Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(1), 50-59**
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.91007

A Set of New Criteria for the Iterative Discrimination of Subdivision of Nonsingular H-Matrices

Wenwen Jiang, Qing Tuo*

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan
Email: *tuoqing_001@163.com

Received: Dec. 19th, 2019; accepted: Jan. 7th, 2020; published: Jan. 14th, 2020

Abstract

In this paper, we produced a set of new conditions for subdivided and iterative criteria of nonsingular H-matrices by the method of subdivided region and selected iterative coefficient, based on the nonsingular H-matrix and α-diagonally dominant matrix the relationship between diagonally dominant matrices. These conditions improved some recent results. Finally, several numerical examples were given to illustrate their validity.

Keywords

Non-Singular H-Matrix, α-Diagonally Dominant Matrix, Irreducible, Nonzero Elements Chain

一组关于非奇异H-矩阵的细分迭代判别新条件

蒋雯雯，庹　清*

吉首大学数学与统计学院，湖南　吉首
Email: *tuoqing_001@163.com

收稿日期：2019年12月19日；录用日期：2020年1月7日；发布日期：2020年1月14日

摘　要

本文根据非奇异H-矩阵与α-对角占优矩阵之间的关系，通过细分矩阵的下标区间，以及构造出新的迭代系数，得出了一组关于非奇异H-矩阵的细分迭代判别新条件，该条件改进了近期的某些结果，最后给出的几个数值算例说明了其有效性。

*通讯作者。

文章引用: 蒋雯雯, 庹清. 一组关于非奇异 H-矩阵的细分迭代判别新条件[J]. 应用数学进展, 2020, 9(1): 50-59.
DOI: 10.12677/aam.2020.91007

关键词

非奇异H-矩阵，α-对角占优矩阵，不可约，非零元素链

1. 引言

非奇异 H-矩阵是一种很重要的矩阵类。它在数学物理、统计学、神经网络等各个领域中都有着重要的地位。对于判定线性方程组(尤其是超大型方程组)是否具有稳定解时，往往需要先通过判定其系数矩阵是否为非奇异 H-矩阵来体现。如：当一个线性方程组的系数矩阵为非奇异 H-矩阵，那么该方程组对 Jacobi，Gauss-seidel，SOR，SSOR，AOR 等经典算法均是收敛的，即该方程组具有稳定解。因此，非奇异 H-矩阵判定问题一直是研究的热点，近年来国内外许多学者给出了一些实用的判定条件。

范迎松、徐仲、陆全等人在文献[1]中先使用了细分矩阵的下标区间的办法，并由新构造的递进系数提出了关于非奇异 H-矩阵新的判别准则；尹军茹等人在文献[2]中使用细分矩阵下标区间的方法，构造出新的迭代系数得到了不一样的判别准则。在此基础上，山瑞平等人在文献[3]中，根据广义严格对角占优矩阵与非奇异 H-矩阵之间蕴含的关系，细分了下标区间，并构造出不同的正对角矩阵，从而得到更好的判定条件。此外，庹清、刘长太等学者近年来在此领域也得出了一些很好的结果(见文献[4] [5] [6] [7])。

本文中，用 $M_n(C)\left(M_n(R)\right)$ 来表示 n 阶复(实)矩阵的集合。设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(C)$，记 $R_i=R_i(A)=\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right|, C_i=C_i(A)=\sum_{j\neq i}\left|a_{ji}\right|, \forall i,j\in N, N=1,2,\cdots,n$。为使所讨论的矩阵为非零矩阵且所论内容有意义，以下假设：在全文中，$\left|a_{ii}\right|\neq 0, R_i\neq 0, C_i\neq 0\ (\forall i\in N)$，且规定 $\sum_{t\in\varnothing}\cdot=0$。

定义 1：设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(C)$，若 $\left|a_{ii}\right|\geq R_i(A),\forall i\in N$，则称 A 为对角占优矩阵，记为 $A\in D^0$；若 $\left|a_{ii}\right|>R_i(A),\forall i\in N$，则称 A 为严格对角占优矩阵，记为 $A\in D$；若存在正对角阵 X，使得 X 右乘到矩阵 A 后的乘积矩阵为严格对角占优矩阵，则称 A 为广义严格对角占优矩阵，记为 $A\in\tilde{D}$。

