$\|(1-P)(S(t_*)u_0-S(t_*)v_0)\|_2>\|P(S(t_*)u_0-S(t_*)v_0)\|_2$$

则有

$$\|S(t_*)u_0-S(t_*)v_0\|_2\le\frac{1}{8}\|u_0-v_0\|_2$$

证明 由于算子$A=-\Delta$是自伴的有紧逆的正算子，由经典的谱理论，存在一列特征值$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots$，使得当$N\to\infty$时

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots\le\lambda_N\le\cdots,\lambda_N\to\infty$$

在H中存在特征向量$\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$组成的一完全集，使得对应的特征值满足：

$$A\omega_i=\lambda_i\omega_i,i=1,2,\cdots \tag{16}$$

令$H_N=Span\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$则$P_N:H\to H_N$是正交投影，记$Q_N=1-P_N$是在$H_N$上正交完备化的正交投影，$\omega=P_N\omega+Q_N\omega\triangleq p+q$。假设$|P_N\omega(t)|\le|Q_N\omega(t)|$。

用$-\Delta q$与式(7)在H中作内积，

$$(-\Delta q,\omega_t)+(\Delta q,\Delta\omega_t)+(\Delta q,\Delta\omega)-(\Delta q,\eta\omega)=\left(f(v)-f(u),-\Delta q\right) \tag{17}$$

即：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla q\|^2+\|\Delta q\|^2\right)+\|\Delta q\|^2+\eta\|\nabla q\|^2=\left(f(v)-f(u),-\Delta q\right) \tag{18}$$

由结构性条件(2)：

$$\left|\int_\Omega\left(f(v)-f(u)\right)(-\Delta q)\mathrm{d}x\right|\le c_3\int_\Omega|\omega||\Delta q|\mathrm{d}x\le\frac{\|\Delta q\|^2}{2}+\frac{c_3}{2}\|\omega\|^2 \tag{19}$$

由(18) (19)式可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla q\|^2+\|\Delta q\|^2\right)+\|\Delta q\|^2\le c_3\|\omega\|^2 \tag{20}$$

根据引理 3.5 和 Poincare 不等式可得：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla q\|^2+\|\Delta q\|^2\right)+\frac{\|\Delta q\|^2}{2}+\frac{\lambda_{N+1}}{2}\|\nabla q\|^2\\&\le c_3\|\omega\|^2\le c_3\|p+q\|^2\le 2c_3\|q\|^2\le 2c_3\lambda_{N+1}^{-1}\|\nabla q\|^2\\&\le c_4\lambda_{N+1}^{-1}\|\Delta\omega\|^2\le c_4\lambda_{N+1}^{-1}\mathrm{e}^{c_2t}\|\Delta\omega(0)\|^2\end{aligned} \tag{21}$$

又因为$\lambda_1\le\lambda_{N+1}$，我们可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla q\|^2+\|\Delta q\|^2\right)+\frac{\|\Delta q\|^2}{2}+\frac{\lambda_1}{2}\|\nabla q\|^2\le c_4\lambda_{N+1}^{-1}\mathrm{e}^{c_2t}\|\Delta\omega(0)\|^2 \tag{22}$$

记$c_5=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\lambda_1}{2}\right\}$，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla q\|^2+\|\Delta q\|^2\right)+c_5\left(\|\nabla q\|^2+\|\Delta q\|^2\right)\le c_4\lambda_{N+1}^{-1}\mathrm{e}^{c_2t}\|\Delta\omega(0)\|^2 \tag{23}$$

由 Gronwall 引理可得：

$$\begin{aligned}\|\nabla q(t)\|^2+\|\Delta q(t)\|^2&\le\mathrm{e}^{-c_5t}\left(\|\nabla q(0)\|^2+\|\Delta q(0)\|^2\right)+c_6\lambda_{N+1}^{-1}\mathrm{e}^{c_2t}\|\Delta\omega(0)\|^2\\&\le c_7\left(\mathrm{e}^{-c_5t}+c_8\lambda_{N+1}^{-1}\mathrm{e}^{c_2t}\right)\|\Delta\omega(0)\|^2\end{aligned} \tag{24}$$

故：

$$\|\Delta\omega(t)\|^2\le 2\|\Delta q(t)\|^2\le c_9\left(\mathrm{e}^{-c_5t}+c_{10}\lambda_{N+1}^{-1}\mathrm{e}^{c_2t}\right)\|\Delta\omega(0)\|^2 \tag{25}$$

