Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(7), 1291-1298**
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.87151

Hans汉斯

Vertex Partitions of Graphs into a Forest and a Forest with Bounded Maximum Degree

Weiqiang Yu

Department of Mathematics and Computation, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 634653169@qq.com

Received: July 4th, 2019; accepted: July 19th, 2019; published: July 26th, 2019

Abstract

An (F, F_d)-partition of a graph G is a vertex partition of its vertex set into subsets F and F_d such that $G[F]$ is a forest, while $G[F_d]$ is a forest of maximum degree at most d. In this paper, we prove that every planar graph without 4-cycles and 5-cycles admits an (F, F_5)-partition.

Keywords

Vertex Partition, Forest, Maximum Degree

平面图的(F, F_d)-分解问题

俞伟强

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华
Email: 634653169@qq.com

收稿日期：2019年7月4日；录用日期：2019年7月19日；发布日期：2019年7月26日

摘 要

图G的(F, F_d)-分解是指将G的顶点集合划分为两个子集F和F_d，使得$G[F]$为森林，$G[F_d]$为最大度至多为d的森林。本文证明了每一个不含4-圈和5-圈的平面图都存在(F, F_5)-分解。

关键词

顶点分解，森林，最大度

文章引用: 俞伟强. 平面图的(F, F_d)-分解问题[J]. 应用数学进展, 2019, 8(7): 1291-1298.
DOI: 10.12677/aam.2019.87151

1. 引言

本文提及的图都是有限简单无向图。假设$G=(V,E)$。令$G_1,\cdots,G_m$表示 m 个图类。如果$V(G)$可以被分解为 m 个集合$V_1,\cdots,V_m$，使得对于$1\le l\le m$，子图$G[V_l]$属于图类G_l，那么我们称其为图 G 的一个$(G_1,\cdots,G_m)$-分解。为简单起见，我们用 F，I，Δ_k 和 F_k 分别表示图类森林，独立集，最大度为 k 的图和最大度为 k 的森林。文中的三角形指 3-圈。如果两个圈或面至少有一条公共边，则称它们相邻。如果两个圈或面至少有一个公共点，则称它们相交。

著名的四色定理[1] [2]告诉我们每一个平面图都存在(I,I,I,I)-分解。并且根据无圈染色问题的相关研究，在 1976 年，Borodin [3]证明了每一个平面图都存在(I,F,F)-分解。此后，在 1990 年，Poh [4]证明了每一个平面图都存在(F_2,F_2,F_2)-分解。但是，早在 1969 年，Chartrand [5]等人就找到了不存在(F,F)-分解的平面图。

另一方面，2008 年，Raspaud 和 Wang [6]证明了每一个不含距离小于 2 的三角形或对于某个$k\in(3,4,5,6)$，不含 k-圈的平面图都存在(F,F)-分解。此外，在不久后 Chen，Raspaud 和 Wang [7]成功证明了每一个不含相交三角形的平面图都存在(F,F)-分解。最近，Dross 和 Montassier [8]证明了每一个不含 3-圈的平面图存在(F,F_5)-分解。

本文证明了如下结果：

定理 每一个不含 4-圈和 5-圈的平面图都存在(F,F_5)-分解。

接下来给出文中的一些基本记号。G 中点 v 的度数用$d_G(v)$表示。我们分别用 k-点，k^+-点和k^--点表示度为 k 的点，度至少为 k 的点和度至多为 k 的点。同理定义 k-面，k^+-面和k^--面。称 G 中的8^+-点为大点，否则为小点。因此 v 的8^+-邻点称为大邻点，否则称为小邻点。称 v 在 F 中的邻点为 F-邻点。用$n_b(v)$表示 v 的大邻点的个数。对于$f\in F(G)$，若 f 的边界点按顺时针方向排列依次为$v_1,v_2,\cdots,v_n$，则可记作$f=[v_1v_2\cdots v_n]$。并且令f_i表示以v_iv_{i+1}为公共边与 f 相邻的面，其中$i=1,2,\cdots,n$且 i 对 n 取模。对于 m-面$f=[v_1v_2\cdots v_m]$，若v_i的度数为a_i，则可记 f 为$(a_1,a_2,\cdots,a_m)$-面。假设 v 为 k-点，令$v_1,v_2,\cdots,v_k$为按顺时针方向排列的邻点，则g_i表示以vv_i和vv_{i+1}为边界与 v 关联的面，其中$i=1,2,\cdots,k$且 i 对 k 取模。