定义 2：设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(C)$，$\alpha\in(0,1]$，若 $\left|a_{ii}\right|\geq\alpha R_i(A)+(1-\alpha)C_i(A),\forall i\in N$，则称 A 为 α-对角占优矩阵，记为 $A\in D^0(\alpha)$；若 $\left|a_{ii}\right|>\alpha R_i(A)+(1-\alpha)C_i(A),\forall i\in N$，则称 A 为严格 α-对角占优矩阵，记为 $A\in D(\alpha)$；若存在正对角阵 X，使得 X 右乘到矩阵 A 后的乘积矩阵为严格 α-对角占优矩阵，则称 A 为广义严格 α-对角占优矩阵，记为 $A\in\tilde{D}(\alpha)$。

定义 3：设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(C)$ 为不可约矩阵，$\alpha\in(0,1]$，若 $\left|a_{ii}\right|\geq\alpha R_i(A)+(1-\alpha)C_i(A)$，则称 A 为不可约 α-对角占优矩阵。

定义 4：设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(C)$ 为 α-对角占优阵，$\alpha\in(0,1]$，若对满足 $\left|a_{ii}\right|=\alpha R_i(A)+(1-\alpha)C_i(A)$ 的每个下标 i，存在非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rk}$，使得 $k\in\left\{i\in N:\left|a_{ij}\right|=R_i^{\alpha}(A)C_i^{(1-\alpha)}(A)\right\}\neq\varnothing$，则称 A 为具非零元素链 α-对角占优矩阵。

引理 1 [8] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(C)$，$\alpha\in(0,1]$，$A\in\tilde{D}$ 当且仅当 $A\in\tilde{D}(\alpha)$。

引理 2 [8] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n(C)$ 为不可约 α-对角占优矩阵，且至少有一个对角占优行，则 $A\in\tilde{D}$。

引理 3 [9] 设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 为具有非零元素链 α-对角占优矩阵，则 $A\in\tilde{D}$。

以下是下标集的符号解释：

$$N_1=\left\{i\in N:0<\left|a_{ii}\right|<\alpha R_i+\left(1-\alpha\right)C_i\right\},\quad N_2=\left\{i\in N:\left|a_{ii}\right|=\alpha R_i+\left(1-\alpha\right)C_i\right\},$$

$$N_3=\left\{i\in N:\left|a_{ii}\right|>\alpha R_i\left(A\right)+\left(1-\alpha\right)C_i\left(A\right)\right\},\quad N=N_1\oplus N_2\oplus N_3。$$

若 $N_3=\varnothing$，则 $A\notin\tilde{D}$；若 $N_1\cup N_2=\varnothing$，显然 $A\in\tilde{D}$。为使所论内容有意义，以下假设：$N_1\oplus N_2\neq\varnothing$，$N_3\neq\varnothing$。

文献[3]给出的主要结果如下：

首先，划分下标区间：令 $N_1=N_1^{(1)}\cup N_1^{(2)}\cup\cdots\cup N_1^{(m)}$，$N_1^{(1)}=\left\{i\in N:0<\left|a_{ii}\right|<\dfrac{1}{m}\left[\alpha R_i+\left(1-\alpha\right)C_i\right]\right\}$，$N_1^{(k)}=\left\{i\in N:\dfrac{k-1}{m}\left[\alpha R_i+\left(1-\alpha\right)C_i\right]\leq\left|a_{ii}\right|\leq\dfrac{k}{m}\left[\alpha R_i+\left(1-\alpha\right)C_i\right]\right\},k=2,3,\cdots,m$。

记，

$\forall i\in N_1^{(k)},k=1,2,\cdots,m$ 时，$x_{1i}^{(k)}=\dfrac{k\left|a_{ii}\right|}{m\left[\alpha R_i+\left(1-\alpha\right)C_i\right]}$；