设$t_*>0$，使得$c_9\mathrm{e}^{-c_5t_*}\le\frac{1}{128}$，固定$t_*$，且 N 足够大，使得$c_9c_{10}\lambda_{N+1}^{-1}\mathrm{e}^{c_2t^*}\le\frac{1}{128}$。有：

$$\|\Delta\omega(t_*)\|\le\frac{1}{8}\|\Delta\omega(0)\| \tag{26}$$

定理 3.8 设$\Omega\subset R^n$是具有光滑边界的有界区域，f 是C^1函数，$f(0)=0$，且满足式(2)和(3)，$h^i,h\in L^2(\Omega)$ ($i=1,2,\cdots,n$；h^i仅依赖于x_i)，$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$是弱导数。则系统(1)生成的半群$\{S(t)\}_{t\ge0}$在$V$中存在指数吸引子$M$。

证明 由引理 3.7 可得，存在$t_*>0$使得$S(t_*)$满足离散的挤压性，由文献[11]中定理 1.1 可知，存在指数吸引子M_*，设：

$$M=\bigcup_{0\le t\le t_*}S(t)M_*$$

又由引理 3.6 可得：$(t,u)\mapsto S(t)u$ 从 $[0,T]\times B$ 到 B 是 Lipschitz 连续的，由文献[11]中定理 2.1 可知，M 为 $\left(\{S(t)\}_{t\ge 0},B\right)$ 相应的指数吸引子。

基金项目

国家自然科学基金(11872264)。

参考文献

[1] Aifantis, E.C. (1980) On the Problem of Diffusion in Solids. *Acta Mechanica*, **37**, 265-296. https://doi.org/10.1007/BF01202949

[2] Lions, J.L. and Magenes, E. (1972) Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Springer Nature, Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65161-8

[3] 王刚，汤燕斌. 反应扩散方程在(Ω)和(Ω)中的指数吸引子[J]. 数学物理学报, 2015, 35(4): 641-650.

[4] 刘转玲. 一类非经典扩散方程在强拓扑空间中的指数吸引子[J]. 应用泛函分析学报, 2013, 15(3): 285-290.

[5] Zhong, C.K., Sun, C.Y. and Niu, M. (2005) On the Existence of Global Attractor for a Class of Infinite Dimensional Dissipative Nonlinear Dynamical Systems. *Chinese Annals of Mathematics Series B*, **26**, 393-400. https://doi.org/10.1142/S0252959905000312

[6] 康亚虎，马巧珍. 具有导数项的非线性反应扩散方程指数吸引子的存在性[J]. 系统科学与数学，2012，32(11): 1407-1412.

[7] Zhong, C.K., Yang, M.H. and Sun, C.Y. (2006) The Existence of Global Attractors for the Norm-to-Weak Continuous Semigroup and Application to the Nonlinear Reaction-Diffusion Equations. *Journal of Differential Equations*, **223**, 367-399. https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.06.008

[8] Babin, A.V. and Vishik, M.I. (1990) Attractors of Partial Differential Evolution Equations in an Unbounded Domain. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **116**, 221-243. https://doi.org/10.1017/S0308210500031498

[9] Temam, R. (2000) Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer Nature, Switzerland.

[10] Robinson, J.C. and Pierre, C. (2003) Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors. Cambridge Texts in Applied Mathematics. *Applied Mechanics Reviews*, **56**, B54-B55. https://doi.org/10.1115/1.1579456

[11] Eden, A., Foias, C., Nicolaenko, B. and Temam, R. (1994) Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations. Wiley, Masson, New York, Paris.

[12] 黄艳. 半线性非局部反应扩散方程解的存在性与吸引子[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2015.

[13] 孙晶晶，张建文. 一类非线性发展方程的整体吸引子[J]. 太原理工大学学报, 2018, 49(2): 300-307.

[14] Arrieta, J.M., Cholewa, J.W., Dlotko, T. and Rodríguez-Bernal, A. (2004) Asymptotic Behavior and Attractors for Reaction Diffusion Equations in Unbounded Domains. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **56**, 515-554. https://doi.org/10.1016/j.na.2003.09.023

[15] Wang, B. (1999) Attractors for Reaction-Diffusion Equations in Unbounded Domains. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **128**, 41-52. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(98)00304-2

[16] 任怡静. 关于无界区域上具有记忆项的半线性耗散波动方程的整体吸引子[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2012.

[17] 曹兰兰，姜金平，曹伯芳. 一类非自治反应扩散方程指数吸引子的存在性[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2018, 38(3): 36-41.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org