对于集合$S\subset V$，令$G-S$表示在 G 中删去所有的 S 中的点及其关联的边所得的图。对于与 V 不交的点集 S，令$G+S$表示在 G 中加上 S 中的点所得的图。对于与 E 不交的边集E'，令$G+E'$表示在 G 中加上E'中的边所得的图。

2. 定理证明

2.1. 极小反例的结构性质

假设$G=(V,E)$为上述定理点数最少的极小反例。显然，G 是连通的，否则我们可以找到一个点数更小的极小反例。首先我们给出 G 的一些结构性质。

断言 1 G 中不存在2^--点。

证明 假设 v 为 G 中的2^--点。根据 G 的极小性可得，$G-v$存在(F,F_5)-分解。如果$d(v)=1$，那么我们可将 v 放入 F。假设$d(v)=2$，若它的两个邻点都在 F 中，则可将 v 放入F_5。否则 v 至少有一个邻点在F_5中，此时我们可将 v 放入 F。因此我们总能得到 G 的(F,F_5)-分解，矛盾。

断言 2 G 中的 3-点至少相邻一个大点。

证明 假设 $d(v)=3$ 且它的邻点都为小点，即 7^--点。根据 G 的极小性可得，$G-v$ 存在 (F,F_5)-分解。如果 v 的三个邻点中至少有两个在 F_5 中，那么我们可将 v 放入 F。如果它的三个邻点都在 F 中，那么我们可将 v 放入 F_5。现在假设 v 恰好有一个邻点 u 在 F_5 中。如果 u 至多有一个 F-邻点，那么我们可将 u 放入 F，v 放入 F_5。否则因为 u 为小点，它至多有四个 F_5-邻点，此时我们可将 v 放入 F_5。因此我们总能得到 G 的 (F,F_5)-分解，矛盾。

断言 3 G 中不存在 6-面 $f=[v_1v_2\cdots v_6]$ 使得 f_1,f_2,f_3 是三角形，且 $d(v_i)=3$，$i=1,2,\cdots,6$，或当 v_1 只有一个大邻点时，$d(v_1)=4$，$d(v_i)=3$，$i=2,3,\cdots,6$。

证明 不妨设 $f=[v_1,v_2,\cdots,v_6]$ 为 G 中满足断言 1 的 6-面，令 u_1,u_2,u_3 分别为与 f_1,f_3,f_5 关联的第三个点，且令 v_1 的第四个邻点为 u_4。则由断言 2，u_i 为大点，$i=1,2,3$。令 $G'=G-\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}+\{w_1,w_2,w_3\}+\{w_1w_2,w_2w_3,w_3w_1,w_1u_1,w_2u_2,w_3u_3\}$，则 G' 中不存在 4-圈和 5-圈。由 G 的极小性可得，G 存在 (F,F_5)-分解。我们要证明在下列所有情况下我们都可以得到 G 的 (F,F_5)-分解。在下列情形中，若 u_4 在 F_5 中，则将 v_1 放入 F_5 可能会增加 $G[F_5]$ 中点的度数，此时因为 u_4 是小点我们可以将它 u_4 放入 F。

- 若 u_1,u_2,u_3 都在 F 中，则我们将 v_2 放入 F，v_1,v_3,v_4,v_5 放入 F_5。
- 若 u_1,u_2,u_3 恰好有一个点在 F_5 中。设 u_i 在 F_5 中，则我们将与 f_i 关联的另外两个点放入 F，将与 f 关联的另外四个点放入 F_5。
- 若 u_1,u_2,u_3 恰好有两个点在 F_5 中。设 u_i,u_j 在 F_6 中，则我们将与 f_i,f_j 关联的另外两个点放入 F，将与 f 关联的另外两个点放入 F_5。
- 若 u_1,u_2,u_3 都在 F_5 中。由于 $G'[\{w_1,w_2,w_3\}]$ 为 G' 中的三角形，则至少有一个点在 F_5 中。若 w_1 在 F_5 中，则将 v_2 放入 F_5，将 v_1,v_3,v_4,v_5,v_6 放入 F，若 w_i 在 F_5 中，$i=2,3$，则我们将与 f_i 关联的一个点放入 F_5 且将其余与 f 关联的点放入 F。