$\forall i\in N_2,p\geq 1$ 时，$x_{2i}=\dfrac{1}{pm}$；

$\forall i\in N_3$ 时，$r_0=1$，

$$r_1=\max_{i\in N_3}\left\{\frac{\alpha R_i+\left(1-\alpha\right)C_i}{\left|a_{ii}\right|}\right\},$$

$$r_{l+1}=\max_{i\in N_3}\left\{\frac{\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}\left|a_{it}\right|x_{1i}^{(k)}\right)+\alpha\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2i}+r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left|a_{it}\right|\right]+\left(1-\alpha\right)C_i}{\left|a_{ii}\right|}\right\},l\in Z^+,$$

$$M_{l+1,i}\left(A\right)=\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\alpha\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}+r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left|a_{it}\right|\right]+\left(1-\alpha\right)C_i,l\in Z,$$

$$\delta_{l+1,i}=\frac{M_{l+1,i}\left(A\right)}{\left|a_{ii}\right|},l\in Z,$$

$$W_{l+1,i}\left(A\right)=\frac{\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}\right]+\left(1-\alpha\right)C_i}{M_{l+1,i}\left(A\right)-\alpha\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left|a_{it}\right|\delta_{l+1,i}},h_l=\max_{i\in N_3}W_{l+1,i}\left(A\right),l\in Z。$$

定理. 设 $A\in M_n\left(C\right)$，$\alpha\in\left(0,1\right]$，若存在 $l_0\in Z,p\geq 1$，使满足

$$\left|a_{ii}\right|x_{1i}^{(k)}>\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}+h_{l_0}\sum_{t\in N_3}\left|a_{it}\right|\delta_{l_0+1,t}\right]+\left(1-\alpha\right)C_ix_{1i}^{(k)},\forall i\in N_1^{(k)};k=1,2,\cdots,m,$$

$$|a_{ii}|x_{2i} > \alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+h_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\delta_{l_0+1,t}\right]+(1-\alpha)C_i x_{2i},\ \forall i\in N_2,$$

则 A 是非奇异 H-矩阵。

2. 主要结果

设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$， $\alpha\in(0,1]$，将不占优行的下标区间划分为 m 个区间，即 $N_1=N_1^{(1)}\cup N_1^{(2)}\cup\cdots\cup N_1^{(m)}$，其中 m 是任意正整数。

具体分法即，

$$N_1^{(1)}=\left\{i\in N: 0<|a_{ii}|<\frac{1}{m}\left[\alpha R_i+(1-\alpha)C_i\right]\right\},$$

$$N_1^{(k)}=\left\{i\in N: \frac{k-1}{m}\left[\alpha R_i+(1-\alpha)C_i\right]\le|a_{ii}|<\frac{k}{m}\left[\alpha R_i+(1-\alpha)C_i\right]\right\}, k=2,3,\cdots,m,$$

根据划分规则易知： $N_1^{(k)}$ 或为空集。

为叙述方便，引入以下符号：

$$\forall i\in N_1^{(k)},\quad k=1,2,\cdots,m,\quad x_{1i}^{(k)}=\frac{k|a_{ii}|}{m\left[\alpha R_i+(1-\alpha)C_i\right]};$$

$$\forall i\in N_2,\quad p\ge 1,\quad x_{2i}=\frac{1}{pm};$$

$$\forall i\in N_3,\quad k=1,2,\cdots,m,\quad l=1,2,\cdots,$$

$$\Omega_i^{(0)}=r_0=1,\quad r_l=\max_{i\in N_3}\left(\frac{\alpha\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\alpha\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+(1-\alpha)C_i}{|a_{ii}|-\alpha\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l-1)}}\right),$$

$$P_{l,i}=\alpha\left(\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|+r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l-1)}\right)+(1-\alpha)C_i,$$

$$\Omega_i^{(l)}=\frac{P_{l,i}}{|a_{ii}|},$$

$$M_{l,i}=\frac{\alpha\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\alpha\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+(1-\alpha)C_i}{P_{l,i}-\alpha r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l)}},$$

$$H_l=\max_{i\in N_3}M_{l,i},$$

由上易知， $P_{l+1,i}\le P_{l,i}$， $\Omega_i^{(l)}\le\Omega_i^{(l-1)}\le\cdots\le\Omega_i^{(1)}\le\Omega_i^{(0)}=1$， $r_l\le r_{l-1}\le\cdots\le r_1<r_0=1$。