因此在任意情况下 G 都存在 (F,F_5)-分解，矛盾。

断言 4 若 $f=[v_1v_2\cdots v_6]$ 为 $(3,3,3,3,3,8^+)$-面，f_3,f_5,f_6 为三角形，且与 f_5,f_6 关联的第三个点为小点，则 $d(v_6)\ge 9$。

证明 设 $f=[v_1v_2\cdots v_6]$ 为上述 6-面，令 v_2 的第三个邻点和与 f_3,f_5,f_6 关联的第三个点分别为 u_1,u_2,u_3,u_4。令 $G'=G-\{v_2\}$，则由 G 的极小性，G' 存在 (F,F_5)-分解。当 $d(v_6)=8$ 时，我们可以很容易地将 G' 的 (F,F_5)-分解扩充到 G。

首先假设 u_1 在 F 中。若 v_1,v_3 中至多一个属于 F_5，则可将 v_2 放入 F_5。否则可将 v_2 放入 F。现在假设 u_1 在 F_5 中。若 v_1,v_3 中至多一个属于 F，则可将 v_2 放入 F。因此可以假设两者都在 F 中。若 u_4,v_6 都在 F_5 中，则同样可将 v_2 放入 F。若两者都在 F 中，则可先将 v_1 放至 F_5，再将 v_2 放至 F。否则，首先假设 u_4 在 F_5 中，v_6 在 F 中，若 u_4 至多有四个 F_5-邻点，则可同样将 v_1 放至 F_5。若有至少五个 F_5-邻点，则可将 u_4 放至 F，v_1 放至 F_5。因此可得 u_4 在 F 中，v_6 在 F_5 中。

同上分析可得 v_i 和 u_3 一定在 F 中，$i=4,5$，且 u_2 一定在 F_5 中。若 $d(v_6)=8$，则 v_6 至多有四个 F_5-邻点。因此我们可以将 v_1 或者 v_5 放入 F_5。v_2 放入 F。因此我们总能得到 G 的 (F,F_5)-分解，矛盾。

断言 5 设 $f=[v_1v_2\cdots v_6]$ 为 G 中的 $(3,8^+,3,3,8^+3)$-面，其中 f_i 为三角形，$i=1,2,4,5$。令与 f_i 关联的第三个点为 u_i。若 u_i 为小点，$i=1,2,4,5$，则 v_2,v_5 中至少有一个 9^+-点。特别地，若 u_1,u_5 或 u_2,u_4 为 3-点，则 v_2,v_5 都为 9^+-点。

证明 设 v_2,v_5 都为 8-点。令 $G'=G-\{v_1,v_6\}$，由 G 的极小性可得，G' 存在 (F,F_5)-分解。下面我们要证明 G 存在 (F,F_5)-分解，从而得出矛盾，从而证明 v_2,v_5 中至少有一个 9^+-点。

- 首先假设 v_2,v_5 都在 F 中。若 u_1,u_5 都在 F 中，则将 v_1,v_6 放入 F_5。否则，由于 u_1,u_5 都是小点，可将 v_1 放入 F_5， v_6 放入 F。
- 假设 v_2,v_5 恰好有一个点在 F 中，由对称性不妨设 v_2 在 F 中且 v_5 在 F_5 中。此时可将 v_1 放入 F_5， v_5 放入 F。
- 设 v_2,v_5 都在 F_5 中。若 u_1,u_5 中至多有一个点在 F_5 中，则将 v_1,v_6 放入 F。现在假设 u_1,u_5 都在 F 中。由于 v_3,u_2 中至多有一个点在 F_5 中，若 v_2 其余的邻点不都在 F_5 中，则将 v_1 放入 F_5，v_6 放入 F。因此，v_3,u_2 和 v_4,u_4 中都恰好有一个点在 F_5 中。

  (1) 如果 u_2 在 F 中，则将 v_3 放入 F， v_1 放入 F_5， v_6 放入 F。

  (2) 如果 u_2 在 F_5 中，则将 v_2 放入 F， v_1 放入 F_5， v_6 放入 F。

  若 u_2,u_4 都为 3-点，由对称性不妨设 $d(v_2)=8$。我们知道 v_2,u_2 中恰好有一个点在 F_5 中，且 v_4,u_4 中至少有一个点在 F 中。令 u_2,u_4 的第三个邻点分别为 w_1,w_2。
- 设 u_2 在 F_5 中。若 v_4 在 F 中，则我们将 v_3 放入 F_5， v_2 放入 F， v_1 放入 F_5 且将 v_6 放入 F。否则， v_4 在 F_5 中且 u_4 在 F 中。若 w_2 在 F_5 中，则将 v_4 放入 F，则我们回到了之前讨论过的情况。否则，将 v_4 放入 F，同样回到之前讨论过的情况。
- 设 v_3 在 F_5 中。若 w_1 在 F 中，我们将 v_3 放入 F_5， v_2 放入 F， v_1 放入 F_5 且将 v_6 放入 F。否则，我们直接将 v_2 放入 F， v_1 放入 F_5， v_6 放入 F。

2.2. 权转移

接下来我们将应用权转移来得出矛盾。首先我们对 G 中的顶点和边定义初始权函数 ω。对于 $v\in V(G)$，$\omega(v)=2d(v)-6$；对于 $f\in F(G)$， $\omega(f)=d(f)-6$。根据欧拉公式和握手定理可得 $\sum_{v\in V(G)}(2d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(d(f)-6)=-12$。

然后定义适当的权规则将初始权 ω 通过权转移变为最终权 ω^*，使得对于每个 $x\in V(G)\cup F(G)$，有 $\omega^*(x)\ge 0$。注意到权转移过程不会改变总的权和，因此我们可以得出如下矛盾，$0\le\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\omega^*(x)=\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\omega(x)=-12$，从而完成定理的证明。

设 $d(v)=4$。令 v_1,v_2,v_3,v_4 为 v 在平面上按顺时针方向排列的邻点。记以 vv_i 和 vv_{i+1} 为边界构成的面为 f_i， $i=1,2,3,4$ 且 i 对 4 取模。设 $f=[v_1v_2\cdots v_6]$ 是一个 6-面，若 f_i 是一个三角形，则令 u_i 为与 f_i 关联的第三个点。

若 v 是一个 3-点，关联一个三角形且只有一个大邻点，则称 v 为一个坏 3-点。另外，若 v 是一个 4-点且关联两个三角形，则称 v 为坏 4-点。设 $f=[v_1v_2\cdots v_6]$ 是一个 $(3,8^+,3,3,8^+,3)$ -面且 f_i 为三角形，$i=1,2,4,5$。若 u_i 是小点， $i=1,2,4,5$，且 u_1,u_5 或者 u_2,u_4 不都为 3-点，则称 f 是一个坏 6-面。很显然，任意两个坏 6-面不相邻。

对于 $x,y\in V(G)\cup F(G)$，我们用 $\tau(x\to y)$ 表示 x 转给 y 的权值。另外，用 $l(v)$ 表示与 v 关联的三角形的个数。对于任意 $f\in F(G)$，用 $k(f)$ 表示与 f 关联的坏 3-面的个数。我们的权规则定义如下：

(R1) 令 $d(v)=3$。若 $l(v)=0$，则 v 给每个关联的 6^+-面转权 $\frac{n_b(v)}{4}$。设 $l(v)=1$，若 v 是一个坏 3-点，则 v 给每个关联的三角形转权 1。否则，v 给每个关联的三角形转权 1，给每个关联的 6^+-面转权 $\frac{3n_b(v)-4}{8}$。

(R2) 令 $d(v)=4$。若 $l(v)=0$，则 v 给每个关联的 6^+ -面转权 $\frac{3n_b(v)+8}{16}$。当 $l(v)=1$ 时，令 f_i 为三角

形，则 $\tau(v\to f_i)=1$，$\tau(v\to f_2)=\tau(v\to f_4)=\frac{3n_b(v)+2}{8}$ 且 $\tau(v\to f_3)=\frac{1}{2}$。设 $l(v)=2$，则 v 给每个关联的三角形转权 1，给每个关联的 6^+-面转权 $\frac{3n_b(v)}{8}$。