2.1. 定理 1

设 $A\in M_n(C)$， $\alpha\in(0,1]$，若存在 $l_0\in Z, p\ge 1$，使满足：

$$\left|a_{ii}\right|x_{1i}^{(k)} > \alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}\left|a_{it}\right|\Omega_t^{(l_0)}\right] \\ +(1-\alpha)C_i x_{1i}^{(k)},\ \forall i\in N_1^{(k)};k=1,2,\cdots,m \tag{1}$$

$$\left|a_{ii}\right|x_{2i} > \alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}\left|a_{it}\right|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}\left|a_{it}\right|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i x_{2i},\ \forall i\in N_2 \tag{2}$$

则 A 是非奇异 H-矩阵。

证明

由于 $x_{1i}^{(k)}=\dfrac{k\left|a_{ii}\right|}{m\left[\alpha R_i+(1-\alpha)C_i\right]}$，得到 $0<x_{1i}^{(k)}\leq\dfrac{\left|a_{ii}\right|}{\alpha R_i+(1-\alpha)C_i}<1,\forall i\in N_1^{(k)},k=1,2,\cdots,m$，从而 $0<x_{1i}^{(k)}<1,\forall i\in N_1^{(k)}$。

由于 $x_{2i}=\dfrac{1}{pm},p\geq 1$，$m$ 是任意正整数，所以 $0<x_{2i}\leq 1,\forall i\in N_2$。

根据定义得到，

$$\begin{aligned} M_{l,i} &= \frac{\alpha\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\alpha\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}+(1-\alpha)C_i}{P_{l,i}-\alpha r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left|a_{it}\right|\Omega_t^{(l)}} \\ &\leq \frac{\alpha\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\alpha\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}+(1-\alpha)C_i}{P_{l,i}-\alpha r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left|a_{it}\right|\Omega_t^{(l-1)}} \\ &\leq \frac{\alpha\sum_{t\in N_1}\left|a_{it}\right|+\alpha\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|+(1-\alpha)C_i}{P_{l,i}-\alpha r_l\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left|a_{it}\right|\Omega_t^{(l-1)}}=1 \end{aligned}$$

又因为 $H_l=\max\limits_{i\in N_3}M_{l,i}$，故 $H_l\leq 1$，$\Omega_i^{(l)}\leq 1$。

根据(1)式和(2)式，存在 $1_0\in Z$，可取充分小的正数 $\varepsilon>0$，使 ε 同时满足：

$$\varepsilon\alpha\sum_{t\in N_3}\left|a_{it}\right|<\left|a_{ii}\right|x_{1i}^{(k)}-\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left|a_{it}\right|\Omega_t^{(l_0)}\right] \\ -(1-\alpha)C_i x_{1i}^{(k)},\ \forall i\in N_1^{(k)};k=1,2,\cdots,m \tag{3}$$

$$\varepsilon\alpha\sum_{t\in N_3}\left|a_{it}\right|<\left|a_{ii}\right|x_{2t}-\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{k},t\neq i}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}\left|a_{it}\right|\Omega_t^{(l_0)}\right]-(1-\alpha)C_i x_{2i},\ \forall i\in N_2 \tag{4}$$

再根据 $M_{l,i}$，$P_{l,i}$ 的定义，以及 $H_l=\max\limits_{i\in N_3}M_{l,i}$，$\Omega_i^{(l)}=\dfrac{P_{l,i}}{\left|a_{ii}\right|}$，对于任意 $i\in N_3$，有：

$$H_{l_0}P_{l_0,i}\geq\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{k}}\left|a_{it}\right|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}\left|a_{it}\right|x_{2t}+H_{l_0}r_{l_0}\sum_{t\in N_3,t\neq i}\left|a_{it}\right|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i,$$