(R3) 5-点给每个关联的三角形转权 1，给每个关联的 6^+-面转权 $\frac{n_b(v)+2}{3}$。

(R4) 小 6^+-点给每个关联的面转权 1。

(R5) 令 v 为 G 中的一个大点，则

(R5.1) v 给每个相邻的小点转 $\frac{3}{4}$。若 v 相邻一个大点 u，则 v 给每个与 v 关联且以 uv 为边界的面转权 $\frac{3}{8}$。

(R5.2) v 给每个关联的三角形转权 1。9^+-点给每个关联的 6^+-面转权 $\frac{1}{4}$。每个 6-点给关联的 6^+-面 f' 转权 $\frac{1}{8}$，其中 f' 至多相邻一个与 v 关联的三角形。

(R6) 6^+-面给每个关联的坏 3-点转权 $\frac{1}{8}$，给每个相邻的坏 6-面转权 $\frac{1}{8}$。

下面我们证明对于所有 $x\in V(G)\cup F(G)$，$\omega^*(x)\geq 0$。令 $v\in V(G)$，则 $d(v)\geq 3$。

- 设 $d(v)=3$。若 $l(v)=0$，则由(R1)和(R5)可得 $\omega^*(v)\geq\frac{3}{4}n_b(v)-3\cdot\frac{n_b(v)}{4}\geq 0$。若 $l(v)=1$，假设 v 是一个坏 3-点，则根据规则(R1)，(R5)和(R6)我们可以得出 $\omega^*(v)\geq 1-\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{8}\geq 0$。否则，$\omega^*(v)\geq -1-2\cdot\frac{3n_b(v)-4}{8}+\frac{3n_b(v)}{4}\geq 0$。
- 设 $d(v)=4$。若 $l(v)=0$，则由(R2)和(R5)可得 $\omega^*(v)\geq\frac{3n_b(v)}{4}+2-4\cdot\frac{3n_b(v)+8}{16}\geq 0$。若 $l(v)=1$，则 $\omega^*(v)\geq\frac{3n_b(v)}{4}+2-1-2\cdot\frac{3n_b(v)+2}{8}-\frac{1}{2}\geq 0$。设 $l(v)=2$，则 $\omega^*(v)\geq\frac{3n_b(v)}{4}+2-2-2\cdot\frac{3n_b(v)}{8}\geq 0$。
- 设 $d(v)=5$，由(R3)我们可以得到 $\omega^*(v)\geq 4+n_b(v)-2-3\cdot\frac{n_b(v)+2}{3}\geq 0$。
- 设 $6\leq d(v)\leq 7$，由(R4)我们可以得到 $\omega^*(v)\geq 2d(v)-6-d(v)\geq 0$。
- 设 $d(v)=8$，由(R5)我们可以得到 $\omega^*(v)\geq 2\cdot 8-6-8\cdot\frac{3}{4}-4\geq 0$。
- 设 $d(v)\geq 9$。如果 $d(v)=9$，则根据(R5)可得 $\omega^*(v)\geq 12-9\cdot\frac{3}{4}-5\cdot\frac{1}{4}-4=0$。如果 $d(v)\geq 10$，则根据(R5)可得 $\omega^*(v)\geq 2d(v)-6-\frac{d(v)}{2}-\frac{3d(v)}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{d(v)}{2}+1\right)\geq 0$。

下面我们证明对于 $f\in F(G)$，有 $\omega^*(f)\geq 0$。如果 $d(f)=3$，那么根据规则(R1)-(R5)我们可以得出 $\omega^*(f)\geq -3+3=0$。如果 $d(f)=7$，则 f 的边界上至多有 6 个坏 3-点并且 f 至多相邻两个坏 6-面。因此 $\omega^*(f)\geq 1-6\cdot\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{8}=0$。设 $d(f)\geq 8$，有 $\omega^*(f)\geq d(f)-6-\frac{1}{8}\cdot d(f)-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot d(f)>0$。现在假设 $d(f)=6$，令 $f=[v_1v_2\cdots v_6]$。接下来我们将根据 $k(f)$ 的值将证明分为以下几个部分。注意到不是坏 3-点的 3-点和

小 4^+-点至少给每个关联的 6^+-面转权 $\frac{1}{4}$。

情况 1 假设 $k(f)=0$，则有 $\omega^*(f)=\omega(f)=d(f)-6=0$。

情况 2 假设 $k(f)=1$，则 f 不相邻坏 6-面。令 v_1 为坏 3-点，f_1 为三角形。则 f_6 一定为 4^+-面。因此不管 v_6 是大点还是小点，都有 $\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$。从而有 $\omega^*(f)\geq-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}>0$。

情况 3 假设 $k(f)=2$。

首先假设 v_1,v_2 为坏 3-点。如果 f_1 为三角形，那么 f_2,f_6 都为 4^+-面，因此 $\tau(v_3\to f)\geq\frac{1}{4}$，$\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$。故有 $\omega^*(f)\geq 2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}>0$。现在假设 f_2,f_6 为三角形，如果 v_3 为小点，那么 u_2 肯定为大点，因此根据规则(R1)-(R4)可得 $\tau(v_3\to f)\geq\frac{3}{8}$。从而有 $\omega^*(f)\geq\frac{3}{8}-2\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$。假设 v_3 为大点，如果 v_4 也为大点，则根据规则(R5.1)可得 $\tau(v_3\to f)\geq\frac{3}{8}$；否则 $\tau(v_4\to f)\geq\frac{1}{4}$。由对称性可得 $\tau(v_5\to f)+\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$。因此 $\omega^*(f)\geq 2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}>0$。

假设 v_1,v_3 为坏 3-点。如果 f_1,f_2 为三角形，那么 f_3,f_6 都为 4^+-面，因此有 $\tau(v_4\to f)\geq\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$，故 $\omega^*(f)\geq 2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}>0$。现在假设 f_3,f_6 为三角形，由于 f_1,f_2 为 4^+-面且 v_2 不为坏点，因此 $\tau(v_2\to f)\geq\frac{1}{4}$，故 $\omega^*(f)\geq\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}=0$。根据对称性我们假设 f_1,f_3 为三角形，那么 v_2 必为 4^+-点且不为坏点，因此 $\omega^*(f)\geq\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}=0$。

假设 v_1,v_4 为坏 3-点。由对称性，如果 f_1,f_3 为三角形，那么 f_4,f_6 必为 4^+-面。由于 v_5,v_6 都不为坏点，因此 $\tau(v_5\to f)\geq\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$。故 $\omega^*(f)\geq 2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}>0$。如果 f_1,f_4 为三角形，那么 f_3,f_6 为 4^+-面，同样我们有 $\tau(v_3\to f)\geq\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$。因此 $\omega^*(f)\geq 2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{8}>0$。

情况 4 假设 $k(f)=3$。

假设 v_1,v_2,v_3 为坏 3-点。根据对称性假设 f_1,f_3 为三角形，则有 $\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$。如果 v_4 为小点，那么 u_3 肯定为大点，因此根据(R2)-(R4)可得 $\tau(v_4\to f)\geq\frac{1}{4}$。假设 v_4 为大点，如果 v_5 也是大点，那么根据规则(R5)有 $\tau(v_4\to f)\geq\frac{3}{8}$。否则 $\tau(v_5\to f)\geq\frac{1}{4}$。因此 $\omega^*(f)\geq 2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$。

假设 v_1,v_2,v_4 为坏 3-点。如果 f_1,f_3 为三角形，那么根据以上讨论我们可得 $\tau(v_5\to f)\geq\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$。因此 $\omega^*(f)\geq 2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{8}>0$。假设 f_1,f_4 为三角形，同样可得 $\tau(v_3\to f)\geq\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_6\to f)\geq\frac{1}{4}$。因此 $\omega^*(f)\geq 2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{8}>0$。假设 f_2,f_3,f_6 为三角形。如果 v_3 为小点，那么 u_2 肯定为大点，因此根据规则(R2)，$\tau(v_3\to f)\geq\frac{3}{8}$。由于 f_4 为 4^+-面，v_5 不为坏点，因此 $\tau(v_5\to f)\geq\frac{1}{4}$，故