又因为 $H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}|a_{ii}|=H_{l_0}\frac{P_{l_0,i}}{|a_{ii}|}|a_{ii}|=H_{l_0}P_{l_0,i}$，所以得到：

$$\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}r_{l_0}\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i-H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}|a_{ii}|\le 0,$$

即 $H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}|a_{ii}|-\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}r_{l_0}\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i\ge 0$，

当 $r_{l_0}=r_0=1$ 时，易知上述等式依旧成立。

因为 $|a_{ii}|>\alpha R_i+(1-\alpha)C_i\ge\alpha\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|+(1-\alpha)C_i$，所以 $|a_{ii}|-\alpha\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|+(1-\alpha)C_i\ge 0$，

综上，取 $\varepsilon>0$ 且充分小，得：

$$\begin{aligned}&H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}|a_{ii}|-\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}r_{l_0}\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i\\&+\varepsilon\left[|a_{ii}|-\alpha\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|+(1-\alpha)C_i\right]>0\end{aligned}\tag{5}$$

下面构造正对角矩阵 $X=diag(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，记 $B=AX=(b_{ij})$，其中：

$$x_i=\begin{cases}x_{1i}^{(k)} & i\in N_1^{(k)}\\ x_{2i} & i\in N_2\\ H_{l_0}\Omega_i^{(l_0)}+\varepsilon & i\in N_3\end{cases},$$

1) $\forall i\in N_1^{(k)}$，由(3)式得，

$$\begin{aligned}&\alpha R_i(B)+(1-\alpha)C_i(B)\\&=\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}+\varepsilon\right)\right]+(1-\alpha)C_i(A)x_{1i}^{(k)}\\&=\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i(A)x_{1i}^{(k)}+\varepsilon\alpha\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\\&<|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}=|b_{ii}|\end{aligned}$$

2) $\forall i\in N_2$，由(4)式得，

$$\begin{aligned}&\alpha R_i(B)+(1-\alpha)C_i(B)\\&=\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}+\varepsilon\right)\right]+(1-\alpha)C_i(A)x_{2i}\\&=\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i(A)x_{2i}+\varepsilon\alpha\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\\&<|a_{ii}|x_{2i}=|b_{ii}|\end{aligned}$$

3) $\forall i\in N_3$，因为 $H_l\le 1$，$\Omega_i^{(l)}\le 1$，所以 $H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}\le 1$，再由(5)式得，

$$
\begin{aligned}
&|b_{ii}|-\alpha R_i(B)-(1-\alpha)C_i(B)\\
&=\left(H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}+\varepsilon\right)|a_{ii}|-\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\left(H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}+\varepsilon\right)\right]\\
&\quad-(1-\alpha)C_i(A)\left(H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}+\varepsilon\right)\\
&=\varepsilon\left[|a_{ii}|-\alpha\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|-(1-\alpha)C_i(A)\right]+H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}|a_{ii}|\\
&\quad-\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]-(1-\alpha)C_i(A)H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}\\
&\quad>\varepsilon\left[|a_{ii}|-\alpha\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|-(1-\alpha)C_i(A)\right]+H_{l_0}\Omega_t^{(l_0)}|a_{ii}|\\
&\qquad-\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]-(1-\alpha)C_i(A)\\
&\quad>0
\end{aligned}
$$

综上所述，$\forall i\in N$，$|b_{ii}|>\alpha R_i(B)+(1-\alpha)C_i(B)$，总是能够成立，即满足 $B=AX\in D(\alpha)$，所以 $A\in\tilde{D}(\alpha)$，根据引理 4，则 $A\in\tilde{D}$，证毕。