$\omega^*(f)\ge\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-3\cdot\frac{1}{8}>0$。现在假设 v_3 为大点，那么 v_5 肯定为小点。同样有 $\tau(v_5\to f)\ge\frac{1}{4}$。如果 v_6 为小点，那么 u_6 肯定为大点，因此根据规则(R2)，$\tau(v_6\to f)\ge\frac{3}{8}$。否则假设 v_6 为大点，如果 f_5 为三角形，那么根据规则(R2)有 $\tau(v_5\to f)\ge\frac{5}{8}$，或根据规则(R5)有 $\tau(v_6\to f)\ge\frac{1}{4}$。在每种情况下我们都有 $\omega^*(f)\ge 2\cdot\frac{1}{4}-3\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$。最后假设 f_2,f_4,f_6 为三角形。此时 v_3 为 4^+-点且 f_3 为 4^+-面。如果 v_3 为小点，那么 u_2 肯定为大点，因此根据规则(R2)，$\tau(v_3\to f)\ge\frac{5}{8}$。现在假设 v_3 为大点，由于 f 为 4^+-面，$\tau(v_3\to f)\ge\frac{1}{4}$。并且 v_5 为小点，那么 u_6 肯定为大点，因此根据规则(R2)，$\tau(v_6\to f)\ge\frac{5}{8}$。否则 $\tau(v_5\to f)\ge\frac{3}{8}$。因此总有 $\omega^*(f)\ge\frac{5}{8}-\frac{3}{8}-\frac{1}{8}>0$。

假设 v_1,v_3,v_5 为坏 3-点。首先假设 f_1,f_2,f_4 为三角形，则 f_3,f_5,f_6 必为 4^+-面，因此 $\tau(v_6\to f)\ge\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_4\to f)\ge\frac{1}{4}$。故 $\omega^*(f)\ge 2\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{8}>0$。现在假设 f_1,f_3,f_5 为三角形，同样可得 $\tau(v_2\to f)\ge\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_4\to f)\ge\frac{1}{4}$。因此 $\omega^*(f)\ge 2\cdot\frac{1}{4}-\frac{3}{8}>0$。

情况 5 假设 $k(f)=4$。

假设 v_1,v_2,v_3,v_4 为坏 3-点。首先假设 f_1,f_3 为三角形，那么 f 不相邻坏 6-面。并且 f_4,f_6 都为 4^+-面，因此 $\tau(v_5\to f)\ge\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_6\to f)\ge\frac{1}{4}$。故 $\omega^*(f)\ge 2\cdot\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{8}>0$。现在假设 f_2,f_4,f_6 为三角形，如果 v_5,v_6 都为大点，那么 $\tau(v_5\to f)\ge\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_6\to f)\ge\frac{1}{4}$。如果 v_5,v_6 都为小点，那么 u_4,u_6 都为大点，因此根据规则(R2)同样有 $\tau(v_5\to f)\ge\frac{1}{4}$ 且 $\tau(v_6\to f)\ge\frac{1}{4}$。否则根据对称性假设 v_5 为大点而 v_6 为小点，此时 u_6 肯定为大点，因此 $\tau(v_6\to f)\ge\frac{3}{4}$。故 $\omega^*(f)\ge\frac{3}{4}-4\cdot\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{8}=0$。

假设 v_1,v_2,v_3,v_5 为坏 3-点。首先假设 f_1,f_3,f_4 为三角形，那么 f_5,f_6 肯定为 4^+-面，因此根据规则(R1)，$\tau(v_6\to f)\ge\frac{1}{4}$。此时如果 v_4 为小点，那么 u_3,u_4 肯定为大点，因此根据(R3) $\tau(v_4\to f)\ge\frac{2}{3}$，故 $\omega^*(f)\ge\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}>0$。现在假设 v_4 为大点，根据断言 4，$d(v_4)\ge 9$，此外 f_2 不为坏面，因此 $\tau(v_4\to f)\ge\frac{1}{4}$。从而有 $\omega^*(f)\ge 2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$。假设 f_2,f_4,f_6 为三角形，那么 f_3,f_5 肯定为 4^+-面且 v_4 为小 4^+-点，因此 $\tau(v_4\to f)\ge\frac{1}{4}$。此时如果 v_6 为大点，那么 f_1 肯定不为坏面且 $\tau(v_6\to f)\ge\frac{1}{4}$，因此 $\omega^*(f)\ge 2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$。否则 u_6 肯定为大点，因此根据规则(R2)，$\tau(v_6\to f)\ge\frac{5}{8}$。从而有 $\omega^*(f)\ge\frac{5}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}>0$。