注 1 本文定理 1 对文献[3]的定理 1 有所改进，由于 $r_1\le 1$,故做每步迭代时都有所进步(即判定条件比文献[3]的弱)。

我们可以在定理 1 中取 $\alpha=1,p=1$，得出推论 1，如下所示。

2.1.1. 推论 1

设 $A\in M_n(C)$，若存在 $l_0\in Z$，使满足

$$
|a_{ii}|x_{1i}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{2t}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)},\ \forall i\in N_1;k=1,2,\cdots,m
$$

$$
|a_{ii}|x_{2i}^{(k)}>\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{2t}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)},\ \forall i\in N_2^{(k)}
$$

则 A 是非奇异 H-矩阵。

注 2 由于 $r_l\le 1$，故做每步迭代时都有所进步(即判定条件比文献[1]的定理 1 条件弱)，也就是说本文推论 1 推广了文献[1]的定理 1。

还可以在定理 1 中取 $\alpha=1,p=1,m=1$，得出推论 2。

2.1.2. 推论 2

设 $A\in M_n(C)$，若存在 $l_0\in Z$，使满足

$$
|a_{ii}|\frac{|a_{ii}|}{R_i}>\sum_{t\in N_1\cup N_2,t\neq i}|a_{it}|\frac{|a_{ii}|}{R_i}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)},\ \forall i\in N_1;k=1,2,\cdots,m
$$

则 A 是非奇异 H-矩阵。

同理可以推出下面两个定理：

2.2. 定理 2

设 $A\in M_n(C)$， $\alpha\in(0,1]$，矩阵 A 不可约，若存在 $l_0\in Z, p\geq 1$，使满足

$$|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}\geq\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right] \\ +(1-\alpha)C_i x_{1i}^{(k)},\ \forall i\in N_1^{(k)};k=1,2,\cdots,m \tag{6}$$

$$|a_{ii}|x_{2i}\geq\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i x_{2i},\ \forall i\in N_2 \tag{7}$$

且(6)或(7)中至少有一个严格不等式成立，则 A 是非奇异 H-矩阵。

2.3. 定理 3

记，

$$K_1=\left\{i\in N_1^{(k)}:|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}>\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i x_{1i}^{(k)}\right\};k=1,2,\cdots,m$$

$$K_1=\bigcup_{k=1}^{m}K_1^{(k)},$$

$$K_2=\left\{i\in N_2:|a_{ii}|x_{2i}>\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i x_{2i}\right\},$$

$$K_3=\left\{i\in N_3:|a_{ii}|H_{l_0}\Omega_i^{(l_0)}>\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3,t\neq i}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i H_{l_0}\Omega_i^{(l_0)}\right\}$$

设 $A\in M_n(C)$， $\alpha\in(0,1]$，若存在 $l_0\in Z, p\geq 1$，使满足

$$|a_{ii}|x_{1i}^{(k)}\geq\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)},t\neq i}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right] \\ +(1-\alpha)C_i x_{1i}^{(k)},\ \forall i\in N_1^{(k)};k=1,2,\cdots,m \tag{8}$$

$$|a_{ii}|x_{2i}\geq\alpha\left[\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t\in N_1^{(k)}}|a_{it}|x_{1t}^{(k)}\right)+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+H_{l_0}\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Omega_t^{(l_0)}\right]+(1-\alpha)C_i x_{2i},\ \forall i\in N_2 \tag{9}$$

且(8)或(9)中至少有一个严格不等式成立，若对 $\forall i\in\bigcup_{k=1}^{3}[N_i-K_i]$，存在非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rk}$，使得 $k\in\bigcup_{k=1}^{3}K_i$，则 A 是非奇异 H-矩阵。

3. 数值实例

例 设

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&1&1\\0&3.2&1&2&3\\1&1&18&4&5\\1&1&3&25&4\\0&1.5&2&3&20\end{pmatrix}。$$

易知 $N_1=\{2\},N_2=\{1\},N_3=\{3,4,5\}$，当取 $\alpha=\frac{1}{2},p=\frac{3}{2},l_0=1$ 时，容易算得 $x_{1i}^{(k)}=x_{12}=\frac{64}{95}=0.6737$（保留四位小数，后同），$x_{2i}=x_{21}=\frac{2}{3}=0.6666$。

继而能够得出：

$$\delta_{2,3}=0.3258,\delta_{2,4}=0.2951,\delta_{2,5}=0.4028,h_1=0.9613\ \text{（文献[1]结果）；}$$

$$\Omega_3^{(l)}=0.3258,\Omega_4^{(l)}=0.298,\Omega_5^{(l)}=0.4143,H_1=0.8975\ \text{（本文结果），}$$

当 $i\in N_2$ 时，根据

$$2.1558=3.2\times0.6737=|a_{22}|x_{12}<\alpha\left[|a_{21}|x_{21}+h_1\left(|a_{23}|\delta_{2,3}+|a_{24}|\delta_{2,4}+|a_{25}|\delta_{2,5}\right)\right]+(1-\alpha)C_2x_{21}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[0+0.9613\times(0.3258+2\times0.2951+3\times0.4028)\right]+\frac{1}{2}\times3.5\times0.6737=2.2$$

显然 A 不满足文献[1]中定理 1 的条件，不能判定其为非奇异 H-矩阵。

但是，由本文得出的结果，有

$$2.1558=3.2\times0.6737=|a_{22}|x_{12}>\alpha\left[|a_{21}|x_{21}+H_1\left(|a_{23}|\Omega_3^{(l)}+|a_{24}|\Omega_4^{(l)}+|a_{25}|\Omega_5^{(l)}\right)\right]+(1-\alpha)C_2x_{21}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[0+0.8795\times(0.3258+2\times0.298+3\times0.4143)\right]+\frac{1}{2}\times3.5\times0.6737=2.1309$$

显然矩阵 A 满足本文定理 1 的条件，可知矩阵 A 是非奇异 H-矩阵。

其中取正对角矩阵：

$$X=\begin{pmatrix}0.6737&0&0&0&0\\0&0.\dot{6}&0&0&0\\0&0&0.2865&0&0\\0&0&0&0.2621&0\\0&0&0&0&0.3643\end{pmatrix},$$

所以 $B=AX=\begin{pmatrix}1.3474&0&0&0.2621&0.3643\\0&2.1331&0.2865&0.5243&1.0929\\0.6737&0.\dot{6}&5.157&1.0484&1.8215\\0.6737&0.\dot{6}&0.8595&6.5525&1.4572\\0&0.\dot{9}&0.573&0.7863&7.286\end{pmatrix}$，B 是一个严格 α-对角占优矩阵。

致 谢

感谢陈茜等同学对本文提供的建议和帮助。

基金项目

国家自然科学基金(11461027)和湖南省教育厅科研基金(16A173)，吉首大学研究生创新基金(JGY201932)。

参考文献

[1] 范迎松, 陆全, 徐仲, 高慧敏. 非奇异 H-矩阵的一组判定条件[J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2011, 26(4): 474-480.

[2] 尹军茹, 徐仲, 陆全. 非奇 H-矩阵的细分迭代判别准则[J]. 工程数学学报, 2013, 30(3): 433-441.

[3] 山瑞平, 陆全, 徐仲, 张骁. 非奇 H-矩阵的一组细分迭代判定条件[J]. 应用数学学报, 2014, 37(6): 1130-1139.

[4] 庹清, 陈茜. 关于"一类非奇异 H-矩阵判定的新条件"一文的注记[J]. 计算数学, 2019, 41(2): 219-224.

[5] 刘长太. 非奇异 H 矩阵迭代式充分条件[J]. 计算数学, 2017, 39(3): 328-336.

[6] Gan, T.-B. and Huang, T.-Z. (2003) Simple Criteria for Nonsingular H-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **374**, 317-326. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00646-3

[7] Berman, A. and Plemmons, R.J. (1979) Nonnegative Matrix in the Mathematical Sciences. Academic Press, New York. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-092250-5.50009-6

[8] 谢清明. 判定广义对角占优矩阵的几个充分条件[J]. 工程数学学报, 2006(4): 757-760.

[9] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报, 1997(3): 216-223.