假设 v_1,v_2,v_4,v_5 为坏 3-点。首先假设 f_1,f_4 为三角形，那么 f 相邻的其余面都为 4^+-面，此时有

$\tau(v_3 \to f) \ge \frac{1}{4}$且$\tau(v_6 \to f) \ge \frac{1}{4}$。因此$\omega^*(f) \ge 2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$。假设$f_1, f_3, f_5$为三角形，那么此时$f_2, f_6$为$4^+$-面。如果$v_3, v_6$都为大点，那么$\omega^*(f) \ge 2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$。否则$v_3, v_6$都为小点并且$u_3, u_5$都为大点，因此根据规则(R2)，$\tau(v_3 \to f) \ge \frac{5}{8}$，故$\omega^*(f) \ge \frac{5}{8}-\frac{1}{2}>0$。最后假设$f_2, f_3, f_5, f_6$为三角形，如果$v_3, v_6$都为小点，那么对于$i=2,3,5,6$，$u_i$都为大点。根据规则(R3)，$\tau(v_3 \to f) \ge \frac{2}{3}$，$\tau(v_6 \to f) \ge \frac{2}{3}$，因此$\omega^*(f) \ge 2\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{8}>0$。现在假设$v_3, v_6$中恰有一个为小点，不妨设为$v_3$，此时$f_1, f_4$不为坏面，因此我们同样可得$\tau(v_3 \to f) \ge \frac{2}{3}$，$\omega^*(f) \ge \frac{2}{3}-\frac{1}{2}>0$。最后假设$v_3, v_6$都为大点，那么对于$i=2,3,5,6$，$u_i$都为小点。根据断言5，如果$u_2, u_6$或$u_3, u_5$都为3-点，那么$v_3, v_6$都为$9^+$-点。因此$\omega^*(f) \ge 2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=0$。否则$f$为坏6-面，同样根据断言5，$v_3, v_6$中至少有一个点为$9^+$-点，因此根据规则(R6)，$\tau(f_1 \to f) \ge \frac{1}{8}$并且$\tau(f_4 \to f) \ge \frac{1}{8}$，从而有$\omega^*(f) \ge \frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=0$。

情况 6 假设$k(f)=4$。对于$i=1,2,3,4,5$，令v_i为坏3-点，此时u_1, u_3, u_5为大点且v_6为小点。根据断言3，v_6为5^+-点，因此$\tau(v_6 \to f) \ge \frac{11}{12}$，从而我们可得$\omega^*(f) \ge \frac{11}{12}-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}>0$。

基金项目

本文工作受到了浙江师范大学启航奖学金的资助。

参考文献

[1] Appel, K. and Haken, W. (1977) Every Planar Map Is Four Colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, **21**, 429-490. https://doi.org/10.1215/ijm/1256049011

[2] Appel, K. and Haken, W. (1977) Every Planar Map Is Four Colorable. Part II: Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, **21**, 491-567. https://doi.org/10.1215/ijm/1256049012

[3] Borodin, O.V. (1976) A Proof of Grunbaum's Conjecture on the Acyclic 5-Colorability of Planar Graphs (Russian). *Doklady Akademii nauk SSSR*, 231, 18-20.

[4] Poh, K.S. (1990) On the Linear Vertex-Arboricity of a Plane Graph. *Journal of Graph Theory*, **14**, 73-75. https://doi.org/10.1002/jgt.3190140108

[5] Chartrand, G. and Kronk, H.V. (1969) The Point-Arboricity of Planar Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **1**, 612-616. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-44.1.612

[6] Raspaud, A. and Wang, W. (2011) On the Vertex-Arboricity of Planar Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **52**, 1004-1010.

[7] Chen, M. and Raspaud, A. (2012) Vertex-Arboricity of Planar Graphs without Intersecting Triangles. *European Journal of Combinatorics*, **33**, 905-923. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2011.09.017

[8] Dross, F. and Montassier, M. (2015) Partitioning a Triangle-Free Planar Graph into a Forest and a Forest of Bounded Degree. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **49**, 269-275. https://doi.org/10.1016/j.endm.2015.06.037

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org